

电子迴旋激射不稳定性

徐 民 健

(中国科学院物理研究所)

吴 京 生

(美国马里兰大学物理科学与技术研究所)

1983年9月13日收到

提 要

本文分析了下述情况下的电子迴旋波的激射不稳定性: 当相对性的单能高能电子斜向注入具有背景等离子体的磁场区域内, 并且在电子等离子体频率与电子迴旋频率可以比拟时, 考虑了背景等离子体密度远大于单能的高能电子的密度, 以及与前者相反的两种情况. 当单能的高能电子具有弱相对论性效应时, 在电子迴旋频率的基频和二次谐波附近, 分别有 o 模和 π 模的不稳定性存在. 文中计算了这两种模的增长率, 并作了讨论.

一、引 言

电子迴旋激射不稳定性的研究从五十年代就已开始. 有关这方面的文献[1]很多.

利用电子迴旋激射不稳定性的理论发展了一种新的微波源——迴旋仪 (gyrotron)^[2]. 利用它产生的电子迴旋波来加热 Tokamak 等离子体^[3]. 另外 Wu 和 Lee 等人^[4-6]用具有损失锥速度分布函数的电子迴旋激射不稳定机制成功地解释了地磁层中极区的电磁辐射.

Chu 和 Hirshfied^[7] 讨论了电子迴旋激射的机制和不稳定特性. 他们使用了单能的高能电子的速度分布函数(用 δ 函数来表示), 仅考虑了波沿磁场方向上传播的过份简单的情况. Freund 等人^[8]讨论了单能的和具有热速度的高能电子束的电子迴旋激射不稳定性. 他们考虑电子束斜向注入磁场区域内, 并具有高密度背景等离子体.

本文的目的是为了推广 Freund 和 Wong^[9] 及 Chu 和 Hirshfied^[7] 等人的结果. 对于 $n_s/n_0 \ll 1$ 的情况, 作了较广泛的讨论. 例如, 重要的参数 n_s/n_0 (n_s 为高能束的等离子体密度, n_0 为背景等离子体密度) 对增长率的影响. 我们也讨论了 $n_0/n_s \ll 1$ 的情况. Hirshfied^[7] 仅讨论了在电子迴旋波沿磁场方向传播的情况. 我们讨论了较普遍的情况: 电子束的初始“运动速度”和波的传播方向可以取任意的方向.

对于单能的高能电子束, 在波场的作用下, 具有相对论效应的电子质量的改变对电子迴旋频率有影响, 它引起电子迴旋频率在相位上“群聚”, 从而导致波的放大. 这种不稳定性是属于流体型的. 对于具有热速度的高能电子束, 其不稳定性是属于动力型的. 前者的增长率是显著地高于后者.

二、基本设想和物理模型

设一高能电子束沿一均匀外磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z)$ 斜向注入具有能量较低的背景等离子体区域内,它具有单能的分布函数

$$F(u_{\perp}, u_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi u_{0\perp}} \delta(u_{\perp} - u_{0\perp}) \delta(u_{\parallel} - u_{0\parallel}) \quad (1)$$

其中 $u_{\perp}$ 和 $u_{\parallel}$ 分别表示在垂直和平行于磁场方向上的电子速度 (每单位质量的电子动量); $u_{0\parallel}$ 表示在平行于磁场方向上的束的初始速度: 令 $\phi = \tan^{-1} u_{0\perp}/u_{0\parallel}$. 设此高能束具有弱相对论效应, 因而相对性因子近似地写为 $\gamma \approx 1 + (u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2)/2c^2$. 本文中略去背景等离子体的色散效应. 由于讨论的是高频电子回旋波, 离子的动力效应可以略去不计. 考虑到在空间、天体物理和在实验中等离子体物理的应用, 我们讨论了当电子等离子体频率与电子回旋频率可比拟时, (1) $n_0 \gg n_s$ 和 (2) $n_0 \ll n_s$ 的情况.

