

序参量-统计格林函数耦合方程组

苏肇冰 于 录 周光召

(中国科学院理论物理研究所)

1983年6月13日收到

提 要

本文建议一个自治求解量子统计系统中序参量和费密型元激发及序参量集体激发的能谱、耗散和准粒子分布的联立方程组,并给出系统的圈图展开方法.这一理论方法既适用于平衡态,也适用于非平衡态.

一、引 言

在文献[1]至[4]中,我们将闭路格林函数(以下简称CTPGF)和生成泛函技术结合起来,试图发展一种从统一观点出发,处理平衡和非平衡统计现象,能同时进行一般讨论和具体计算的序参量统计生成泛函理论.但是,文献[4]中建议的“有效作用量”方法有一个不足之处,就是在求得序参量有效作用量时已将与之耦合的费密子自由度路径积分完成,比较难进行费密子格林函数的重正化并讨论有关的效应.本文的主要目的是试图克服这一困难.我们将在文献[2]和[3]的基础上,把量子场论中cornwall-jackiw-tomboulis(以下简称CJT)的有关结果^[5]推广到闭路上,从而得到一个原则上可以逐级进行具体计算的关于求解序参量、费密型元激发及序参量集体激发相互耦合系统的普遍方案.

如所周知^[1,6],在近极点近似下,二阶CTPGF描写了相应元激发的能谱、耗散和分布函数.我们将定义在闭路上的序参量统计生成泛函表示成对序参量、费密子及序参量二阶CTPGF的明显展开式.对平衡态,它自治地包含了量子统计系统的涨落-耗散定理,给出序参量,特别是复合序参量与推迟格林函数的耦合,并提供实时空中的圈图展开方案.对非平衡态,这将是描述序参量与各种准粒子动态耦合的一种普遍理论形式.

二、对复合序参量的统计生成泛函描述

设复费密场为 $\phi_b(x)$, $\phi_b^+(x)$, $b=1, 2, \dots, n$, 玻色型复合序参量

$$Q_\alpha(x) \equiv Q_\alpha[\phi^+(x), \phi(x)] \quad \alpha=1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

通常, $Q_\alpha(x)$ 是 $\phi(x)$, $\phi^+(x)$ 的二次型. 按照文献[3]中的(2.37)式, 系统的CTPGF生成泛函为

$$Z_p[h; J^+, J] = \int_p [d\phi^+][d\phi] \exp[i(I_0[\phi^+, \phi] + I_{int}[\phi^+, \phi])]$$

$$+ W_p^N[\phi^+, \phi] + hQ[\phi^+, \phi] + J^+\phi + \phi^+J], \quad (2)$$

其中

$$I_0[\phi^+, \phi] = \phi^+ S_0^{-1} \phi \equiv \int_p d^4x d^4y \phi^+(x) S_0^{-1}(x-y) \phi(y) \quad (3)$$

是 ϕ 场作用量自由部分, $S_0^{-1}(x-y)$ 是定义在闭路上的费密场自由传播子之逆; $I_{\text{int}}[\phi^+, \phi]$ 是作用量的非线性部分, 通常是 4-费密子型的; $J_b(x)$, $J_b^+(x)$ 和 $h_a(x)$ 分别是 $\phi_b^+(x)$, $\phi_b(x)$ 和 $Q_a(x)$ 的生成外源

$$J^+\phi \equiv \int_p d^4x J^+(x) \phi(x) \quad \phi^+J \equiv \int_p d^4x \phi^+(x) J(x), \quad (4)$$

$$hQ \equiv hQ[\phi^+, \phi] \equiv \int_p d^4x h(x) Q[\phi^+(x), \phi(x)]; \quad (5)$$

$W_p^N[\phi^+, \phi]$ 是海森堡密度矩阵的贡献, 由文献[3]中的(2.14), (2.15)和(2.36)式所定义, 是 $\phi(x)$ 和 $\phi^+(x)$ 的泛函幂级数; $\int [d\phi^+][d\phi]$ 是对场量 $\phi^+(x)$, $\phi(x)$ 的泛函积分. 在(1)–(5)式及以后的运算中, 我们按矩阵运算规则, 省去下标 b, a 等. 同时, 以下标 p 表示沿闭路时空的运算或定义在闭路上的有关物理量. 此外, 我们取 $\hbar = 1$.

