

λ 小的超导体临界温度理论 (I)

吴 杭 生 翁 征 宇

(中国科学技术大学物理系)

1983年8月12日收到

提 要

本文在 Einstein 谱情形, 从 Eliashberg 方程导出了一个超导临界温度公式。在 $\mu^* = 0$ 时, 把它和 Eliashberg 方程的数值解进行了比较。在 $\lambda < 1$ 区域, 它们符合得相当好。

一、引 言

在 Matsubara 表象中, 线性 Eliashberg 方程为^[1,2]

$$G_n \bar{\Delta}_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_{n-m} + \lambda_{n+m+1}) \bar{\Delta}_m - 2\mu^* \theta(j_c - n) \sum_{m=0}^{j_c} \bar{\Delta}_m, \quad (1)$$

其中

$$G_n = 2n + 1 + \lambda + 2 \sum_{l=1}^n \lambda_l; \quad (2)$$

$$\lambda_l = \lambda \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + l^2(2\pi T_c)^2}; \quad (3)$$

$g(\omega)$ 为归一的有效声子谱; ω_{ph} 为最大的声子频率; μ^* 为库仑赝势; j_c 为由下式定义的整数:

$$\omega_c < (2j_c + 1)\pi T_c < \omega_c + 2\pi T_c; \quad (4)$$

ω_c 为切断频率, $\theta(x)$ 为阶梯函数: 当 $x > 0$ 时, $\theta(x) = 1$; $x < 0$ 时, $\theta(x) = 0$ 。在 $\lambda > 1$ 区域, 可用较简单的数学方法, 从方程 (1) 导出一个 T_c 级数表示式^[3-8]。可是, 在 $\lambda < 1$ 区域, 尽管有很多作者努力(例见文献 [9-12]), 但由于数学困难, 都没有能从此方程推导出一个和数值解符合的 T_c 公式。有鉴于此, 作者之一及其合作者企图把方程 (1) 改写成另一种形式, 希望能由此可以找到解决这个问题的途径。

经过适当的变换后, 文献 [14-16] 的作者把方程 (1) 表述成如下的积分方程¹⁾:

$$\Delta(y) = \lambda [G(y|\Delta) - F(y|\Delta)] - \mu^* \sigma L(y), \quad (5)$$

其中 $\Delta(y)$ 为新定义的能隙函数,

$$\Delta(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Delta}_n \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) y \right]; \quad (6)$$

$G(y|\Delta)$ 和 $F(y|\Delta)$ 为 $\Delta(x)$ 的泛函, 分别定义为

1) 在文献 [16] 中, 取 $\sigma = 1$ 。可是, 文献 [16] 中已取 $\Delta(0) = 1$, 再取 $\sigma = 1$, 便不对了。

$$G(y|\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n+1} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\pi T_c} K\left(\frac{x}{2\pi T_c}\right) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \Delta(x); \quad (7)$$

$$F(y|\Delta) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi T_c} K\left(\frac{x}{2\pi T_c}\right) \Phi(x, y); \quad (8)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left\{ \int_0^{y+x} d\xi \Delta(\xi) - \int_0^{y-x} d\xi \Delta(\xi) \right\}; \quad (9)$$

$$K(\xi) = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \omega e^{-\xi\omega}; \quad (10)$$

又 $L(y)$ 和 σ 的定义为

$$L(y) = 2 \sum_{n=0}^{i_c} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n+1}; \quad (11)$$

$$\sigma = \sum_{n=0}^{i_c} \bar{\Delta}_n. \quad (12)$$

$K(x/2\pi T_c)$ 叫做谱函数. 它近似地随 $x/2\pi T_c$ 增大而指数减小. 根据这个性质, 文献 [14—16] 的作者推测, 当 T_c 充分低时, $K(x/2\pi T_c)$ 不为零的区域将足够地小, 以致可以把 (7) 和 (8) 式右端积分号下的函数 $\Delta(x)$ 和 $\Phi(x, y)$, 用它们在 $x=0$ 点的数值替代. 在做了这个近似后, 令方程 (5) 两端的 y 等于零, 并让

$$\Delta(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Delta}_n = 1, \quad (13)$$

得到一个确定 T_c 的方程. 由它可解析地导出如下的 T_c 公式:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_{\log} \cdot \left(\frac{\omega_{\log}}{\omega_c} \right)^{\frac{\mu^*}{\lambda - \mu^*}} \cdot e^{\frac{-1+\lambda}{\lambda - \mu^*}}, \quad (14)$$

其中 $\ln \gamma = C = 0.5772$ 为 Euler 常数. 文献 [14] 和 [15] 的作者认为, 在弱耦合极限下, 这个结果是对的.