(1) $n_s \ll n_0$ 从普遍的色散方程^[9]出发, 在我们的假定下得到相应的色散方程. 略去背景电子的色散效应, 电子回旋波的实频 ω_r 是由背景等离子体决定的, 高能电子束对波的频率有一小的修正 $\delta\omega$ (其中 $\delta\omega = \delta\omega_r + i\delta\omega_i$; $|\delta\omega| \ll \omega_r$). 由于 $n_s \ll n_0$, 计算中保留了正比于 n_s 的项, 而略去 $O(n_s^2)$ 的项. 考虑电子回旋波的实频接近于第 $\bar{m}$ 阶回旋频率, 波的共振频率近似地表示为

$$\gamma_0 \omega_r - \bar{m} \Omega_c - k_{\parallel} u_{0\parallel} = 0. \quad (2)$$

其中 $\gamma_0 = 1 + (u_{0\parallel}^2 + u_{0\perp}^2)/2c^2$; $k_{\parallel}$ 为波矢 $\mathbf{k}$ 在磁场方向上的分量; Ω_c 为电子回旋频率. 从文献 [8] 中得知, 在一般情形下, 上式不等于零的修正是很小的, 因此在本文中略去不计, 并略去所有 $m \neq \bar{m}$ 的项. 采用小扰动的计算方法, 得到色散方程:

$$G\delta\bar{\omega}^3 + H\delta\bar{\omega}^2 + E\delta\bar{\omega} + D = 0. \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta\bar{\omega} &= \frac{\delta\omega}{\omega_r} \\ G &\equiv \left\{ 2N^4 \left(\frac{\omega_r^4 \sin^2 \theta}{(\omega_r^2 - \Omega_c^2)^2} + \cos^2 \theta \right) + 4N^2 \left(\frac{(\omega_{pe}^2 - \Omega_c^2)\omega_r^2}{(\omega_r^2 - \Omega_c^2)^2} - \frac{\omega_r^2}{\omega_{pe}^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_r^2 \Omega_c^2 \sin^2 \theta}{2(\omega_r^2 - \Omega_c^2)^2} \right) + 2 \left[\left(2 \frac{\omega_r^2}{\omega_{pe}^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2 - \Omega_c^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_{pe}^2 \Omega_c^2}{(\omega_r^2 - \Omega_c^2)^2} + 2 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} \right)^2 \frac{\omega_r^4}{(\omega_r^2 - \Omega_c^2)^2} \right] \right\} \gamma_0^2 \\ H &\equiv -\nu \phi_{33} \gamma_0, \\ E &\equiv -\nu (\phi_{11} a_{11}^{(\bar{m})} + \phi_{22} a_{22}^{(\bar{m})} + \phi_{33} a_{33}^{(\bar{m})} + \phi_{13} a_{13}^{(\bar{m})} + i\phi_{12} a_{12}^{(\bar{m})} + i\phi_{23} a_{23}^{(\bar{m})}) \gamma_0, \\ D &\equiv \nu (\phi_{11} b_{11}^{(\bar{m})} + \phi_{22} b_{22}^{(\bar{m})} + \phi_{33} b_{33}^{(\bar{m})} + \phi_{13} b_{13}^{(\bar{m})} + i\phi_{12} b_{12}^{(\bar{m})} + i\phi_{23} b_{23}^{(\bar{m})}), \\ \nu &= n_s/n_0, \\ a_{ij}^{(\bar{m})} &= \frac{A_{ij}^{(\bar{m})}}{\omega_r} \end{aligned}$$

$$A_{ij}^{(m)} = \left[\left(\omega - \frac{k_{\parallel} u_{0\parallel}}{\gamma_0} \right) \frac{\partial T_{ij}^{(m)}}{u_{\perp} \partial u_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma_0} \frac{\partial T_{ij}^{(m)}}{\partial u_{\parallel}} \right] \Big|_{\substack{u_{\parallel}=u_{0\parallel} \\ u_{\perp}=u_{0\perp}}},$$

$$b_{ij}^{(m)} = \frac{B_{ij}^{(m)}}{\omega_r^2}$$

$$B_{ij}^{(m)} = \left[\left(\frac{\omega^2}{u_{\perp}} \frac{\partial \gamma_0}{\partial u_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}^2}{\gamma_0} \right) T_{ij}^{(m)} \right] \Big|_{\substack{u_{\parallel}=u_{0\parallel} \\ u_{\perp}=u_{0\perp}}},$$

