

Josephson 结的动力学行为 (I)

汪子丹 姚希贤

(南京大学物理系)

1984年6月28日收到

提 要

本文对射频电流驱动下的包含干涉项电流的 Josephson 结方程进行了大量的数值研究工作。我们发现,对应于不同的参数范围,分别出现混沌行为、倍周期分岔序列、混沌带的反序列以及阵发混沌现象。我们也计算了 $2^n P$ 序列的收敛因子 δ_n 和功率谱中 2^k 与 2^{k+1} 分频的平均峰高之比 $\Phi(k)/\Phi(k+1)$ 。另外,还研究了周期解的对称性以及它与通向混沌途径的关系。

一、引 言

近年来,研究非线性物理系统的动力学行为取得了很大的进展,引起人们广泛的兴趣^[1-4],其中包括对 Josephson 结的研究。描述 Josephson 结行为的方程一般采用 McCumber 模型^[5],在数学上它等同于阻尼摆方程。一些物理学工作者对它进行了数值计算和模拟实验研究,发现在某些参数范围内,出现分岔、混沌等现象^[6-11]。Hubermann 等人根据他们的计算结果,说明了 Josephson 结用作参量放大时在实验上出现反常噪声现象。我们现在的工作是在计入干涉项电流的情况下进行的。干涉项电流是在射频电流作用下,在实验上得到了证实^[12]。因此,在射频电流作用下计入干涉项电流更为符合实际。此外,由于干涉项电流的出现,方程变得更为复杂,它等同于变阻尼摆的方程(阻尼系数 $\gamma = \gamma_0[1 + \varepsilon \cos \phi]$),而这一类方程解的行为如何,物理学和数学工作者将会很感兴趣。还考虑到:在很多非线性系统中,混沌运动的开始可以根据简单的一维或二维 Poincare 映象得到解释,我们希望通过这一表征实际系统的微分方程的研究,将所得结果与一维或二维 Poincare 映象的一般结果进行比较。

二、数 值 结 果

对于射频电流驱动的 Josephson 结,在 McCumber 模型的基础上,计入干涉项电流,方程可写成如下形式:

$$\frac{\hbar C}{2e} \left[\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{1}{R_N C} \frac{d\varphi}{dt} (1 + \varepsilon \cos \varphi) + \frac{2e I_c}{\hbar C} \sin \varphi \right] = I_{rf} \sin \omega_d t. \quad (1)$$

这里, φ 是两个超导体之间的位相差, R_N 是与准粒子有关的结电阻, C 是结电容, I_c 是临

界超电流, 含有 $\cos \varphi$ 的项是干涉项电流, ε 是干涉项系数, I_{rf} 是频率为 ω_d 的射频电流的振幅. 这个方程可化成一个无量纲方程

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \gamma_0 (1 + \varepsilon \cos \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin \varphi = A \sin Q\tau. \quad (2)$$

参数及变量的变换是

$$\tau = \omega_0 t, \quad Q = \frac{\omega_d}{\omega_0}, \quad A = \frac{I_{rf}}{I_c}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta_c}}.$$

其中 $\omega_0 = (2eI_c/\hbar C)^{-1/2}$ 是结等离子体振荡频率, $\beta_c = 2eI_c R_N^2 C/\hbar$ 是 McCumber 参数.

值得一提的是关于 ε 的数值问题, 它的符号至今仍有一些争论, 不过实验得出的值在 -0.8 左右^[12,13]. 在本文的计算中, ε 取为 -0.8 .

在 γ_0, A, Q 的参数空间中, 我们对方程 (2) 进行了数值求解. 而对解的分析研究, 采用了常用的三种形式: 1) Poincaré 截面法 (本例中即分频采样法). 2) 运动轨道的直接观察. 3) 功率谱分析 (详细讨论见后). 这里, 我们给出 $\gamma_0 = 0.4, A = 0.6-1.1, Q = 0.4-0.65$ 的参数范围内解的长时间行为, 而这些参数对于实际问题是比较典型的.

图 1 就是在确定初始条件 $\varphi(0) = 0$,

$$\left. \frac{d\varphi}{d\tau} \right|_0 = 0$$

的情形下上述参数范围的 $A-Q$ 相图. 对于方程 (2) 的解一般可分为周期解与混沌解、扩展解 (propagating solution, $\varphi(t \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm\infty$) 和束缚解 (confined solution, $\varphi(t)$ 有限). 而对于周期解习惯上可由指标 p (第 p 分谐波) 和 q (dc 电压为 $q/p \times \frac{\hbar\omega_d}{2e}$, 即结处于第 q/p 射频感应台阶上) 来表示, 记为 (p, q) . 显然, $q=0$ 对应束缚解, $q>0$ 对应扩展解. 例如: $Q=0.425$ 时, $A=1.016$ 对应束缚周期解 $(2, 0)$, $A=1.026$ 对应束缚混沌解 (见图 2(a), (b), 图 3(a), (b)). 而 $Q=0.65$ 时, $A=1.035$ 对应扩展周期解 $(4, 4)$ (见图 2(e), 图 3(c)), $A=1.0395$ 对应扩展混沌解 (见图 3(d)).