为了检查 (14) 式和数值解符合的情况, 也为了探索从方程 (5) 导出更一般的 T_c 公式, 文献 [16] 的作者用连续替代法^[13], 求方程 (5) 的数值解. 具体的做法是: 把 T_c 和 μ^* 看成是给定的量, 而 $\Delta(y)$ 和 λ 是从 (5) 式算出的量. 把 (5) 式写成¹⁾

$$\Delta_j(y) = \lambda_j \{ G(y|\Delta_{j-1}) - F(y|\Delta_{j-1}) \} - \mu^* \sigma_{j-1} L(y), \quad (15)$$

其中

$$\Delta_j(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Delta}_n^{(j)} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]; \quad (16)$$

$$\sigma_j = \sum_{n=0}^{i_c} \bar{\Delta}_n^{(j)}. \quad (17)$$

先假设一个能隙函数 $\Delta_0(y)$. 把它代入 (15) 式的右端, 算出新的能隙函数 $\Delta_1(y)$; 再把

1) 在文献 [16] 中, 取 $\sigma = 1$. 在此近似下, (15) 式右边最后一项没有因子 σ_{j-1} .

$\Delta_1(y)$ 代入, 算出 $\Delta_2(y)$, 如此等等¹⁾. 在每次替代时, 均调节 λ_j , 使得到的能隙函数满足 (13) 式, 即

$$\Delta_i(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Delta}_n^{(i)} = 1. \quad (18)$$

因为 $\Delta(y)$ 是 y 的周期函数, 周期为 4π , 所以文献 [16] 的作者把初始能隙函数 $\Delta_1(y)$ 简单地假设为

$$\Delta_0(y) = \cos\left(\frac{1}{2}y\right). \quad (19)$$

取 Einstein 谱和 $\mu^* = 0$, 在 $0.036 \geq T_c/\omega_{\log} \geq 0.6 \times 10^{-3}$ (相当 $0.48 \geq \lambda \geq 2$) 区间内, 进行了数值计算²⁾. 结果表明, (14) 式给出的 T_c 值比数值解约大百分之三十.

文献 [16] 的作者从他们计算得到的数据发现, 在小 λ 区域, 以 $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ 为初始能隙函数 $\Delta_0(x)$, 只要做两次替代, 便可以得到相当准确的结果. 这个发现为我们指出了一条接近 (适用于 $\lambda < 4$ 区域的) 严格 T_c 公式的途径.

本文及文献 [20] 就是沿着这条途径, 解析地导出一个能和数值解吻合相当好的 T_c 公式. 由于数学较繁, 在这篇文章中, 把 $g(\omega)$ 取为 Einstein 谱:

$$g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0), \quad (20)$$

希望通过对这个简化情况讨论, 说明我们采用的计算方法和近似. 为了简化计算, 在本文中, 取

$$\omega_c = \omega_0. \quad (21)$$

文献 [20] 再对实际谱进行讨论.

二、基本方程

由于方程 (15) 的右边同时出现 $\Delta_{j-1}(x)$ 和 σ_{j-1} . 而后者不能简单地用 $\Delta_{j-1}(x)$ 表示出来, 所以在 $\mu^* \approx 0$ 时, 用 (15) 式作连续替代是不方便的. 克服这个困难的方法是重新回到 Matsubara 表象, 把 (15) 式用 $\bar{\Delta}_n^{(j)}$ 表示出来.

把 (16) 式代入 (15) 式, 利用 $\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$ 的正交性质, 不难证明

$$\bar{\Delta}_n^{(j)} = \lambda_j \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \bar{\Delta}_m^{(j-1)} - \mu^* \sigma_{j-1} \theta(j_c - n) \frac{2}{2n+1}, \quad (22)$$

其中

$$C_{nm} = \overset{0}{C}_{nm} - \delta_{nm}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \overset{0}{C}_{nm} = & \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n-m)^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n+m+1)^2} \right] \\ & + \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^n \frac{4l^2}{\eta^2 + 4l^2} \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (24)$$

1) 同上页 1)。

2) 由于某些技术原因, 文献 [16] 的作者对更小 λ 的计算, 没有能取得成功。

在导出 (24) 式过程中, 用到了 Einstein 谱 (20) 式. η 是个参量. 它的定义为

$$\eta = \frac{\omega_0}{\pi T_c}. \quad (25)$$

在小 λ 区域, $\eta \gg 1$. 在以后的计算中, 我们要经常用到这个性质. 把 (24) 式右端最后一项的求和用积分替代, 并让它们相等, 得到

$$\sum_{l=0}^n \frac{4l^2}{\eta^2 + 4l^2} = \left(n - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n}{\eta} \right). \quad (26)$$

用 Euler-Maclaurin 公式^[27]估算求和和积分之差, 可以证明, 当 $\eta \gg 1$ 时, 它是可以略去的. 因此,

$$\begin{aligned} C_{nm}^0 = & \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n-m)^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n+m+1)^2} \right] \\ & + \frac{2}{2n+1} \left(n - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n}{\eta} \right) \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (27)$$

把方程 (22) 两边对 n 求和, 并利用 (18) 式, 得到

$$1 = \lambda_j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \bar{\Delta}_m^{(j-1)} - \mu^* \sigma_{j-1} \ln(2\gamma\eta). \quad (28)$$

在导出此式时, 还用到了

$$\sum_{n=0}^{j_c} \frac{2}{2n+1} = \ln(2\gamma\eta).$$

(22) 式是进行连续替代的基本方程. 在每次替代时, 均调节 λ_j 使满足 (28) 式. 比较 (19) 和 (16) 两式, 易见

$$\bar{\Delta}_n^{(0)} = \delta_{n0}. \quad (29)$$

和文献 [16] 一样, 把 T_c 和 μ^* 看成是已知量, 用连续替代法从方程 (22) 和 (28) 算出 $\bar{\Delta}_n^{(j)}$ 和 λ_j , 进而求出 $\bar{\Delta}_n$ 和 λ :

$$\bar{\Delta}_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_n^{(j)}; \quad (30)$$

$$\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j. \quad (31)$$

正如第一节所提及的, 以 (29) 式所示的 $\bar{\Delta}_n^{(0)}$ 为初始能隙函数, 进行替代, 得到的序列 $\{\bar{\Delta}_n^{(j)}\}$ 和 $\{\lambda_j\}$ 很快地收敛到 $\bar{\Delta}_n$ 和 λ .