$$\phi_{11} \equiv N^4 \sin^2 \theta - N^2 (\varepsilon \sin^2 \theta + \mu) + \varepsilon \mu,$$

$$\phi_{22} \equiv -N^2 (\varepsilon \sin^2 \theta + \mu \cos^2 \theta) + \varepsilon \mu,$$

$$\phi_{33} \equiv N^4 \cos^2 \theta - N^2 \varepsilon (1 + \cos^2 \theta) + \varepsilon^2 - g^2,$$

$$\phi_{23} \equiv 2N^2 g \sin \theta \cos \theta,$$

$$\phi_{13} \equiv 2N^2 (N^2 - \varepsilon) \sin \theta \cos \theta,$$

$$\phi_{12} \equiv 2g(\mu - N^2 \sin^2 \theta),$$

$$\varepsilon \equiv 1 - (\omega_{pe}^2 / (\omega^2 - \Omega_c^2)),$$

$$\mu \equiv 1 - (\omega_{pe}^2 / \omega^2)$$

$$g \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega^2 - \Omega_c^2)}.$$

$$T^{(m)}(b) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\bar{m}^2 Q_c}{k_{\perp}} J_m^2(b) & -i \frac{\bar{m} Q_c}{k_{\perp}} u_{\perp} J_m(b) J'_m(b) & \frac{\bar{m} Q_c}{k_{\perp}} u_{\parallel} J_m^2(b) \\ i \frac{\bar{m} Q_c}{k_{\perp}} u_{\perp} J_m(b) J'_m(b) & u_{\perp}^2 J'_m(b) J'_m(b) & i u_{\perp} u_{\parallel} J_m(b) J'_m(b) \\ \frac{m Q_c}{k_{\perp}} u_{\parallel} J_m^2(b) & -i u_{\perp} u_{\parallel} J_m(b) J'_m(b) & u_{\parallel}^2 J_m^2(b) \end{pmatrix}.$$

$$J'_m(b) = dJ_m(b)/db, \quad b \equiv \frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\Omega_c}.$$

其中电子的迴旋频率 $\Omega_c = \frac{eB}{m_{e0}c}$ (e 为电子的电荷, m_{e0} 为电子的静止质量, c 为光速);

电子背景等离子体频率 $\omega_{pe} = (4\pi n_0 e^2 / m_{e0})^{1/2}$; 波传播的方向与磁场方向之间的夹角

$$\theta = \text{tg}^{-1}(k_{\perp}/k_{\parallel})$$

($k_{\perp}$ 是波矢 $\mathbf{k}$ 在垂直于磁场方向上的分量, $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_k$) 折射率 $N \equiv \frac{ck}{\omega_r}$. 由(3)式得到 o 模与 x 模的解.

已知 o 模与 x 模的截止频率分别是 $\omega_{co} = \omega_{pe}$, $\omega_{cx} = \left(\omega_{pe}^2 + \frac{\Omega_c^2}{4} \right)^{1/2} + \frac{\Omega_c}{2}$. 利用波的共振条件(2)式和上述波的截止频率得到产生大于并等于 m 次谐频的电子迴旋波的条件

$$\Delta \leq \frac{1}{\gamma_0^2} \left(m + \frac{k_{\parallel} u_{0\parallel}}{\Omega_c} \right)^2 \quad (o \text{ 模})$$

和

$$\Delta \leq \left(\frac{m}{\gamma_0} + \frac{k_{\parallel} u_{0\parallel}}{\gamma_0 \Omega_c} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}. \quad (x \text{ 模})$$

其中 $\Delta = \omega_{pe}^2 / \Omega_c^2$. 例如, 当 $u_0^2/c^2 = 0.08$ 时, $\Delta \lesssim 0.925$ 即可产生 $m \geq 1$ 的 o 模的电子