对于 $I_{\text{int}}[\phi^+, \phi]$ 是 4-费密型, 序参量是二次型的许多有物理意义的情形, 常可利用高斯型泛函积分技术(文献上称之为 hubbard-stratonovich 变换^[7], 以下简称 H-S 变换)把(2)式化为

$$Z_p[h; J^+, J] = \exp\left[\frac{i}{2} \hbar M_0 h\right] \tilde{Z}_p[h; J^+, J], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_p[h; J^+, J] = & \int_p [d\phi^+][d\phi][dQ] \exp[i(\tilde{I}_0[\phi^+, \phi] + \tilde{I}_0[Q] \\ & + \tilde{I}_{\text{int}}[\phi^+, \phi, Q] + W_p^N[\phi^+, \phi] + hQ + J^+\phi + \phi^+J)], \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\frac{1}{2} \hbar M_0 h \equiv \frac{1}{2} \int_p d^4x d^4y h(x) M_0(x, y) h(y), \quad (8)$$

$$\tilde{I}_0[Q] \equiv \frac{1}{2} \int_p d^4x d^4y Q(x) \Delta_0^{-1}(x, y) Q(y), \quad (9)$$

$$\tilde{I}_0[\phi^+, \phi] = I_0[\phi^+, \phi], \quad (10)$$

$\tilde{I}_{\text{int}}[\phi^+, \phi, Q]$ 是 ϕ^+ , ϕ 和 Q 三次幂以上的泛函多项式, 而

$$hQ \equiv \int_p d^4x h(x) Q(x). \quad (11)$$

(8)、(9)式中的 $M_0(x, y)$ 和 $\Delta_0^{-1}(x, y)$ 都是既与场量 $\phi^+(x)$, $\phi(x)$, $Q(x)$ 无关, 又与生成外源 $J(x)$, $J^+(x)$ 和 $h(x)$ 无关的两点函数. 从 H-S 变换看, (7)式中的 $Q(x)$ 只是一个需积分的辅助泛函宗量, 原则上不能与(1)式定义的序参量等同, 可以有一定任意性. 这就是某些作者采用 H-S 变换时所遇到的序参量定义的不确定性问题^[8]. 但是, 从生成泛函的角度看, 序参量 $Q[\phi^+, \phi]$ 的统计信息完全由 $Z_p[h; J^+J]$ 对 $h(x)$ 的泛函微商所描述. 所以, 只要附加条件

$$\left. \frac{\delta Z_p[h; J^+, J]}{\delta h(x)} \right|_{h=J^+=J=0} = \left. \frac{\delta \tilde{Z}_p[h; J^+, J]}{\delta h(x)} \right|_{h=J^+=J=0}. \quad (12)$$

就容易由(2)式导出(6)和(7)式. 并且, $M_0(x, y)$, $\Delta_0^{-1}(x, y)$ 和 $\tilde{I}_{\text{int}}[\phi^+, \phi, Q]$ 的具体形式都将通过 H-S 变换和条件(12)式由 $I_{\text{int}}[\phi^+, \phi]$ 和 $Q[\phi^+(x), \phi(x)]$ 中的有关参量所确定.