三、一次替代

把 (29) 式代入 (17) 式, 得知

$$\sigma_0 = \sum_{m=0}^{j_c} \bar{\Delta}_m^{(0)} = 1. \quad (32)$$

因此, 取 $j = 1$, 方程 (22) 和 (28) 为

$$\bar{\Delta}_n^{(1)} = \lambda_1 C_{n0} - \mu^* \frac{2}{2n+1} \theta(j_c - n); \quad (33)$$

$$1 + \lambda_1 = \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{n0} - \mu^* \ln(2\gamma\eta). \quad (34)$$

定义

$$\Gamma_m = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm}. \quad (35)$$

在附录一中证明, 当 $\eta \gg 1$ 时

$$\begin{aligned} \Gamma_m = & \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \ln(2\gamma\eta) + \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{4m^2}{\eta^2}\right) \\ & + \frac{2m+1}{(2m+1)^2 + \eta^2} \eta \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta} + \frac{2}{2m+1} \left(m - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

在略去 $o(1/\eta^2)$ 的小项后, 求得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{n0} = \Gamma_0 = \ln(2\gamma\eta). \quad (37)$$

把它代入 (34) 式, 立刻得到

$$1 + \lambda_1 = (\lambda_1 - \mu^*) \ln(2\gamma\eta) \quad (38)$$

或写成

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_0 e^{-\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1 - \mu^*}}. \quad (39)$$

它正是文献 [14] 和 [15] 获得的结果¹⁾.

四、二次替代

取 $j = 2$, 并利用 (33), (32), (37) 和 (23) 式, 从方程 (22) 和 (28) 得到

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_n^{(2)} = & \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} C_{m0} \\ & - \lambda_2 \mu^* \sum_{m=0}^{j_c} C_{nm} \frac{2}{2m+1} - \mu^* \frac{2}{2n+1} \sigma_1 \theta(j_c - n); \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} 1 = & \lambda_1 \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{m0} - 2\lambda_1 \lambda_2 \ln(2\gamma\eta) + \lambda_1 \lambda_2 \\ & - \lambda_2 \mu^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j_c} \overset{0}{C}_{nm} \frac{2}{2m+1} + \lambda_2 \mu^* \ln(2\gamma\eta) - \mu^* \sigma_1 \ln(2\gamma\eta). \end{aligned} \quad (41)$$

在附录二—四中证明, 当 $\eta \gg 1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{m0} = \left[\ln(2\gamma\eta) - \frac{1}{2} \right] \ln(2\gamma\eta) + 0.7618; \quad (42)$$

1) 如果不取 $\omega_0 = \omega_c$, 则 (38) 式应改为

$$1 + \lambda_1 = (\lambda_1 - \mu^*) \ln(2\gamma\eta) - \mu^* \ln(\omega_c/\omega_0),$$

(39) 式改为 (14) 式.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{i_c} \overset{0}{C}_{nm} \frac{2}{2m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{m0} + 0.1534 \ln(2r\eta) - 0.1758; \quad (43)$$

$$\sigma_1 = 1 - 0.3466\lambda_1. \quad (44)$$

把(42)和(43)式代入(41)式,并利用(38)式进行适当地化简,可以证明

$$\begin{aligned} \lambda_2 \left[\ln(2r\eta) - \frac{1}{2} \right] &= 1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda_1 - 0.7618 \lambda_2 (\lambda_1 - \mu^*) \\ &\quad + \lambda_2 \mu^* [0.1534 \ln(2r\eta) - 0.1758] + \mu^* \sigma_1 \ln(2r\eta). \end{aligned} \quad (45)$$

再利用(44)和(38)式,经过适当并项后,从上式得到

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \mu^*) \ln(2r\eta) &= 1 + \lambda_2 + \lambda_2 \left[\frac{1}{2} - 0.2618 \lambda_1 \right. \\ &\quad \left. + (0.1534 \ln(2r\eta) + 0.5860) \mu^* \right] - \delta \sigma_1 \mu^* \ln(2r\eta), \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$\delta \sigma_1 = 0.3466 \lambda_1. \quad (47)$$

五、三次替代

在方程(28)中,取 $j=3$, 并计及(23)式和规一条件 $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Delta}_n^{(2)} = 1$, 易证

$$1 + \lambda_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm} \bar{\Delta}_n^{(2)} - \mu^* \sigma_2 \ln(2r\eta). \quad (48)$$

