

求解等离子体动力学问题的另一途径

张 承 福

(北京大学物理系)

1983年5月25日收到

提 要

求解等离子体动力学问题的传统途径是先算出 $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$, 然后由积分算出所需的宏观量. 这不是一种简便和直接的途径. 若对速度 $\mathbf{v}$ 进行傅里叶变换, 得到 $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ 及其相应的方程, 则只需解出 $\mathbf{K} \simeq 0$ 附近的 f 值即可. 本文以低 β 不均匀(可二维不均匀)等离子体中的电磁模色散方程和碰撞对时间回声的影响两个例子说明由此种途径求解等离子体动力学问题的基本方法及其较传统方法优越之处.

一、引 言

凡与等离子体分布函数有关的问题, 不能从磁流体方程出发, 需求解动力学方程, 称动力学问题. 对于此类问题, 传统的做法都是先由动力学方程(符拉索夫方程或福克-普朗克方程)解出分布函数 $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$, 然后再对 f 积分以求出所需的宏观量. 注意到人们实际有兴趣的总是诸如密度、电流、能量等等宏观量, 它们只是 f 的某些平均值(即 f 的几个低次矩), 与 f 的细节关系不大. 因此, 传统的途径并不是一种简便的、直接的途径. 本文讨论求解此类问题的另一种途径: 将 $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ 中的速度 $\mathbf{v}$ 变换到傅里叶空间 $\mathbf{K}$, 即 $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$, 相应地可得 $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ 满足的方程(见本文(3)式). 只需求出 $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ 在 $\mathbf{K} \simeq 0$ 附近的解, 即可直接得到所需的宏观量. 这是一种更为简捷的途径. Lenard 和 Bernstein 在讨论碰撞对等离子体静电振荡的影响时曾用过对速度空间进行傅氏变换的方法^[1], 但其具体计算显得较复杂, 此方法似并未引起重视. 本文将指出, 从 $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ 的方程(3)出发, 结合已证明的行之有效的“轨道”积分方法, 可以较简单地、系统地用于求解各类等离子体动力学问题.

二、基本方程

$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ 满足方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \left(\frac{e\mathbf{E}}{m} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \nabla_v \right] f = \hat{C}. \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = e\mathbf{B}/mc$, $\hat{C}$ 是碰撞项. 现将 $\mathbf{v}$ 变到傅里叶空间 $\mathbf{K}$, 即

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{K},$$

$$f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v}. \quad (2)$$

根据傅里叶变换的性质, 只需将(1)式中的 $\mathbf{v} \rightarrow i\nabla_{\mathbf{K}}$, $\nabla_{\mathbf{v}} \rightarrow i\mathbf{K}$, 即可得 $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ 所满足的方程为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + i \frac{e\mathbf{E}}{m} \cdot \mathbf{K} + (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} \right] f = \tilde{C}(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t). \quad (3)$$

由(2)式易知, 人们有兴趣的宏观量为

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &\equiv \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} = f(\mathbf{K} = 0, \mathbf{r}, t) \\ \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r}, t) &\equiv \int \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} = i\nabla_{\mathbf{K}} f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{K}=0}, \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &\equiv m \int \mathbf{v} \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} = -m \nabla_{\mathbf{K}} \nabla_{\mathbf{K}} f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{K}=0}, \\ p(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{m}{2} \int v^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{P}), \\ \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) &\equiv m \int \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} \\ &= -im \nabla_{\mathbf{K}} \nabla_{\mathbf{K}} \nabla_{\mathbf{K}} f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{K}=0}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为粒子流(乘 e 即为电流), p 是能量密度. 可见这些宏观量只与 $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ 在 $\mathbf{K} \simeq 0$ 附近的性质有关, 大 $\mathbf{K}$ 值的 f 是无需求出的.

顺便指出, 由方程(3)求出矩方程链或二流体方程是十分简单的. 由(4)式知, $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ 对 $\mathbf{K}$ 的幂次展开式为

$$f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t) = n - i\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{K} - \frac{1}{2m} \mathbf{P} : \mathbf{K} \mathbf{K} + \frac{i}{3!m} \mathbf{Q} : \mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K} + \dots \quad (5)$$

将(5)式代入(3)式, 由 $\mathbf{K}$ 的各幂次相等即可得到矩方程链(表式略).