为阐明(6)和(7)式的含义,我们以窄能带迴游电子的 Hubbard 模型为例,写出各有关表达式,但略去推导过程. 这个系统的哈密顿量是^[8]

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \phi_b^+(\mathbf{x}) T_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \phi_b(\mathbf{y}) + U \sum_{\mathbf{x}} \phi_+^+(\mathbf{x}) \phi_+(\mathbf{x}) \phi_-^+(\mathbf{x}) \phi_-(\mathbf{x}), \quad (13)$$

其中 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 在离散格点上取值, b 是自旋下标; $T_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ 是紧束缚近似下的能量重迭积分, U 是 Hubbard 库仑作用能. 引入序参量

$$Q_0(\mathbf{x}) \equiv n(\mathbf{x}) = \sum_b \phi_b^+(\mathbf{x}) \phi_b(\mathbf{x}), \quad (14)$$

$$Q_i(\mathbf{x}) \equiv S_i(\mathbf{x}) = \phi^+(\mathbf{x}) \frac{\sigma_i}{2} \phi(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

其中 σ_i 是泡利矩阵, 以及与之对偶的外源 $h_0(\mathbf{x}, t)$ 及 $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$. 对应(2)式的原始生成泛函中各项的表达式为

$$I_0^H[\phi^+, \phi] = \int_t dt \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \phi^+(\mathbf{x}, t) \left(i \frac{\partial}{\partial t} \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} - T_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \right) \phi(\mathbf{y}, t), \quad (16)$$

$$I_{\text{int}}^H[\phi^+, \phi] = \int_p dt \sum_{\mathbf{x}} \left(-\frac{U}{4} \phi^+(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \phi^+(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{U}{3} \phi^+(\mathbf{x}, t) \frac{\sigma}{2} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \phi^+(\mathbf{x}, t) \frac{\sigma}{2} \phi(\mathbf{x}, t) \right), \quad (17)$$

$$hQ = \int_p dt \sum_{\mathbf{x}} \left(h_0(\mathbf{x}, t) \phi^+(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \phi^+(\mathbf{x}, t) \frac{\sigma}{2} \phi(\mathbf{x}, t) \right). \quad (18)$$

经过 H-S 变换,并要求满足条件(12)式,在与(6),(7)式对应的新的序参量生成泛函表达式中各相应项为

$$\frac{1}{2} h M_0 h = \frac{1}{2} \int_p dt \sum_{\mathbf{x}} \left(h_0(\mathbf{x}, t) \frac{2}{U} h_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{3}{2U} \right) \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (19)$$

$$\tilde{I}_0^H[n, \mathbf{S}] = \frac{1}{2} \int_p dt \sum_{\mathbf{x}} \left(n(\mathbf{x}, t) \frac{U}{2} n(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{2U}{3} \right) \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\text{int}}^H[\phi^+, \phi; n, \mathbf{S}] = & \int_p dt \sum_{\mathbf{x}} \left(-\frac{U}{2} \phi^+(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) n(\mathbf{x}, t) \right. \\ & \left. + \frac{2U}{3} \phi^+(\mathbf{x}, t) \frac{\sigma}{2} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

由(2),(6),(7)式看出,我们通过 H-S 变换及附加条件(12)式,将一个用有效作用量

$$I[\phi^+, \phi] = I_0[\phi^+, \phi] + I_{\text{int}}[\phi^+, \phi] + W_p^N[\phi^+, \phi] \quad (22)$$

描述的,具有复合序参量 $Q[\phi^+, \phi]$ 的原始费密系统,化为一个用有效作用量

$$\tilde{I}[\phi^+, \phi, Q] = \tilde{I}_0[\phi^+, \phi] + \tilde{I}_0[Q] + \tilde{I}_{\text{int}}[\phi^+, \phi, Q] + W_p^N[\phi^+, \phi] \quad (23)$$

描述的费密场 $\phi(x)$ -序参量 $Q(x)$ 耦合的等效系统. 这两者除序参量的二阶 CTPGF 按

$$\frac{1}{i} \frac{\delta \ln Z_p[h; J^+, J]}{\delta h(x) \delta h(y)} \Big|_{h=J^+=J=0} = M_0(x, y) + \frac{1}{i} \frac{\delta \ln \tilde{Z}_p[h; J^+, J]}{\delta h(x) \delta h(y)} \Big|_{h=J^+=J=0} \quad (24)$$