迴旋波; $\Delta \leq 1.78$ 即可产生 $m \geq 2$ 的 x 模的电子迴旋波。

(2) $n_i \gg n_0$ 为了使问题简化,略去背景等离子体对色散方程的影响,即令 $n_0/n_i \rightarrow 0$, 则从普遍的色散方程^[9]得到色散方程

$$\det |A_{ij}(\mathbf{k}, \omega)| = 0, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{ij}(\mathbf{k}, \omega) &= \left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) \delta_{ij} + \frac{c^2 k_i k_j}{\omega^2} + Q_{ij}^i(\mathbf{k}, \omega), \\ Q_{ij}^i(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left\{ \frac{1}{\gamma_0} \delta_{iz} \delta_{jz} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_{ij}^{(m)}}{G_1} - \frac{B_{ij}^{(m)}}{G_1^*} \right) \right\}, \\ G_1 &= \gamma_0 \omega - m \Omega_c - k_{\parallel} u_{0\parallel}, \\ \omega_{pe} &= \left(\frac{4\pi n_i e^2}{m_{e0}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

为高能电子等离子体频率。

电子迴旋波的实频是由高能电子束确定的,它由(4)式得到。相对于 $n_0 \gg n_i$ 的情况,波的实频稍有修正。从(4)式得出 o 模的截止频率

$$\omega_{co}^i = \omega_{pe} \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{u_{0\parallel}^2}{c^2 \gamma_0^2} \right)^{1/2}.$$

从上式看出, γ_0 及 $u_{0\parallel}$ 影响 o 模的截止频率。产生 $m \geq 1$ 的 o 模的电子迴旋波的条件为

$$\Delta_i \leq (1 + (k_{\parallel} u_{0\parallel} / \Omega_c)^2) / [\gamma_0 - (u_{0\parallel}^2 / c^2)].$$

其中 $\Delta_i = \omega_{pe}^2 / \Omega_c^2$ 。例如在 $u_{0\parallel}^2 / c^2 = 0.08$ 时, $\Delta_i \lesssim 0.96$ 就能产生 $m \geq 1$ 的 o 模。 x 模的截止频率和产生 $m \geq 2$ 的 x 模的条件均由数值计算得到。例如,在 $u_{0\parallel}^2 / c^2 = 0.08$ 时, $\Delta_i \lesssim 1.80$ 就产生 $m \geq 2$ 的 x 模。上述计算结果表明产生迴旋波的条件相对于 $n_0 \gg n_i$ 的情况,仅有些小的修正。

三、数值计算

在给定的参数范围下,计算了 o 模与 x 模的增长率。选取 $u_{0\parallel}^2 / c^2 = 0.08$ (相当于电子的能量 $T_0 = 20 \text{keV}$), Δ 和 Δ_i 的参数范围均在 0.5—1.5。对于 $n_i \ll n_0$ 的情况,选取

$$\frac{n_i}{n_0} \sim 10^{-6}, 10^{-4} \text{ 和 } 10^{-2}.$$

在计算中,增长率显著地随着谐波数的增加而降低。因此我们给出了最低阶电子迴旋波的最大增长率。

对于 $n_i / n_0 \gg 1$, 从(3)式计算的增长率随 θ 或 ϕ 变化,其结果与文献[8]是一致的。图1给出 o 模与 x 模随 ν 变化的曲线,两种模的增长率的斜率相同。根据斜率得到

$$\delta \omega_i / \Omega_c \propto (\nu)^{1/3},$$

表明 ν 的变化对 $\delta \omega_i / \Omega_c$ 的影响不是很大。计算结果表明增长率随 Δ 变化时, x 模在 $\Delta \approx 1$ 时,其增长率极大。而当 $\Delta \gtrsim 0.92$ 时, $m = 1$ 的 o 模不存在。

图2和图3分别表示在 $n_0 / n_i = 0$ 的情况下, o 模与 x 模的最大增长率随 θ 的变化。

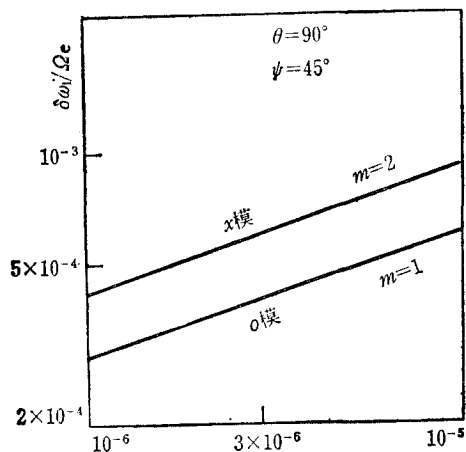


图1 在给定 $\Delta_s = 0.5$ 和 $u_0^2/c^2 = 0.08$ 的参量下, o 模 ($m=1$) 和 x 模 ($m=2$) 的增长率随 ν 的变化