如果假定由于足够的碰撞, 分布函数已趋局域麦氏分布, 易证, 它在 $\mathbf{K}$ 空间的表达式为

$$f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t) = n \exp \left\{ -\frac{T}{2m} K^2 - i\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \right\}, \quad (6)$$

其中 $n, T, \mathbf{u}$ 都是 $(\mathbf{r}, t)$ 的函数. 将(6)式代入(3)式, 对 $\mathbf{K}$ 作幂次展开, 由 $\mathbf{K}$ 的零次、一次以及二次幂的迹即可得通常的二流体方程组, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \mathbf{u} &= 0, \\ n \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{m} \nabla n T - \frac{en\mathbf{E}}{m} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} &= \tilde{C}_1, \\ n \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} T + \frac{m}{2} u^2 \right) + \nabla \cdot n T \mathbf{u} - en\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} &= \tilde{C}_2. \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ 表示异种粒子间碰撞引起的动量、能量交换率.

总之, 方程(3)是代替(1)式的基本动力学方程, 也是本文的出发点.

三、低 β 无碰撞等离子体中的电磁模

设均匀的平衡磁场在 z 方向. 等离子体平衡密度可是 xy 平面上的任意函数. 以下对 $\mathbf{r}$ 也作傅里叶变换, 即 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}$.

1. 平衡分布

由(3)式知, $f_0(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ 满足方程

$$(-\mathbf{k} + \mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} f_0(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = 0. \quad (8)$$

可见 f_0 是 $\mathbf{k}_\perp$ 、 K_z^2 和 $(\mathbf{K}_\perp + \mathbf{k} \times \mathbf{e}_z / \Omega_0)^2$ 的任意函数, 其选择应由物理考虑确定之. 考虑到局域麦氏分布具有(6)式的形式, 对 f_0 的一个自然选择是

$$f_0(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = C(\mathbf{k}_\perp) \delta(k_z) \exp \left\{ -\frac{v_T^2}{4} K_z^2 - \frac{v_T^2}{4} (\mathbf{K}_\perp + \mathbf{k} \times \mathbf{e}_z / \Omega_0)^2 \right\}. \quad (9)$$

易证, 此分布相应于

$$f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi} v_T)^3} n_0(\mathbf{r}_{c\perp}) e^{-v^2/v_T^2}. \quad (10)$$

而

$$C(\mathbf{k}_\perp) = \frac{1}{4\pi^2} \int n_0(\mathbf{r}_{c\perp}) e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_{c\perp}} d\mathbf{r}_{c\perp}. \quad (11)$$

其中 $\mathbf{r}_{c\perp} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z / \Omega_0$, 是回旋中心坐标.

由于 $n_0(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{K} = 0, \mathbf{k})$, 电子、离子间的电中性条件可表为

$$C_e(\mathbf{k}_\perp) = C_i(\mathbf{k}_\perp) e^{-\frac{1}{4} \rho_i^2 k_\perp^2} \quad (12)$$

其中 $\rho_i^2 \equiv v_{Ti}^2 / \Omega_{0i}^2$.

2. 扰动分布

对于低 β 等离子体, 扰动电磁场可用 φ 和 A_z (或 $\phi \equiv \frac{\omega}{ck_z} A_z$) 描述

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\nabla\varphi + ik_z\phi, \\ \mathbf{B}_1 &= \frac{ck_z}{\omega} \nabla\phi \times \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (13)$$

由(3)式, f_1 满足方程

$$\mathcal{L}_0(\mathbf{K}, \mathbf{k}) f_1(\mathbf{K}, \mathbf{k}, t) = - \int \mathcal{L}_1(\mathbf{K}, \mathbf{k}') f_0(\mathbf{K}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (14)$$

其中

$$\mathcal{L}_0(\mathbf{K}, \mathbf{k}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (-\mathbf{k} + \mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{K}}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(\mathbf{K}, \mathbf{k}') &= \frac{e}{m} \left[i \mathbf{E}_1(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{K} + \frac{1}{c} (\mathbf{K} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{k}')) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} \right] \\
&= \frac{e}{m} \left[\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{K} \varphi + k'_z K_z (\varphi - \psi) \right. \\
&\quad \left. - i \frac{k'_z}{\omega} \phi(\mathbf{K} \cdot \mathbf{k}'_{\perp} \mathbf{e}_z - K_z \mathbf{k}'_{\perp}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} \right]. \quad (16)
\end{aligned}$$

方程(14)可以用“轨道”积分法求解,不过这里的“轨道”不再是粒子轨道,而是虚拟的 $\mathbf{K}$ 的“轨道”. 设 $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t)$, 且满足

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}_0 - \mathbf{k}, \quad (17)$$

则由(14)式即可解出

$$f_1(\mathbf{K}, \mathbf{k}, t) = - \int d\mathbf{k}' \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{L}_1(\mathbf{K}(t'), \mathbf{k}') f_0(\mathbf{K}(t'), \mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (18)$$

为完成上式中的积分,下面先求 $\mathbf{K}(t')$ 、即求 $\mathbf{K}$ 的“轨道”.