差一个已知的两点函数 $M_0(x, y)$ 外, 无论对费密场, 还是序参量, 都具有相同的统计格林函数. 这样, 就把求解原始系统的统计性质问题明确归结为求解后者的问题. 值得指出的是, 尽管序参量 $Q(x)$ 在等效系统 (23) 式是以“基本场量”形式出现在生成泛函 (7) 式中, 它的“自由传播子” $\Delta_0(x, y)$ 是由 $I_{\text{int}}[\phi^+, \phi]$ 和 $Q[\phi^+, \phi]$ 的函数形式决定的. 只要原始系统的费密子作用是瞬时的, $\Delta_0(x, y)$ 就不可能有时间传播效应. 序参量场的动力学性质是通过与费密场的相互作用才表现出来的. 因此, 它本质上是一种费密场的集体激发.

三、统计生成泛函和耦合方程组

这一节讨论费密场与玻色型序参量耦合的系统. 与上节不同, 这里的序参量不一定是费密场的复合量, 可以有自己的动力学传播和初始统计信息. 上节讨论的系统是这里的一个特例.

引入推广的 CTPGF 生成泛函

$$Z_p[h, J^+, J; M, K] = \int_p [d\phi^+][d\phi][dQ] \exp \left[i \left(I_0[\phi^+, \phi] + I_0[Q] + I_{\text{int}}[\phi^+, \phi, Q] + W_p^N[\phi^+, \phi, Q] + hQ + J^+\phi + \phi^+J + \frac{1}{2} QMQ + \phi^+K\phi \right) \right], \quad (25)$$

其中

$$I_0[\phi^+, \phi] = \int_p d^4x d^4y \phi^+(x) S_0^{-1}(x, y) \phi(y), \quad (26)$$

$$I_0[Q] = \frac{1}{2} \int_p d^4x d^4y Q(x) \Delta_0^{-1}(x, y) Q(y) \quad (27)$$

分别是 ϕ 场和 Q 场作用量的自由部分, $I_{\text{int}}[\phi^+, \phi, Q]$ 是相应场量的三次幂以上的泛函多项式. $J^+\phi$, ϕ^+J 和 hQ 分别由 (4) 和 (11) 式定义. $W_p^N[\phi^+, \phi, Q]$ 仍是密度矩阵的贡献, 由文献 [3] 中的 (2.14) 和 (2.15) 式定义, 可以包含关于 $Q(x)$ 场的统计信息. 此外, (25) 式中还引入了

$$\frac{1}{2} QMQ \equiv \frac{1}{2} \int_p d^4x d^4y Q(x) M(x, y) Q(y), \quad (28)$$

$$\phi^+K\phi \equiv \int_p d^4x d^4y \phi^+(x) K(x, y) \phi(y), \quad (29)$$

其中 $M(x, y)$ 和 $K(x, y)$ 是两点外源函数, 用来生成 Q 场与 ϕ 场的二阶 CTPGF.

引入相连 CTPGF 的生成泛函

$$W_p[h, J^+, J; M, K] \equiv \frac{1}{i} \ln Z_p[h, J^+, J; M, K], \quad (30)$$

并定义

$$\frac{\delta W_p}{\delta h(x)} = Q_c(x), \quad (31)$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta J^+(x)} = \phi_c(x), \quad (32)$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta J(x)} = -\phi_c^+(x), \quad (33)$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta M(y, x)} = \frac{1}{2} (Q_c(x) Q_c(y) + i\Delta(x, y)), \quad (34)$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta K(y, x)} = -(\phi_c(x) \phi_c^+(y) + iG(x, y)). \quad (35)$$

当相应的外源均为零时, $Q_c(x)$, $\phi_c(x)$ 和 $\phi_c^+(x)$ 分别是 $Q(x)$, $\phi(x)$ 和 $\phi^+(x)$ 的统计平均值, 而 $\Delta(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 则分别是 Q 场和 ϕ 场的二阶连接 CTPGF.