把(40)式代入,得到

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_3 &= \lambda_3 \lambda_2 \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{ml} \overset{0}{C}_{l0} - 2 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{m0} \\ &\quad + \lambda_3 \lambda_2 \lambda_1 \ln(2r\eta) - \lambda_3 \lambda_2 \mu^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{i_c} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{ml} \frac{2}{2l+1} \\ &\quad + \lambda_3 \lambda_2 \mu^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{i_c} \overset{0}{C}_{nm} \frac{2}{2m+1} - \lambda_3 \mu^* \sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{i_c} \overset{0}{C}_{nm} \frac{2}{2m+1} \\ &\quad - \mu^* \sigma_2 \ln(2r\eta). \end{aligned} \quad (49)$$

用附录一—四的方法,经过较长的计算后,可以证明,当 $\eta \gg 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{ml} \overset{0}{C}_{l0} &= \left\{ \left[\ln(2r\eta) - \frac{1}{2} \right] \ln(2r\eta) + 0.7618 \right\} \left[\ln(2r\eta) - \frac{1}{2} \right] \\ &\quad + \alpha_1 \ln(2r\eta) + \alpha_2; \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{i_c} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{ml} \frac{2}{2l+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \overset{0}{C}_{nm} \overset{0}{C}_{ml} \overset{0}{C}_{l0} \\ &\quad + r_2^* [\ln(2r\eta)]^2 + r_1^* \ln(2r\eta) + r_0^*; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\sigma_2 = 1 + \lambda_1 \lambda_2 [\alpha_2^* \ln(2\gamma\eta) + \alpha_1^*] + \lambda_2 \mu^* \sigma_1 [\beta_2^* \ln(2\gamma\eta) + \beta_1^*], \quad (52)$$

其中

$$\alpha_1 = \int_0^\infty dx \frac{1}{x(1+x^2)} [T(x) - x^2 S(x)] - \frac{1}{4} = 0.3584; \quad (53)$$

$$\alpha_2 = \int_0^\infty dx \frac{T(x)}{x} \left\{ S(x) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \right\} = 0.5593; \quad (54)$$

$$\gamma_2^* = \frac{1}{2} (1 - \ln 2) = 0.1534; \quad (55)$$

$$\gamma_1^* = -\frac{1}{4} (1 - \ln 2) - \alpha_1 + \int_0^\infty dx \frac{F(x)}{x(1+x^2)} = -0.08982; \quad (56)$$

$$\gamma_0^* = 0.3809 - \alpha_2 - \frac{\ln 2}{2} \int_0^\infty dx \frac{F(x)}{x(1+x^2)} [1 + (1+x^2)T(x)] = -0.08453; \quad (57)$$

$$\alpha_1^* = \frac{5}{4} \ln 2 - \int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^2} Q(x) - \frac{3\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} = 0.4499; \quad (58)$$

$$\alpha_2^* = -\beta_2^* = -\frac{1}{2} \ln 2 = -0.3466; \quad (59)$$

$$\beta_1^* = -\left(\frac{1}{2} \ln 2\right)^2 + \int_0^1 dx Q(x) = 0.07223. \quad (60)$$

在以上诸式中, 函数 $T(x)$, $S(x)$, $Q(x)$ 和 $F(x)$ 的定义为

$$T(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} \ln(1+x^2) + \frac{x}{1+x^2} \operatorname{tg}^{-1} x + \frac{1}{x} (x - \operatorname{tg}^{-1} x); \quad (61)$$

$$S(x) = \frac{3}{(1+x^2)(4+x^2)} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{x^2-2}{x(1+x^2)(4+x^2)} \operatorname{tg}^{-1} x \\ + \frac{1}{x(1+x^2)} (x - \operatorname{tg}^{-1} x); \quad (62)$$

$$Q(x) = \frac{1}{4x(1+x^2)} \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{4} x^4\right) + 2x (\operatorname{tg}^{-1}(1+x) - \operatorname{tg}^{-1}(1-x)) \right\}; \quad (63)$$

$$F(x) = T(x) - xQ(x) - \frac{1}{x} (x - \operatorname{tg}^{-1} x) \theta(x-1). \quad (64)$$

把 (42), (43), (50) 和 (51) 式代入 (49) 式, 并利用 (38) 和 (45) 式化简, 经过适当的并项和整理后, 得到

$$(\lambda_3 - \mu^*) \ln(2\gamma\eta) = 1 + \lambda_3 + \frac{1}{2} \lambda_3 - 0.3584 \lambda_3 \lambda_2 + 0.1059 \lambda_3 \lambda_1 \\ + \left\{ 0.009311 \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1 - \mu^*} - 0.1991 \right\} \lambda_3 \lambda_2 \mu^* \\ + \left\{ 0.1534 \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1 - \mu^*} + 0.5860 \right\} \lambda_3 \mu^* \sigma_1 \\ - \mu^* \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1 - \mu^*} \delta \sigma_2, \quad (65)$$

其中

$$\delta \sigma_2 = \lambda_2 (0.3466 - 0.1034 \lambda_1 + 0.07224 \mu^*). \quad (66)$$

六、 T_c 公 式

在前面已一再提到,在小 λ 区域,以 $\Delta_n^{(0)} = \delta_{n0}$ 为初始能隙函数,只要把方程 (22) 作两次替代,便可得到相当准确的结果. 由于这个原因,令

$$\lambda_3 = \lambda. \quad (67)$$

现在的问题只是如何从 (38), (46) 和 (65) 三式中,解出 $T_c = T_c(\lambda, \mu^*)$.