令 $\hat{K} \equiv \mathbf{K}_{\perp} + \mathbf{k} \times \mathbf{e}_z / \Omega_0$, 则(17)式表明:

$$\begin{aligned}
\dot{K}_z &= -k_z, \\
\dot{\hat{K}} &= \hat{K} \times \boldsymbol{\Omega}_0. \quad (19)
\end{aligned}$$

即 $\hat{K}$ 是一旋转矢量. 令 $\mathbf{k}_{\perp} = (k_{\perp}, \alpha)$, $\mathbf{k}'_{\perp} = (k'_{\perp}, \alpha')$, $\hat{K} = (|\hat{K}|, \eta)$. 注意到在本问题中我们只需求出 n_1 和 j_{1z} 就行,即只要求出 $f(\mathbf{K} = \epsilon \mathbf{e}_z, \mathbf{k}, t)$, 其中 $\epsilon \rightarrow 0$, 则显然有

$$|\hat{K}| = k_{\perp} / \Omega_0, \quad \eta(t) = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \eta(t') = \alpha - \frac{\pi}{2} - \Omega_0(t' - t), \quad \text{也即有}$$

$$\begin{aligned}
K_z(t') &= \epsilon + k_z(t - t'), \\
\mathbf{K}_{\perp}(t') &= \left(\frac{k_{\perp}}{\Omega_0}, \alpha - \frac{\pi}{2} + \Omega_0(t - t') \right) - \mathbf{k} \times \mathbf{e}_z / \Omega_0. \quad (20)
\end{aligned}$$

将(9)和(20)式代入(18)式,完成时间积分,即得

$$\begin{aligned}
f_1(\epsilon \mathbf{e}_z, \mathbf{k}, t) &= - \frac{e}{m} \sum_n \int d\mathbf{k}'_{\perp} c(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) e^{in(\alpha' - \alpha)} \\
&\quad \cdot \Gamma_n(\rho) \left\{ \left[k_z^2 \vartheta_2 + \frac{i}{2} v_T^2 k_z \epsilon \left(k_z^2 \vartheta_3 + \frac{2}{v_T^2} \vartheta_1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\Omega_0 \rho^2} (2n + i \rho^2 k_{\perp} k'_{\perp} \sin(\alpha - \alpha')) \right] (\vartheta_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} v_T^2 k_z \epsilon \vartheta_2) \right] \varphi(\mathbf{k}'_{\perp}) - \left(1 + \frac{\rho^2}{2} k_{\perp} k'_{\perp} \frac{\Omega_0}{\omega} \sin(\alpha - \alpha') \right) \\
&\quad \cdot \left[k_z^2 \vartheta_2 + \frac{i}{2} v_T^2 k_z \epsilon \left(k_z^2 \vartheta_3 + \frac{2}{v_T^2} \vartheta_1 \right) \right] \phi(\mathbf{k}'_{\perp}) \right\}. \quad (21)
\end{aligned}$$

其中 $\Gamma_n(\rho) \equiv \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{4} (k_{\perp}^2 + k_{\perp}'^2) \right\} I_n \left(\frac{\rho^2}{2} k_{\perp} k'_{\perp} \right)$, I_n 是 n 阶虚宗量贝塞耳函数. 计算中已用到关系

$$e^{a \cos \theta} = \sum_n I_n(a) e^{-in\theta}$$

$$\sin \theta e^{a \cos \theta} = i \sum_n \frac{n}{a} I_n(a) e^{-in\theta}. \quad (22)$$

由于 $\epsilon \rightarrow 0$, 只需保留 ϵ 一次项就行. ϑ_1, ϑ_2 和 ϑ_3 是轨道积分因子, 令 $\tau \equiv t - t'$, 有

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &\equiv -i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - n\Omega_0)\tau - \frac{1}{4}k_z^2 v_T^2 \tau^2} \\ &= -\frac{1}{|k_z| v_T} Z(\xi_n). \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\xi_n \equiv (\omega - n\Omega_0)/|k_z|v_T$, $Z(\xi_n)$ 是通常的色散函数. 其实(23)式是色散函数的另一种表达形式而已. ϑ_2, ϑ_3 均可用 $Z(\xi_n)$ 表示:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &\equiv \int_0^\infty d\tau \tau e^{i(\omega - n\Omega_0)\tau - \frac{1}{4}k_z^2 v_T^2 \tau^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega} \vartheta_1 = \frac{2}{k_z^2 v_T^2} [1 + \xi_n Z(\xi_n)]; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_3 &\equiv i \int_0^\infty d\tau \tau^2 e^{i(\omega - n\Omega_0)\tau - \frac{1}{4}k_z^2 v_T^2 \tau^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega} \vartheta_2 = \frac{2}{|k_z|^3 v_T^3} [(1 - 2\xi_n^2)Z(\xi_n) - 2\xi_n]. \end{aligned} \quad (25)$$