再对 W_p 作 Legendre 变换, 引入双粒子不可约(简称 2PI) 顶点统计生成泛函

$$\begin{aligned} \Gamma_p[Q_c, \phi_c^+, \phi_c; \Delta, G] = & W_p[h, J^+, J; M, K] - hQ_c - J^+\phi_c - \phi_c^+J \\ & - \frac{1}{2} \text{Tr} [M(Q_c Q_c + i\Delta)] + \text{Tr} [K(\phi_c \phi_c^+ + iG)], \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\frac{1}{2} \text{Tr} [M(Q_c Q_c + i\Delta)] \equiv \frac{1}{2} \int_p d^4x d^4y M(x, y) (Q_c(y) Q_c(x) + i\Delta(y, x)), \quad (37)$$

$$\text{Tr} [K(\phi_c \phi_c^+ + iG)] \equiv \int_p d^4x d^4y K(x, y) (\phi_c(y) \phi_c^+(x) + iG(y, x)). \quad (38)$$

利用(31)–(35)式, 容易由(36)式直接导出

$$\frac{\delta \Gamma_p}{\delta Q_c(x)} = -h(x) - \int_p d^4y M(x, y) Q_c(y), \quad (39)$$

$$\frac{\delta \Gamma_p}{\delta \phi_c^+(x)} = -J(x) - \int_p d^4y K(x, y) \phi_c(y), \quad (40)$$

$$\frac{\delta \Gamma_p}{\delta \phi_c(x)} = J^+(x) + \int_p d^4y \phi_c^+(y) K(y, x), \quad (41)$$

$$\frac{\delta \Gamma_p}{\delta \Delta(x, y)} = \frac{1}{2i} M(y, x), \quad (42)$$

$$\frac{\delta \Gamma_p}{\delta G(x, y)} = iK(y, x). \quad (43)$$

只要知道 Γ_p 的具体泛函形式, (39)–(43)式构成确定序参量 $Q_c(x)$, $\phi_c^+(x)$, $\phi_c(x)$ 及二阶 CTPGF $\Delta(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 的自洽方程组. 通常, 在费密子外源为零时不产生费密子凝聚的现象, 即 $J^+ = J = 0$ 时 $\phi_c = \phi_c^+ = 0$. 另一方面, (基本或复合的)玻色场的凝聚是由序参量 $Q_c(x)$ 描述的. 既然准粒子的能谱、耗散和粒子数分布是由二阶 CTPGF 决定的, (39)和(42), (43)式就是我们想要推导的自洽方程组, 七个方程, 七个未知函数. 如果略去耗散, 并对费密子取 Hartree 近似, 就是通常文献中讨论的 Bogoliubov-de Gennes 方程^[9]. 方程组 (39)–(43) 可看成它的推广. 现在剩下的问题是如何具体构造 Γ_p , 下一节中要建议一种求解 Γ_p 的系统圈图展开方法.

四、 Γ_p 的圈图展开

不失普遍性,下面将令 $J = J^+ = \phi_c = \phi_c^+ = 0$. 顶角泛函

$$\Gamma_p[Q_c(x), \Delta, G] \equiv \Gamma_p[Q_c(x), \phi_c^+(x), \phi(x); \Delta, G] \Big|_{\phi_c = \phi_c^+ = 0}. \quad (44)$$

对传播子 Δ 和 G 说是双粒子不可约的 (2PI). 如果把来自密度矩阵的 W_p^N 包括到有效作用量中

$$I_{\text{eff}}[\phi^+, \phi, Q] = I_0[\phi^+, \phi] + I_0[Q] + I_{\text{int}}[\phi^+, \phi, Q] + W_p^N[\phi^+, \phi, Q], \quad (45)$$