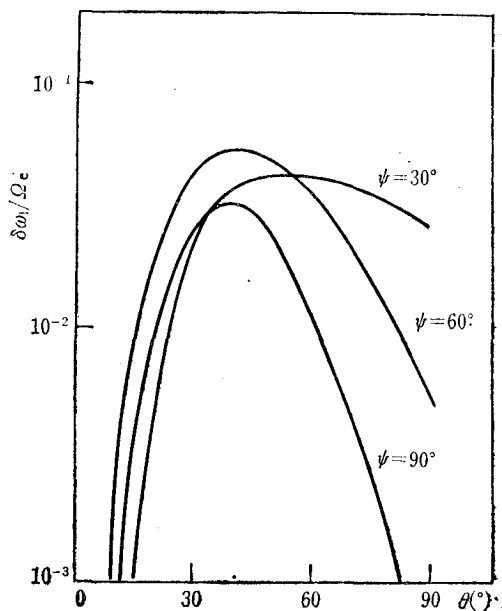


图2 在给定 $\Delta_s = 0.5$; $n_0/n_i = 0$ 和 $u_0^2/c^2 = 0.08$ 的参量下, o 模 ($m=1$) 的增长率随 θ 的变化

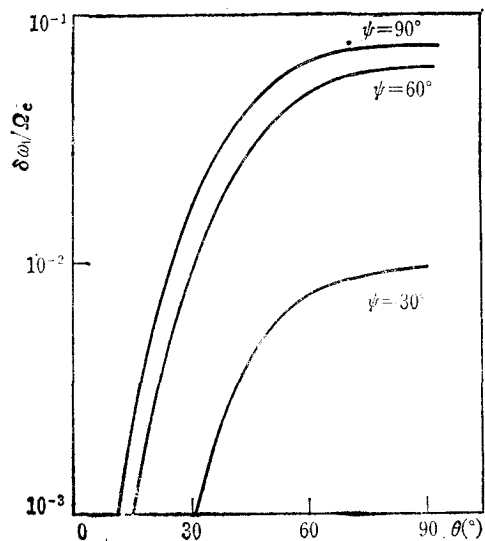


图3 在给定 $\Delta_s = 0.5$; $n_0/n_i = 0$ 和 $u_0^2/c^2 = 0.08$ 的参量下, x 模 ($m=2$) 的增长率随 θ 的变化

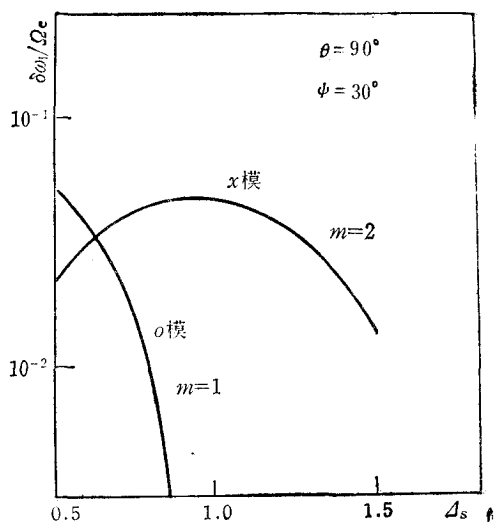


图4 在给定 $(n_0/n_i) = 0$ 和 $u_0^2/c^2 = 0.08$ 的参量下, x 模 ($m=2$) 和 o 模 ($m=1$) 的增长率随 Δ_s 的变化

从图2和图3看出电子迴旋波的传播方向和高能电子束的初始运动方向对增长率有较大的影响。x模的最大增长率的峰值是在 $\theta = 90^\circ$, $\psi = 90^\circ$ 。o模的增长率的极值介于 $\theta \approx 30-60^\circ$ 和 $\psi \approx 30-60^\circ$ 之间,其角度与参数有关。