将(23)–(25)式代入(21)式, 可得

$$\begin{aligned} f_1(\epsilon \mathbf{e}_z, \mathbf{k}, t) &= -\frac{e}{T} \int d\mathbf{k}_\perp \sum_n C(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) e^{in(\alpha' - \alpha)} \\ &\quad \cdot \Gamma_n(\rho) \varphi(\mathbf{k}'_\perp) - \frac{e}{T} \sum_n \int d\mathbf{k}'_\perp C(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) e^{in(\alpha' - \alpha)} \\ &\quad \cdot \Gamma_n(\rho) \left[1 + \frac{i}{2} \rho^2 k_\perp k'_\perp \frac{\Omega_0}{\omega} \sin(\alpha - \alpha') \right] \left\{ \xi_n Z(\xi_n) \right. \\ &\quad \left. - i\epsilon \frac{\omega}{k_z} (1 + \xi_n Z(\xi_n)) \right\} \varphi(\mathbf{k}'_\perp) - (1 + \xi_n Z(\xi_n)) \\ &\quad \cdot \left(1 - i\epsilon \frac{\omega - n\Omega_0}{k_z} \right) \phi(\mathbf{k}'_\perp) \}. \end{aligned} \quad (26)$$

而电中性条件(12)式表明

$$\begin{aligned} C_e(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) &= C_i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) e^{-\frac{\rho^2}{4} |\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp|^2} \\ &= \sum_n \Gamma_n(\rho) e^{in(\alpha' - \alpha)} C_i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp). \end{aligned} \quad (27)$$

所以(26)式中第一项可表为

$$-\frac{e}{T} \int d\mathbf{k}'_\perp C_e(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \varphi(\mathbf{k}'_\perp).$$

由(26)式及(4)式立即可得 n_1, j_{1z} 为

$$\begin{aligned} n_1(\mathbf{k}_\perp) &= -\frac{e}{T} \int d\mathbf{k}'_\perp C_e(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \varphi(\mathbf{k}'_\perp) \\ &\quad - \frac{e}{T} \sum_n \int d\mathbf{k}'_\perp C(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) e^{in(\omega - \alpha)} \Gamma_n(\rho) \left(1 \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{i}{2} \rho^2 k_{\perp} k'_{\perp} \frac{\Omega_0}{\omega} \sin(\alpha' - \alpha) \left[\xi_0 Z(\xi_n) \varphi(\mathbf{k}'_{\perp}) - (1 + \xi_n Z(\xi_n)) \phi(\mathbf{k}'_{\perp}) \right], \quad (28)$$

$$j_{1z}(\mathbf{k}_{\perp}) = - \frac{e^2}{T} \sum_n \int d\mathbf{k}'_{\perp} c(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) e^{i n(\alpha' - \alpha)} \Gamma_n(\rho) \cdot \frac{\omega}{k_z} \left(1 - \frac{i}{2} \rho^2 k_{\perp} k'_{\perp} \frac{\Omega_0}{\omega} \sin(\alpha' - \alpha) \right) (1 + \xi_n Z(\xi_n)) \cdot \left[\varphi(\mathbf{k}'_{\perp}) - \frac{\omega - n\Omega_0}{\omega} \phi(\mathbf{k}'_{\perp}) \right]. \quad (29)$$

3. 色散方程

φ 和 ϕ 满足泊松方程和安培定理, 在 $\mathbf{k}$ 空间的表达式为

$$k_{\perp}^2 \varphi + k_z^2 (\varphi - \phi) = 4\pi e [n_{1r}(\mathbf{k}) - n_{1e}(\mathbf{k})], \\ k_{\perp}^2 \phi + \frac{\omega^2}{c^2} (\varphi - \phi) = \frac{4\pi\omega}{k_z c^2} j_{1z}(\mathbf{k}). \quad (30)$$

将(28), (29)式的 n_1 , j_{1z} 代入(30)式, 即得所求的色散方程(表式略). 一般情形下, 这是一个二维的积分方程组, 需数值求解. 可以证明, 对于几种特殊情形, 色散方程可以简化:

1. 若 $n_0(\mathbf{r})$ 与 $\mathbf{r}$ 无关, 即平衡密度均匀, 也即有 $c(\mathbf{k}) = c_0 \delta(\mathbf{k})$, 则色散方程退化为代数方程组.

2. 若 $|k_{\perp} \rho| \ll 1$, 即对长波(横向)模, 则积分方程组退化为微分方程组.