CTPGF 与通常量子场论中格林函数的差别就是时间轴的取法. CTPGF 中时间迴路由正支 $(-\infty, +\infty)$ 及负支 $(+\infty, -\infty)$ 组成的. 只要注意到时间轴的差别, 量子场论中 CJT^[5] 发展的顶角生成泛函圈图展开及其论证都可推广到闭路上. 这里直接写出结果 (明显包含 $\hbar$):

$$\begin{aligned} \Gamma_p[Q_c, \Delta, G] = & \bar{I}[Q_c] - \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \{ \ln [\bar{\Delta}_0^{-1} \Delta] - \bar{\Delta}_0^{-1} \Delta + 1 \} \\ & + i\hbar \text{Tr} \{ \ln [\bar{S}_0^{-1} G] - \bar{G}_0^{-1} G + 1 \} + \Gamma_{2p}[Q_c, \Delta, G], \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$\bar{I}[Q_c] \equiv I_{\text{eff}}[\phi^+, \phi, Q] \Big|_{\substack{\phi = \phi^+ = 0 \\ Q = Q_c}}, \quad (47)$$

$$\bar{\Delta}_0^{-1}(x, y) = \frac{\delta^2 I_{\text{eff}}}{\delta Q(x) \delta Q(y)} \Big|_{\phi = \phi^+ = Q = 0}, \quad (48)$$

$$\bar{S}_0^{-1}(x, y) = - \frac{\delta^2 I_{\text{eff}}}{\delta \phi^+(x) \delta \phi(y)} \Big|_{\phi = \phi^+ = Q = 0}, \quad (49)$$

$$\bar{G}_0^{-1}(x, y) = - \frac{\delta^2 I_{\text{eff}}}{\delta \phi^+(x) \delta \phi(y)} \Big|_{\substack{\phi = \phi^+ = 0 \\ Q = Q_c}}. \quad (50)$$

值得注意, $\bar{G}_0^{-1}$ 与 $\bar{S}_0^{-1}$ 不同, 它们之间的关系是

$$\bar{S}_0^{-1}(x, y) = \bar{G}_0^{-1}(x, y) \Big|_{Q_c = 0}. \quad (51)$$

为了构造 Γ_{2p} , 需将 I_{eff} 中场算符 $Q(x)$ 的原点移到 $Q_c(x)$ 处. Γ_{2p} 是以 I_{eff} 中场算符三次幂以上的项为顶角 (显含 $Q_c(x)$), 以 $\Delta(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 为内线的所有双粒子不可约真空图之和. (46) 式中 Tr , $\ln$. 等运算都是在泛函意义上进行的, 包含对重复下算的内部自由度及时空坐标求和.

费密子和玻色子的自能部分分别定义为

$$\Sigma(x, y) \equiv \frac{-i}{\hbar} \frac{\delta \Gamma_{2p}}{\delta G(y, x)}, \quad (52)$$

$$\Pi(x, y) \equiv \frac{2i}{\hbar} \frac{\delta \Gamma_{2p}}{\delta \Delta(y, x)}. \quad (53)$$

由方程 (39), (42) 及 (43), 并令各种外源为零, 可以导出序参量 $Q_c(x)$ 及二阶 CTPGF Δ 和 G 所满足的方程

$$\frac{\delta \Gamma_p}{\delta Q_c(x)} = \frac{\delta \bar{I}[Q_c]}{\delta Q_c(x)} + i\hbar \text{Tr} \left\{ \frac{\delta \bar{G}_0^{-1}}{\delta Q_c(x)} G \right\} + \frac{\delta \Gamma_{2p}}{\delta Q_c(x)} = 0, \quad (54)$$

$$\frac{2i}{\hbar} \frac{\delta \Gamma_p}{\delta \Delta(y, x)} = \Delta^{-1}(x, y) - \bar{\Delta}_0^{-1}(x, y) + \Pi(x, y) = 0, \quad (55)$$

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{\delta \Gamma_p}{\delta G(y, x)} = G^{-1}(x, y) - \bar{G}_0^{-1}(x, y) + \Sigma(x, y) = 0. \quad (56)$$