先把 (65) 式写成如下形式:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_0 e^{-\frac{1+\lambda(1+\delta)}{\lambda-\mu^*}}, \quad (68)$$

其中 δ 为 λ_1, λ_2 和 μ^* 的函数, 定义为

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{1}{2} - 0.3584\lambda_2 + 0.1059\lambda_1\lambda_2 + \left[0.009311 \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\mu^*} - 0.1991 \right] \lambda_2\mu^* \\ & + \left[0.1534 \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\mu^*} + 0.5860 \right] \mu^*\sigma_1 - \mu^* \frac{\delta\sigma_2}{\lambda} \cdot \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\mu^*}. \end{aligned} \quad (69)$$

再把 (38) 和 (46) 式写成

$$\lambda_1 = \frac{1 + \mu^* \ln \left(\frac{2\gamma\omega_0}{\pi T_c} \right)}{\ln \left(\frac{2\gamma\omega_0}{\pi T_c} \right) - 1}; \quad (70)$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + \mu^*(1 - 0.3466\lambda_1) \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1 - \mu^*}}{(1 - 0.1534\mu^*) \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1 - \mu^*} - 1.5 + 0.2618\lambda_1 - 0.5860\mu^*}. \quad (71)$$

照理讲,应把 (70) 和 (71) 式代入 (68) 式,消去 λ_1 和 λ_2 ,再从中解出 $T_c = T_c(\lambda, \mu^*)$. 但实际上,这是行不通的. 因为这样做,将导致一个复杂的方程,很难从中把 T_c 解出来. 简单的处理方法是: 把 (68) 式就看成是 T_c 公式. 只不过其中的 δ 除了依赖 λ 和 μ^* 外,还依赖参量 λ_1 和 λ_2 ,因而需要补充以 (70) 和 (71) 两式.

给定 λ 和 μ^* ,可按如下步骤算出 T_c : 1) 令 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. 从 (68) 和 (69) 式算出 T_c . 2) 把它代入 (70) 式算出 λ_1 . 接着把 λ_1 代入 (71) 式算出 λ_2 . 3) 再把 $\lambda, \mu^*, \lambda_1$ 和 λ_2 代入 (68) 和 (69) 式,算出 T_c . 4) 重复步骤 (2) 和 (3) 式,直到相邻两次算出的 T_c, λ_1 和 λ_2 相差小于 10^{-4} . 借助带有程序的计算器,可以很方便地完成这个计算. 实际计算表明,在 λ 小时,上述步骤只要重复二、三次便够了.

表 1 列出 $\mu^* = 0$ 和 0.1 时,从 (68)–(71) 式算出的结果,其中 $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda$. 表中带星号的是指 $\lambda = \Lambda$ 时,各量的数据. Λ 是按下式计算的^[4-6]:

$$\Lambda = 0.65(1 + 3\mu^*). \quad (72)$$

表 1 中的数据表明,当 $\lambda < \Lambda$ 时, $\Delta\lambda/\lambda$ 是很小的. 即使当 $\mu^* = 0.1$, λ 大到 $\Lambda = 0.845$ 时, $\Delta\lambda/\lambda$ 才不过 7%. 这再次证实了我们一再提及的事实: 在小 λ 区域,以 $\Delta_n^{(0)} = \delta_{n0}$ 为初始替代能隙函数,将方程 (22) 式进行替代,收敛是很快.

表 1

$\mu^* = 0$					$\mu^* = 0.1$				
λ	T_c/ω_0	λ_1	λ_2	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$	λ	T_c/ω_0	λ_1	λ_2	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$
0.01	9.4×10^{-45}	0.00995	0.01000	1×10^{-5}	0.2	4.2×10^{-6}	0.1957	0.2005	2.5×10^{-3}
0.05	5.0×10^{-10}	0.04882	0.05001	2×10^{-4}	0.25	1.6×10^{-4}	0.2404	0.2513	5.2×10^{-3}
0.1	1.2×10^{-5}	0.09556	0.1001	1×10^{-3}	0.3	1.058×10^{-3}	0.2841	0.3025	8.3×10^{-3}
0.2	1.825×10^{-3}	0.1841	0.2007	3.5×10^{-3}	0.4	6.960×10^{-3}	0.3687	0.4065	1.6×10^{-2}
0.3	9.974×10^{-3}	0.2678	0.3027	9×10^{-3}	0.5	1.821×10^{-2}	0.4513	0.5132	2.6×10^{-2}
0.4	2.367×10^{-2}	0.3485	0.4064	1.6×10^{-2}	0.6	3.289×10^{-2}	0.5330	0.6235	3.9×10^{-2}
0.5	4.020×10^{-2}	0.4274	0.5124	2.5×10^{-2}	0.7	4.929×10^{-2}	0.6151	0.7377	5.4×10^{-2}
*0.65	$*6.658 \times 10^{-2}$	*0.5450	*0.6767	$*4.1 \times 10^{-2}$	0.8	6.636×10^{-2}	0.6984	0.8564	7.0×10^{-2}
0.8	9.254×10^{-2}	0.6641	0.8477	6.0×10^{-2}	*0.845	* 7.409×10^{-2}	*0.7366	*0.9112	* 7.8×10^{-2}
1.0	0.1247	0.8285	1.082	8.2×10^{-2}	1.0	0.1003	0.8720	1.106	1.1×10^{-1}
2.0	0.2184	1.545	1.813	-9×10^{-2}	2.0	0.2065	1.665	1.935	-3×10^{-2}
2.9	0.2412	1.939	1.904	-3×10^{-1}	2.9	0.2341	2.005	2.018	-3×10^{-1}