3. 若 $n_0(\mathbf{r})$ 轴对称分布, 即 $n_0(\mathbf{r}) = n_0(r)$, 也即 $c(\mathbf{k}_{\perp}) = c(k_{\perp})$, 则 $\mathbf{r}$ 空间不同 l 的 $e^{il\theta}$ 模是互相独立的, 相应地 $\varphi(\mathbf{k}_{\perp}) = \varphi(k_{\perp}) e^{il\alpha}$, 则积分方程组成为一维的:

$$n_1(k_{\perp}) = - \frac{e}{T} \int k'_{\perp} dk'_{\perp} C_l^{(e)}(k_{\perp}, k'_{\perp}) \varphi(k'_{\perp}) \\ - \frac{e}{T} \sum_n \int k'_{\perp} dk'_{\perp} \Gamma_n(\rho) \left\{ C_{n+l}(k_{\perp}, k'_{\perp}) - \frac{\rho^2}{4} k_{\perp} k'_{\perp} \cdot \frac{\Omega_0}{\omega} [C_{n+l+1}(k_{\perp}, k'_{\perp}) - C_{n+l-1}(k_{\perp}, k'_{\perp})] \right\} [\xi_0 Z(\xi_n) \cdot \varphi(k'_{\perp}) - (1 + \xi_n Z(\xi_n)) \phi(k'_{\perp})], \quad (31)$$

$$j_{1z}(k_{\perp}) = - \frac{e^2}{T} \sum_n \frac{\omega}{k_z} \int k'_{\perp} dk'_{\perp} \Gamma_n(\rho) \left\{ C_{n+l}(k_{\perp}, k'_{\perp}) - \frac{\rho^2}{4} k_{\perp} k'_{\perp} \frac{\Omega_0}{\omega} [C_{n+l+1}(k_{\perp}, k'_{\perp}) - C_{n+l-1}(k_{\perp}, k'_{\perp})] \right\} \cdot (1 + \xi_n Z(\xi_n)) \left[\varphi(k'_{\perp}) - \left(1 - \frac{n\Omega_0}{\omega} \right) \phi(k'_{\perp}) \right]. \quad (32)$$

其中

$$C_p(k_{\perp}, k'_{\perp}) \equiv \int_0^{\infty} n_0(r_c) J_p(k_{\perp} r_c) J_p(k'_{\perp} r_c) r_c dr_c. \quad (33)$$

对于指数型密度分布的静电模情形, 这里所得方程与我们在文献[2]中的方程一致. 本文将此结果推广到二维的和电磁模的一般情形. 由于采用了不同的方法, 计算比文献[2]简

单得多.

四、碰撞对时间回声的影响

回声现象是典型的与分布函数演变有关的非线性现象^[3,4]. 碰撞可以明显影响回声的强度与表现^[5,6]. 由于回声与分布函数细节有关, 碰撞模型不能过于粗略. 下面考虑一维电子等离子体(离子作为均匀背景)中时间回声问题. 模型碰撞项取为^[5]

$$\hat{C} = \nu \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\nu + \frac{T}{m} \frac{\partial}{\partial \nu} \right] f(\nu, x, t). \quad (34)$$

其中 ν 为常数. 此碰撞项使 f 趋于麦氏分布. $f(\nu, x, t)$ 满足的动力学方程为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eE}{m} \frac{\partial}{\partial \nu} \right] f = \nu \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\nu + \frac{T}{m} \frac{\partial}{\partial \nu} \right] f. \quad (35)$$

这是对 ν 的二阶微分方程, 求解较困难, 通常都是在小 ν 极限下对碰撞项作微扰处理的^[5,6]. 而若变到 K 空间, 则(35)式变为

$$(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)f(K, x, t) = 0. \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \nu K \right) \frac{\partial}{\partial K} + \nu \frac{T}{m} K^2, \\ \mathcal{L}_1 &\equiv i \frac{eE}{m} K. \end{aligned} \quad (37)$$

(36)式对 K 是一阶的, 对任意 ν 均可求解. 下面采用“轨道”积分法求解. 一般地, 对于方程

$$\mathcal{L}_0 f(K, k, t) = F(K, k, t),$$

其中 F 是某已知函数, 也即

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (-k + \nu K) \frac{\partial}{\partial K} + \nu \frac{T}{m} K^2 \right] f = F. \quad (38)$$

可先作变换, 令 $f = e^{\phi(K)} \hat{f}$, 适当选取 $\phi(K)$ 以消去(38)式左端的 $\nu \frac{T}{m} K^2$ 项. 即令

$$e^{\phi} = \left(K - \frac{k}{\nu} \right)^{-\frac{TK^2}{m\nu^2}} e^{-\frac{T}{m} \left[\frac{K^2}{2} + \frac{kK}{\nu} \right]}, \quad (39)$$