根据文献[1]—[4]中给出的规则, 由闭路回到通常的时间变量, 方程(54)–(56)就分别是确定序参量 $Q_c(x)$ 的含时间的 Ginzburg-Landau 方程以及推迟、超前格林函数方程和准粒子分布的输运方程. 序参量 $Q_c(x)$ 满足的方程可写成对称的形式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \xi_\sigma \frac{\delta \Gamma_p}{\delta Q_c(x_\sigma)} &= \frac{1}{2} \xi_\sigma \left\{ \frac{\delta \bar{I}[Q_c(x)]}{\delta Q_c(x_\sigma)} \right. \\ &\quad \left. - i\hbar \operatorname{Tr} \left[\frac{\delta \bar{G}_0^{-1}}{\delta Q_c(x_\sigma)} G \right] + \frac{\delta \Gamma_{2p}}{\delta Q_c(x_\sigma)} \right\}_{x_+ = x_-} = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

其中 $\sigma = \pm$ 是时间轴的下标, 且

$$\xi_\pm = 1. \quad (58)$$

推迟、超前和关联格林函数与二阶 CTPGF 的关系是^[1-4]:

$$A_r(x, y) = \frac{1}{2} \xi_\sigma \eta_\rho A(x_\sigma, y_\rho), \quad (59.1)$$

$$A_a(x, y) = \frac{1}{2} \eta_\sigma \xi_\rho A(x_\sigma, y_\rho), \quad (59.2)$$

$$A_c(x, y) = \frac{1}{2} \xi_\sigma \xi_\rho A(x_\sigma, y_\rho), \quad (59.3)$$

其中

$$\eta_\pm = \pm 1. \quad (60)$$

推迟格林函数所满足的方程可写成

$$\int d^4y [\Delta_{\sigma r}^{-1}(x, y) - \Pi_r(x, y)] \Delta_r(y, z) = \delta^4(x - z), \quad (61)$$

$$\int d^4y [G_{\sigma r}^{-1}(x, y) - \Sigma_r(x, y)] G_r(y, z) = \delta^4(x - z). \quad (62)$$

将(61), (62)式取厄密共轭, 就得到超前格林函数满足的方程. 关联函数所满足的方程与准粒子分布所满足的输运方程密切相关. 采用矩阵形式, 这些方程可写为

$$\Delta_c = -\Delta_r(\Delta_{0c}^{-1} - \Pi_c)\Delta_a, \quad (63)$$

$$G_c = -G_r(G_{0c}^{-1} - \Sigma_c)G_a. \quad (64)$$

文献[6]中曾给出, 如何由关联函数满足的方程推出准粒子的输运方程.

概括说来, 我们推导出了 $Q_c(x)$, Δ_r , Δ_a , Δ_c , G_r , G_a 和 G_c 等 7 个函数所满足的 7 个方程, 由这 7 个量我们可以求出序参量及相应准粒子的能谱、耗散及粒子数分布.

到现在为止, 我们还没有作什么近似. Γ_{2p} 的圈图展开实际上是对 Planck 常数 $\hbar$ 的幂级数展开^[5]. 对于能用准经典近似描述的系统, 只要取展开的前几项就够了. 如果完全忽略 Γ_{2p} , 得到的是平均场近似.

对于包括热平衡分布在内的大多数物理上有兴趣的情形, W_p^N 所体现的统计涨落具有高斯分布. 如文献[3]中所证明, 这些情形下的统计信息可通过涨落-耗散定理包含在传播子 S_0 与 Δ_0 之中. 这样, 与量子场论的类比就可以走得更远.