表 2

λ	T_c/ω_0			
	数 值 解	本文的 T_c 公式	McMillan T_c 公式	本文 T_c 公式 (但 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)
0.3268	0.01313	0.01322	0.01011	0.01319
0.3333	0.01397	0.01406	0.01076	0.01402
0.3839	0.021	0.02120	0.01623	0.02112
0.3883	0.02165	0.02187	0.01674	0.02179
0.3975	0.02303	0.02328	0.01781	0.02318
0.4773	0.03570	0.03630	0.02758	0.03606
0.4790	0.036	0.03660	0.02780	0.03634
0.4912	0.03798	0.03868	0.02934	0.03840
0.6175	0.05886	0.06084	0.04524	0.06003
0.6406	0.06262	0.06492	0.04807	0.06397
0.8682	0.09705	0.1038	0.07358	0.1008
1.376	0.1570	0.1739	0.1145	0.1639
2.022	0.2135	0.2194	0.1457	0.2066

在 $\mu^* = 0$ 时, 用反迭代程序^[19]从 Eliashberg 方程 (1) 数值计算出 T_c . 在表 2 中, 把它们和从 T_c 公式 (68)–(71) 算得的结果进行比较. 在 $\lambda < \Lambda$ 区域, 两者符合是相当好的. 在同表中, 还列出了根据 McMillan T_c 公式^[13]算出的 $T_c/\omega_0 = T_c M/\omega_0$ 值, 以资比较.

注意到, 取 $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$, 本文 T_c 公式简化为 (68) 和 (69) 式. 具体计算表明, 只要 λ 不是十分地接近 μ^* , 但小于 Λ 时, 这个简化引起 T_c 的改变实际上是可以略去的 (例见表 2 的第三行和最末一行数据).

从本文的 T_c 公式可以看出, 即使在弱耦合极限, 文献 [14] 和 [15] 导出的 T_c 公式 (14) 也是不正确的. 尽管这样, 它仍然以第一次替代的结果很自然地出现在本文理论中.

附 录 一

证 明 (36) 式

把 (27) 式代入 (35) 式, 得到

$$\Gamma_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n-m)^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n+m+1)^2} \right\} + \frac{2}{2m+1} \left(m - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta} \right). \quad (\text{A.1})$$

易证, Γ_m 右边第一项可以表示为

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n-m)^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n+m+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 2a \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2n+1} \right. \\ &\quad + b \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{(2n+1) - (2m+1) + i\eta} + \frac{1}{(2n+1) + (2m+1) - i\eta} \right] \\ &\quad \left. + b^* \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{(2n+1) - (2m+1) - i\eta} + \frac{1}{(2n+1) + (2m+1) + i\eta} \right] \right\}, \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

其中

$$a = \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2}; \quad (\text{A.3})$$

$$b = b' + ib'', \quad b^* = b' - ib''; \quad (\text{A.4})$$

$$b' = -\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2}; \quad (\text{A.5})$$

$$b'' = \frac{\eta}{2} \frac{2m+1}{\eta^2 + (2m+1)^2}. \quad (\text{A.6})$$

(A.2) 式右边的求和可用 Digamma 函数 $\psi(x)$ ^[17] 表示出来:

$$\begin{aligned} S_m &= -a\psi\left(\frac{1}{2}\right) - b' \operatorname{Re} \left\{ \psi\left(1 + m - \frac{1}{2}i\eta\right) + \psi\left(-m + \frac{1}{2}i\eta\right) \right\} \\ &\quad + b'' \operatorname{Im} \left\{ \psi\left(1 + m - \frac{1}{2}i\eta\right) + \psi\left(-m + \frac{1}{2}i\eta\right) \right\}. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

再利用 Digamma 函数性质^[18], 把上式加以简化, 得到

$$\begin{aligned} S_m &= -a\psi\left(\frac{1}{2}\right) - 2b' \sum_{l=1}^m \frac{l}{l^2 + \frac{1}{4}\eta^2} - 2b' \operatorname{Re} \psi\left(1 - \frac{1}{2}i\eta\right) \\ &\quad + 2b'' \sum_{l=1}^m \frac{\frac{1}{2}\eta}{l^2 + \frac{1}{4}\eta^2} + \frac{2b''}{\eta}. \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

注意到, 当 $\eta \gg 1$ 时, $\operatorname{Re} \phi \left(1 - \frac{1}{2} i\eta\right) = \ln(\eta/2) + o(1/\eta^2)$. 把 (A.3)–(A.6) 式代入 (A.8) 式, 略去 $o(1/\eta^2)$ 的小项, 得到

$$S_m = \left[-\phi\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\eta\right) \right] \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \sum_{l=1}^m \frac{l}{l^2 + \frac{1}{4}\eta^2} \\ + \frac{2m+1}{\eta^2 + (2m+1)^2} \sum_{l=1}^m \frac{\frac{1}{2}\eta}{l^2 + \frac{1}{4}\eta^2}. \quad (\text{A.9})$$

用 Euler-Maclaurin 公式^[17]处理此式右端两个求和, 可以证明, 当 $\eta \gg 1$ 时,

$$S_m = \left[-\phi\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\eta\right) \right] \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{4m^2}{\eta^2}\right) \\ + \frac{2m+1}{\eta^2 + (2m+1)^2} \cdot \eta \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta}. \quad (\text{A.10})$$

把它代入 (A.1) 式, 并注意到 $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(4\gamma)$, 立刻得到 (36) 式.