则由(38)式知 $\hat{f}$ 满足方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (-k + \nu K) \frac{\partial}{\partial K} \right] \hat{f} = e^{-\phi} F(K, k, t). \quad (40)$$

现在就可利用 K 的“轨道”积分求解了. 令

$$\dot{K} = -k + \nu K,$$

$$K(t) = K.$$

则

$$K(t') = \left(K - \frac{k}{\nu} \right) e^{-\nu(t-t')} + \frac{k}{\nu}. \quad (41)$$

对(40)式积分可得

$$f(K, k, t) = e^{\psi(K)} \int_{t_0}^t dt' e^{-\psi(K(t'))} F(K(t'), k, t'). \quad (42)$$

其中 e^{ψ} 由(39)式给出, $K(t')$ 由(41)式给出, t_0 时 $f = 0$.

下面具体讨论回声问题. 设 $t < t_1$ 时, 等离子体处于平衡分布

$$f_0 = n_0 e^{-\frac{v^2}{4} K^2}. \quad (43)$$

在 $t = t_1$ 时引入一外界脉冲扰动

$$\varphi_{ex1} = \varphi_{ex10} e^{ik_1 x} \delta(\omega_{pe}(t - t_1)). \quad (44)$$

本文只讨论 $k^2 \lambda_{De}^2 \gg 1$ 情形, 此时介电函数 $\epsilon \simeq 1$, $\varphi \simeq \varphi_{ex}$, 此情形下回声表达式最简单, 回声表现最明显(对于 $\epsilon \approx 1$ 的一般情形, 回声表达式很复杂, 不准备在本文讨论). 此外界扰动将引起等离子体分布的扰动 $f^{(1)}(K, k, t)$:

$$\mathcal{L}_0 f^{(1)}(K, k, t) = -\frac{en_0}{m} k_1 \varphi_{ex10} e^{ik_1 x} \delta(\omega_{pe}(t - t_1)) K e^{-\frac{T}{2m} K^2}. \quad (45)$$

由(42)式即可求出

$$\begin{aligned} f^{(1)}(K, k_1, t) = & -\frac{en_0}{m\omega_{pe}} k_1 \varphi_{ex10} e^{ik_1 x} \left[\left(K - \frac{k_1}{v} \right) e^{-v(t-t_1)} + \frac{k_1}{v} \right] \\ & \cdot \exp \left\{ \frac{T k_1}{m v} \left[\left(K - \frac{k_1}{v} \right) (e^{-v(t-t_1)} - 1) \right] - \frac{T}{2m} K^2 \right. \\ & \left. - \frac{T k_1^2}{m v} (t - t_1) \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

令 $K = 0$, 即得一级扰动密度

$$\begin{aligned} n_1(x, t) = & -\frac{en_0}{m\omega_{pe}} \varphi_{ex10} k_1 e^{ik_1 x} \frac{k_1}{v} (1 - e^{-v(t-t_1)}) \\ & \cdot \exp \left\{ -\frac{T k_1^2}{m v^2} [e^{-v(t-t_1)} - 1 + v(t-t_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

在小 v 极限下, 即令 $|v(t-t')| \ll 1$, 则可得到与文献[5]相应的结果

$$\begin{aligned} n_1(x, t) = & -\frac{en_0}{m\omega_{pe}} k_1^2 \varphi_{ex10} e^{ik_1 x} \left[(t - t_1) - \frac{v}{2} (t - t_1)^2 \right] \\ & \cdot \exp \left\{ -\frac{T k_1^2}{2m} \left[(t - t_1)^2 - \frac{v}{3} (t - t_1)^3 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

此式在 $v(t-t_1) \sim 1$ 时显然不适用, 而(47)式则对任意 v, t 均适用.

若在 $t = t_2 (> t_1)$ 时再引入一外界扰动:

$$\varphi_{ex2} = \varphi_{ex20} e^{ik_2 x} \delta(\omega_{pe}(t - t_2)). \quad (49)$$

二级回声正是 φ_2 与 $f^{(1)}$ 耦合产生的项, 此二级扰动分布 $f^{(2)}$ 满足方程:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 f^{(2)}(K, k, t) = & -\frac{e}{m} k_2 \varphi_{ex2} K f^{(1)} \\ = & -\frac{e^2 n_0}{m^2 \omega_{pe}} k_1 k_2 \varphi_{ex10} \varphi_{ex20} e^{i(k_1+k_2)x} \delta(\omega_{pe}(t - t_2)) \\ & \cdot K \left[\left(K - \frac{k_1}{v} \right) e^{-v(t-t_1)} + \frac{k_1}{v} \right] \exp \left\{ -\frac{T k_1^2}{m v^2} [v(t-t_1) \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(1 - K \frac{\nu}{k_1}\right) (e^{-\nu(t-t_1)} - 1) \Big] - \frac{T}{2m} K^2 \Big\}. \quad (50)$$

其中 $k = k_1 + k_2$.