五、结 束 语

我们推导出了一组序参量与格林函数的耦合、自治方程组。理论框架本身是普遍的，也是实用的，它提供了一种系统地描述平衡态及非平衡态序参量与费密子和集体激发动态耦合的途径。顺便指出，理论形式之所以如此简单，部分地是由于引入了两点外源 $K(x, y)$ 和 $M(x, y)$ ，并对它们作了 Legendre 变换。

现在简要说明与以前几篇文章^[2-4]的联系。为区分起见，过去引入的量用“,”号标出。文献[2-4]中引入的序参量统计生成泛函 $Z'_p[h]$ 与本文中引入的 Z_p 的关系是

$$Z'_p[h] = Z_p[h, J^+, J, M, K] \big|_{J=J^+=M=K=0}. \quad (65)$$

容易证明，其它相应的生成泛函之间的关系是

$$W'_p[h] = W_p[h, J^+, J, M, K] \big|_{J=J^+=M=K=0}, \quad (66)$$

$$\Gamma'_p[Q_c] = \Gamma_p[Q_c, \Delta, G] \bigg|_{\frac{\delta \Gamma_p}{\delta \Delta} = \frac{\delta \Gamma_p}{\delta G} = 0}, \quad (67)$$

$$\frac{\delta \Gamma'_p[Q_c]}{\delta Q_c(x)} = \left[\frac{\delta \Gamma_p[Q_c, \Delta, G]}{\delta Q_c(x)} \bigg|_{\Delta, G} \right] \bigg|_{\frac{\delta \Gamma_p}{\delta \Delta} = \frac{\delta \Gamma_p}{\delta G} = 0}. \quad (68)$$

此外，文献[4]中曾引入了计算 Γ'_p 的有效作用量方法。如前面已经提到的，那种方法的不足之处是一开始就将费密子的泛函积分完成，很难讨论费密子的重正化效应。这里引入的方法克服了这一缺陷，费密子和集体激发是用同样方法处理的。

我们已经用这里发展的技术讨论了准一维的电声子耦合系统的量子涨落问题^[10]、淬火无序系统，特别是无穷长力程自旋玻璃模型的动力学行为^[11]，计算了 4-费密子相互作用系统的交换修正^[12]。看来，这种方法对于相当一大类多体问题，特别是序参量与准粒子的动态耦合很重要时，是有用的。

参 考 文 献

- [1] Guang-zhao Zhou, Zhao-bin Su, Bai-lin Hao, Lu Yu, *Phys. Rev. B*, **22**(1980), 3385.
- [2] Zhou Guang-zhao, Su Zhao-bin, Hao Bai-lin, Yu Lu, *Commun. in Theor. Phys.* (Beijing, China), **1**(1982), 295.
- [3] Zhou Guang-zhao, Su Zhao-bin, Hao Bai-lin, Yu Lu, *Commun. in Theor. Phys.* (Beijing, China), **1**(1982), 307.
- [4] Zhou Guang-zhao, Su Zhao-bin, Hao Bai-lin, Yu Lu, *Commun. in Theor. Phys.* (Beijing, China), **1**(1982), 389.
- [5] J. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis, *Phys. Rev. D*, **10**(1974), 2428.
- [6] 周光召、苏肇冰, 统计物理学进展, 第五章, 郝柏林、于渌等主编, 科学出版社, (1981).
- [7] J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.*, **3**(1959), 77;
R. L. Stratonovich, *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, **115**(1957), 1097.
- [8] 例如: J. Hubbard, *Phys. Rev. B*, **19**(1979), 2626.
- [9] C.-R. Hu, *Phys. Rev. B*, **21**(1980), 2775 及所引文献.
- [10] Su Zhao-bin, Wang Ya-xin and Yu Lu, 待发表.
- [11] Su Zhao-bin, Yu Lu and Zhou Guang-zhao, *Commun. in Theor. Phys.* (Beijing, China), **2**(1983), 1181, 1191.
- [12] 苏肇冰、于渌、周光召, 物理学报, 待发表.

ON A SET OF COUPLED EQUATIONS FOR THE ORDER PARAMETER -STATISTICAL GREEN'S FUNCTIONS

SU ZHAO-BIN YU LU ZHOU GUANG-ZHAO

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

A set of coupled equations for a quantum statistical system that determine self-consistently the order parameter, the energy spectrum, the dissipation and the distribution for both fermion field and collective excitation is suggested with a loop expansion formalism. They are applicable to non-equilibrium as well as equilibrium systems.