附 录 二

证 明 (42) 式

计及 (35) 和 (36) 式, (42) 式的左端可表示成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{\circ}{C}_{nm} \overset{\circ}{C}_{m0} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{r}_m \overset{\circ}{C}_{m0} \\ = \ln(2\gamma\eta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \overset{\circ}{C}_{m0} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{4m^2}{\eta^2}\right) \overset{\circ}{C}_{m0} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 + \eta^2} \eta \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2m}{\eta}\right) \overset{\circ}{C}_{m0} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} \left(m - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta}\right) \overset{\circ}{C}_{m0}. \quad (\text{A.11})$$

定义

$$\frac{2}{2n+1} \tilde{r}_n = \sum_{m=0}^{\infty} \overset{\circ}{C}_{nm} \frac{2}{2m+1} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2}. \quad (\text{A.12})$$

用附录一的方法不难证明, 当 $\eta \gg 1$ 时,

$$\tilde{r}_n = \left[\ln(2\gamma\eta) - \frac{1}{2} \right] \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2n+1)^2} + \frac{3\eta^2(2n+1)^2}{2[(2n+1)^2 + \eta^2][(2n+1)^2 + 4\eta^2]} \\ - 2 \frac{\eta^2[(2n+1)^2 - 2\eta^2]}{(2n+1)[(2n+1)^2 + \eta^2][(2n+1)^2 + 4\eta^2]} \left(n - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n}{\eta}\right) \\ + \frac{3\eta^4}{[(2n+1)^2 + \eta^2][(2n+1)^2 + 4\eta^2]} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{4n^2}{\eta^2}\right) \\ + \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2n+1)^2} \left(n - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n}{\eta}\right). \quad (\text{A.13})$$

因为 $\overset{\circ}{C}_{m0} = \overset{\circ}{C}_{0m} \frac{1}{2m+1}$, 所以

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \overset{\circ}{C}_{m0} = \tilde{r}_0. \quad (\text{A.14})$$

把 (A.13) 式代入, 在略去 $o(1/\eta^2)$ 的小量后, 得到

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \overset{\circ}{C}_{m0} = \ln(2\gamma\eta) - \frac{1}{2}. \quad (\text{A.15})$$

再来计算 (A.11) 式右端第二项。用 Euler-Maclaurin 公式可以证明, 当 $\eta \gg 1$ 时, 求和可用积分替代。作变量变换, 并略去 $o(1/\eta^2)$ 小项, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4m^2}{\eta^2} \right) \bar{C}_{m0} \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz \frac{1}{z(z^2+1)^2} \ln(1+z^2) = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

用同样方法来处理 (A.11) 式右边最后两项, 可证, 当 $\eta \gg 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 + \eta^2} \eta \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2m}{\eta} \right) \bar{C}_{m0} \\ = \int_0^{\infty} dz \frac{1}{(z^2+1)^2} \operatorname{tg}^{-1} z = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}; \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} \left(m - \frac{1}{2} \eta \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta} \right) \bar{C}_{m0} \\ = \int_0^{\infty} dz \frac{1}{z^2(z^2+1)^2} (z - \operatorname{tg}^{-1} z) = \frac{\pi^2}{8} - 1. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

把 (A.15)–(A.18) 式代入 (A.11) 式, 便得到 (42) 式.

附 录 三

证 明 (43) 式

易见, 当 $\eta \gg 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{i_c} \bar{C}_{nm} \frac{2}{2m+1} &= \sum_{m=0}^{i_c} r_m \frac{2}{2m+1} = \ln(2r\eta) \sum_{m=0}^{i_c} \frac{2}{2m+1} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \\ &+ \sum_{m=0}^{i_c} \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \ln \left(1 + \frac{4m^2}{\eta^2} \right) \\ &- \sum_{m=0}^{i_c} \frac{4}{(2m+1)^2 + \eta^2} \left(m - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta} \right) \\ &+ \sum_{m=0}^{i_c} \frac{2(2m+1)}{(2m+1)^2 + \eta^2} + \sum_{m=0}^{i_c} \frac{4}{(2m+1)^2} \left(m - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

用附录一的方法, 把上式右边第一项的求和用 Digamma 函数 $\psi(x)$ 表示出来, 再利用 $\psi(x)$ 的渐近性质, 可以证明, 当 $\eta \gg 1$ 时,

$$\sum_{m=0}^{i_c} \frac{2}{2m+1} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_e^2} \right) + \ln(2r\eta), \quad (\text{A.20})$$