用“轨道”积分法求解(50)式, 现 $\dot{K} = -k + \nu K$, 由于只需求出 $K(t) = 0$ 的 $f^{(2)}$ 值即够, 所以

$$K(t') = \frac{k}{\nu} (1 - e^{-\nu(t-t')}). \quad (51)$$

由(39), (42)及(51)式, 即可求出二级扰动密度为

$$\begin{aligned} n^{(2)}(x, t) = f^{(2)}(0, k, t) = & \frac{k_1 k_2}{4\pi m} \varphi_{ex10} \varphi_{ex20} \\ & \cdot e^{i(k_1+k_2)x} \frac{k^2}{\nu^2} (1 - e^{-\nu(t-t_2)}) \left[\frac{k_1}{k} + \frac{k_2}{k} e^{-\nu(t_2-t_1)} - e^{-\nu(t-t_1)} \right] \\ & \cdot \exp \left\{ -\frac{T k^2}{m \nu^2} \left[\frac{k_1 k_2}{k^2} (1 - e^{-\nu(t_2-t_1)}) \right. \right. \\ & + \frac{k_1^2}{k^2} \nu(t_2 - t_1) + \frac{k_1}{k} (e^{-\nu(t-t_1)} - 1) \\ & \left. \left. + \frac{k_2}{k} (e^{-\nu(t-t_2)} - 1) + \nu(t - t_2) \right] \right\}. \quad (52) \end{aligned}$$

其中 $k = k_1 + k_2$. 若以 λ_{De} 为长度单位, ω_{pe}^{-1} 为时间单位, 令 $t_2 = 0$, $t_2 - t_1 = \tau$, $b = -\frac{k_1}{k} = -\frac{k_1}{k_1 + k_2}$, 则(52)式可表为

$$n^{(2)}(x, t) = C e^{ikx} F_1(t) \exp \left\{ -\frac{k_1^2}{b^2} F_2(t) \right\}. \quad (53)$$

其中 C 是正比于 $\varphi_{ex10} \varphi_{ex20}$ 的常数,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{1}{\nu^2} (1 - e^{-\nu t}) [-b + (1+b)e^{-\nu \tau} - e^{-\nu(t+\tau)}], \\ F_2(t) &= \frac{1}{\nu^2} [-b(1+b)(1 - e^{-\nu \tau}) + b^2 \nu \tau + b(1 - e^{-\nu(t+\tau)}) \\ &\quad - (1+b)(1 - e^{-\nu t}) + \nu t]. \quad (54) \end{aligned}$$

易知, 只有 $b > 0$, 即 k_1 与 $(k_1 + k_2)$ 取号时才可能出现回声. 回声出现的时间和强弱主要地是由指数上的因子 $F_2(t)$ 所决定的, 故下面着重讨论 $F_2(t)$ 的行为.

图 1(a) 和 (b) 分别给出 $F_2(t)$ 及 $\exp \left\{ -\frac{k_1^2}{b^2} F_2(t) \right\}$ 随时间的变化. 可见, 当 ν 增加时, 回声出现的时间 t_* 提前了, 回声的峰值则下降.

其实, 回声出现的时间和强度主要地是由 $F_2(t)$ 的极值位置 t_* 和其极值 $F_{2*} = F_2(t_*)$ 所决定的. 由极值条件可以求出

$$\begin{aligned} t_* &= \frac{1}{\nu} \ln [1 + b(1 - e^{-\nu \tau})], \\ F_{2*} &= \frac{1}{\nu^2} \{-b(1+b)(1 - e^{-\nu \tau}) + b^2 \nu \tau + \ln [1 + b(1 - e^{-\nu \tau})]\}. \quad (55) \end{aligned}$$