对于 $n_0/n_i \ll 1$ 和 $n_e/n_0 \ll 1$ 的情况, o 模与 x 模的最大增长率随参量 Δ_s 变化的结果

是相类似的。所以本文仅给出 $n_i/n_0 \gg 1$ 的结果。当 $\Delta_r \rightarrow 1$ 时, o 模的增长率趋于零; x 模的增长率为极大。

四、结论和讨论

本文主要分析了迴旋激射不稳定的特性。我们讨论的两种情况是属于天体、空间物理和“激射”辐射实验的参数范围。例如在日冕、地磁层中均有激射的辐射。

本文考虑的是由于“群聚”机制而产生的迴旋激射不稳定性。

最大的增长率是 $\omega \sim \Omega_c (m=1)$ 的 o 模和 $\omega \sim 2\Omega_c (m=2)$ 的 x 模。在我们给定的参数范围,最大的增长率的量级 $\frac{\delta\omega_i}{\Omega_c} \sim 10^{-1}-10^{-2}$, 在一些参数范围之内,这两种模的增长率是可以比拟的。

我们给出了 o 模与 x 模产生的条件。当 Δ (或 Δ_r) < 2 , 存在 $m=2$ 的 x 模。当 $\Delta < 1$ (或 $\Delta_r < 1$), 存在 $m=1$ 的 o 模。当 $\Delta \rightarrow 1$ (或 $\Delta_r \rightarrow 1$) $m=1$ 的 o 模消失。

在 $n_0/n_i \rightarrow 0$ 时的增长率稍高于 $n_i/n_0 \ll 1$ 的增长率。而背景等离子体密度的变化对后者的增长率影响不是很大。

电子迴旋波的增长率较高,因此它是波加热和辐射源的重要机制之一。

在本文中使用了 δ 分布函数的假设,如果只要条件

$$\frac{\delta\omega}{\omega_r} > \left(\frac{u_0}{c} - N \cos \theta \right) \frac{\alpha}{c}$$

满足,则可以假设 $\alpha \rightarrow 0$ (α 为电子的热速度),此时可采用 δ 分布函数的近似。而在天体、空间物理和聚变等离子体物理的领域中是存在这样的参数区域。

参 考 文 献

- [1] J. L. Hirshfied, K. R. Chu and S. Kainer, *Appl. Phys. Lett.*, **23**(1978), 847.
- [2] N. J. Zaytsev, T. B. Pankratova, M. I. Petelin and V. A. Flyagin, *Radio Eng. Electron Phys.* **19** (1974), 103.
- [3] K. R. Chu and B. Hui, *Phys. Fluids*, **26**(1983), 69.
- [4] C. S. Wu and L. C. Lee, *Astrophys. J.* **230**(1979), 621.
- [5] L. C. Lee and C. S. Wu, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 1348.
- [6] C. S. Wu, H. K. Wong, D. J. Gorney and L. C. Lee, *J. Geophys. Res.*, **87**(1982), 4476.
- [7] K. R. Chu, J. L. Hirshfied, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 461.
- [8] H. P. Freund, H. K. Wong, C. S. Wu and M. J. Xu, *Phys. Fluids*, **26**(1983), 2263.
- [9] D. E. Baldwin, I. B. Bernstein and M. P. H. Weenink, *Advances in Plasma Physics*, Vol. 3, ed. A. Simon and W. B. Thompson, Wiley New York, (1969), p. 32.

AN ELECTRON MASER INSTABILITY

XU MIN-JIAN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

WU JING-SHENG (C. S. WU)

(Institute of Physical Science and Technology, University of Maryland)

ABSTRACT

The electron cyclotron maser instability is analyzed for the following case, in which a relativistic monoenergetic electron beam is injected into a background plasma, but the beam direction is initially oblique to the ambient magnetic field.

We consider that the electron plasma frequency is comparable to the electron cyclotron frequency associated with the external magnetic field and study the situation: (1) the background plasma density n_0 is much larger than that of the suprathermal electron n_s and (2) $n_0 \ll n_s$. The relativistic effects destabilized the o and x mode with frequencies respectively in the vicinity of the fundamental and the second harmonic of the electron cyclotron frequencies. The growth rates of both modes are computed and discussed.