取 $\omega_c = \omega_0$, 得到

$$\sum_{m=0}^{i_c} \frac{2}{2m+1} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} = \ln(2r\eta) - \frac{1}{2} \ln 2. \quad (\text{A.21})$$

用同样方法计算 (A.19) 式右边第四项. 当 $\eta \gg 1$ 时, 得到

$$\sum_{m=0}^{i_c} \frac{2(2m+1)}{(2m+1)^2 + \eta^2} = \frac{1}{2} \ln 2. \quad (\text{A.22})$$

(A.19) 右边其余三项, 用 Euler-Maclaurin 公式来处理. 当 $\eta \gg 1$ 时, 这三项的求和都可用积分代替. 取 $\omega_c = \omega_0$, 这些积分都可以积出来, 结果为

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{i_c} \frac{1}{2m+1} \frac{\eta^2}{\eta^2 + (2m+1)^2} \ln \left(1 + \frac{4m^2}{\eta^2} \right) \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \frac{1}{z(z^2+1)} \ln(1+z^2) = \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{8} (\ln 2)^2; \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\sum_{m=0}^{j_c} \frac{4}{(2m+1)^2 + \eta^2} \left(m - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta} \right) = \int_0^1 dz \frac{1}{z^2 + 1} (z - \operatorname{tg}^{-1} z) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}; \quad (\text{A.24})$$

$$\sum_{m=0}^{j_c} \frac{4}{(2m+1)^2} \left(m - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2m}{\eta} \right) = \int_0^1 dz \frac{1}{z^2} (z - \operatorname{tg}^{-1} z) = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad (\text{A.25})$$

把 (A.21)–(A.25) 式代入 (A.19) 式, 立刻得到 (43) 式.

附 录 四

证 明 (44) 式

易证

$$\sigma_1 = 1 - \sum_{n=j_c+1}^{\infty} \bar{\Delta}_n^{(1)}. \quad (\text{A.26})$$

把 (33) 式代入, 并计及 (23) 和 (24) 式, 得到

$$\sigma_1 = 1 - \lambda_1 \sum_{n=j_c+1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\eta^2}{\eta^2 + 4n^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n+1)^2} \right). \quad (\text{A.27})$$

用附录一的方法, 不难证明, 当 $\eta \gg 1$ 时,

$$\sum_{n=j_c+1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\eta^2}{\eta^2 + 4n^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + 4(n+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \ln 2 \quad (\text{A.28})$$

因而

$$\sigma_1 = 1 - \lambda_1 \frac{1}{2} \ln 2. \quad (\text{A.29})$$

这就是 (44) 式.

参 考 文 献

- [1] C. S. Owen, D. J. Scalapino, *Physica*, **55** (1971), 691.
- [2] P. B. Allen, B. Mitrovic, *Solid State Physics*, **37** (1982), 1.
- [3] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, *物理学报*, **26**(1977), 509.
- [4] 龚昌德、吴杭生、蔡建华、蔡俊道、吉光达, *物理学报*, **27**(1978), 85.
- [5] 蔡俊道、吉光达、吴杭生、蔡建华、龚昌德, *物理学报*, **28**(1979), 395.
- [6] 周子舫、吴杭生、茅德强、顾一鸣, *物理学报*, **29**(1980), 1187.
- [7] 雷啸霖, *物理学报*, **29**(1980), 1333.
- [8] 吴杭生、顾一鸣, *物理学报*, **30**(1981), 1132.
- [9] S. G. Louis, M. L. Cohen, *Solid State Commun.*, **22** (1971), 1.
- [10] H. Nowotny, O. Hittair, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **91** (1979), 647.
- [11] W. Kessel, *Zeit. Naturforsch.*, **29A** (1974), 445.
- [12] V. L. Ginzburg, D. A. Kirzhnits, *The Problem of high Temperature Superconductivity*, Moscow, 'Nauka', (1977).
- [13] W. L. McMillan, *Phys. Rev.*, **167** (1968), 331.
- [14] 吴杭生、茅德强、顾一鸣, *物理学报*, **30**(1981), 783.
- [15] 吴杭生、顾一鸣、茅德强, *物理学报*, **30**(1981), 1137; *Commun in Theor. Phys.*, **1** (1982), 27.
- [16] 吴杭生、顾一鸣, *物理学报*, **30**(1981), 1693.
- [17] 王竹溪、郭敦仁, *特殊函数概论*, 科学出版社, (1979).

- [18] I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*, (1971).
[19] P. B. Allen, R. C. Dynes, *Phys. Rev. B*, **12** (1975), 905.
[20] 翁征宇, 吴杭生, 物理学报, 待发表.

THEORY OF THE CRITICAL TEMPERATURE FOR SUPERCONDUCTORS WITH SMALL λ (I)

WU HANG-SHENG WENG ZHEN-YU

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

ABSTRACT

A formula of the critical temperature for superconductors with small λ is derived from the Eliashberg equation. The effective phonon spectrum is taken in the present paper as the Einstein spectrum. The values of T_c calculated from our formula are compared with the numerical solutions of the Eliashberg equation in the case of $\mu^* = 0$ and the agreement between them is fairly well in the region of $\lambda < \Lambda$.