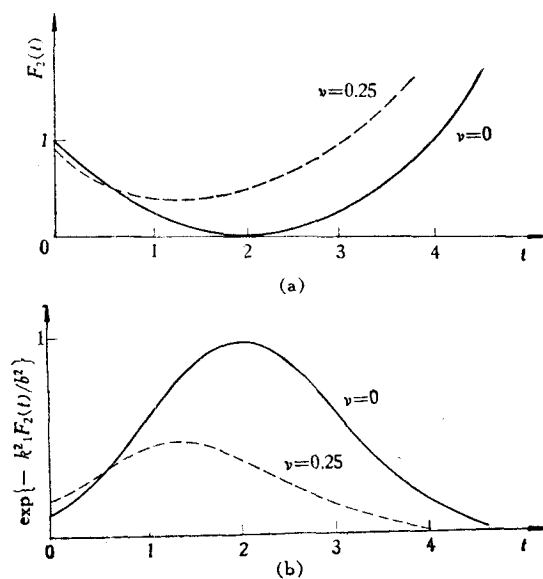


图 1

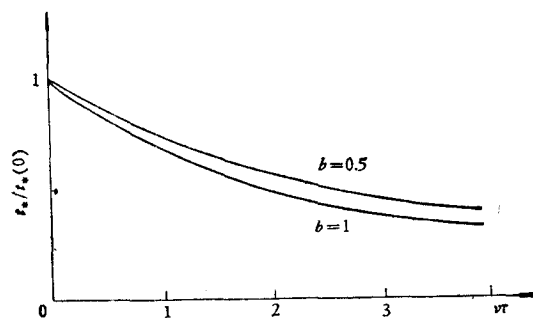


图 2

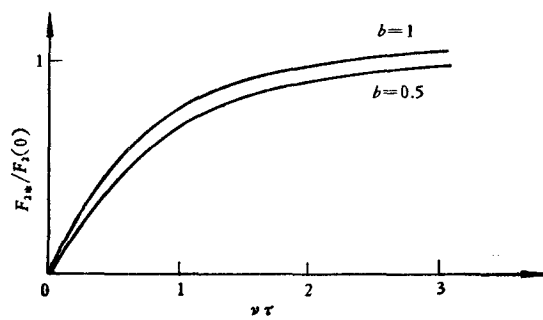


图 3

$\nu=0$ 时, $t_* = b\tau$, $F_{2*} = 0$. 若以约化量表示之, 则有

$$t_*/t_*(\nu=0) = \frac{1}{b\nu\tau} \ln[1 + b(1 - e^{-\nu\tau})]$$

$$F_{2*}/F_2(t=0) = 1 - \{b(1 - e^{-\nu\tau}) - \ln[1 + b(1 - e^{-\nu\tau})]\}/$$

$$/\{b^2(\nu\tau - 1 + e^{-\nu\tau})\}. \quad (56)$$

$t_*/t_*(v=0)$ 反映碰撞使回声提前出现的程度, 而 $F_{2*}/F_2(0)$ 则反映回声强度削弱的程度. 它们都是 b 和 $\nu\tau$ 的函数. 图 2 和图 3 分别给出它们随 $\nu\tau$ 的变化曲线. 在 $\nu\tau \simeq 0$ 附近的线性部分则相应于线性碰撞近似下的结果.

五、结 论

对于大多数有实际兴趣的等离子体动力学问题, 以方程 (3) 代替方程 (1), 直接求解 $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ (以替代求解 $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$) 是可行的一条途径, 而且是更为简捷的途径. 对于某些类型的模型碰撞项 (如 (34) 式), 由于方程形式的改变, 对计算有更大的便利. 目前对于 (3) 式的求解方法的研究还是初步的, 值得进一步探讨.

参 考 文 献

- [1] A. Lenard, J. B. Bernstein, *Phys. Rev.*, **112**(1958), 1456.
- [2] R. Marchang, C. F. Zhang, Y. C. Lee, *Phys. Fluids*, **26**(1983), 194.
- [3] T. M. O'Neil, R. W. Gould, *Phys. Fluids*, **11**(1968), 134.
- [4] T. Kamimura, A. Hasegawa, *Phys. Fluids*, **12**(1969), 1480.
- [5] C. H. Su, C. Oberman, *Phys. Rev. Lett.*, **20**(1968), 427.
- [6] T. M. O'Neil, *Phys. Fluids*, **11**(1968), 2420.

ANOTHER APPROACH OF TREATING KINETIC PROBLEM OF PLASMA

ZHANG CHENG-FU

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The traditional approach of treating kinetic problem of plasma is solving kinetic equation for $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$, then calculating the wanted macroscopic quantities by integration. It is shown that this is not a convenient and direct way. If transforming $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ in to the Fourier space $\mathbf{K}$, with respect to $\mathbf{v}$, getting $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ and corresponding equation of it, then only the value of $f(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ near $\mathbf{K} \simeq 0$ is need for practical interest. Two examples, one is the derivation of dispersion equations of electro-magnetic modes in a inhomogeneous low β plasma, the other is the effect of collision on the temporal echo, show the main procedures of this approach and its advantage over the traditional one.