从图 1 上看我们的结果, 在混沌区的混沌解对于 $A-Q$ 参量似乎是连续的, 而实际上其中在更小的尺度上是有结构的, 混沌带中嵌有周期解. 例如, $Q=0.525, A=1.04$, 解就是嵌在混沌带中的 $5P$ (周期 5) 解—— $(5, 0)$ (见图 2(d), 图 3(f)), 当 A 变化 10^{-5} 数量级, 解就变到混沌解. 还有, 在有的区域, 对于很小的参数变化, 解的性质出现多种变化. 例如, $Q=0.425$, 当 $A=1.02105-1.0213$, 解的变化是 $(4, 0) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (4, 0) \rightarrow (1, 2)$. 因而, 在我们的数值研究中, 有些区域的很多更小尺度上的结构不得不被略去,

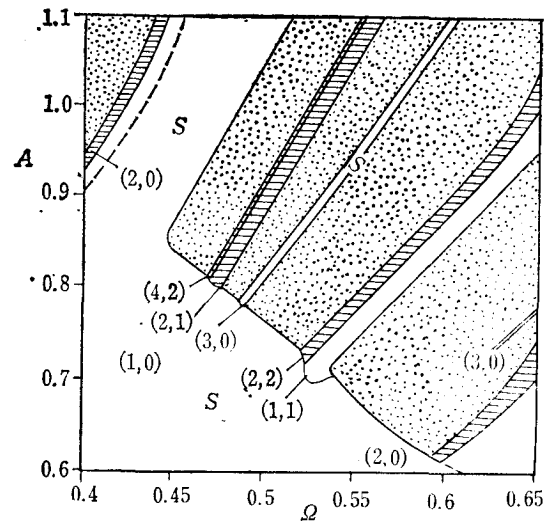
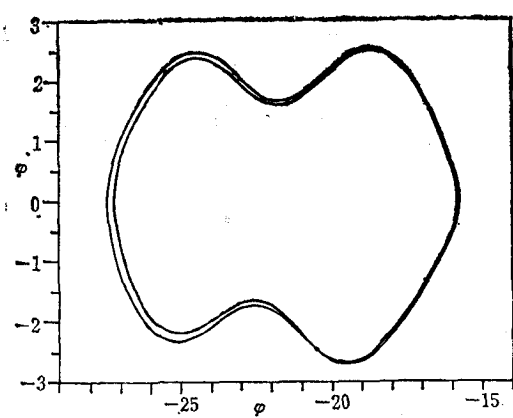
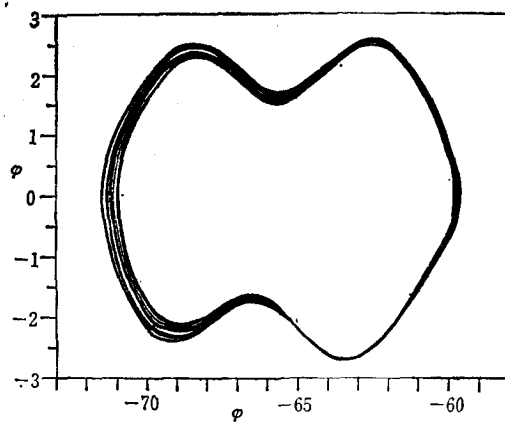


图 1 $A-Q$ 相图 ($\gamma_0 = 0.4, \varepsilon = -0.8$)

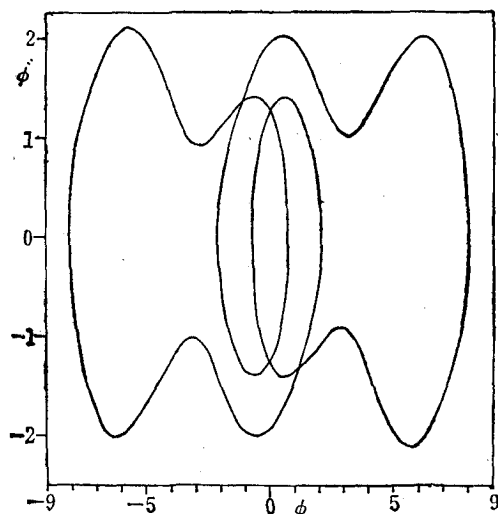
▨ 为混沌区; ▨ 为 2^* 周期区, (p, q) 对应第 q/p 射频感应台阶的 p 分谐波; —— 为不同周期区之间或周期与混沌区域的界线; ---- 为同一周期区中对称区 S 与非对称区的界线 (讨论见后).



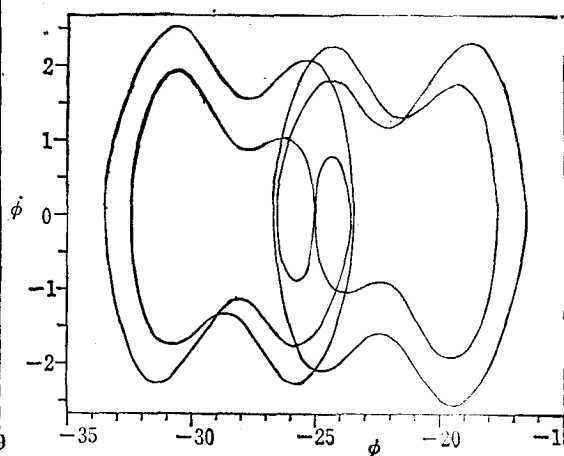
(a) $\Omega = 0.425$, $A = 1.016$, 束缚的 2P 解



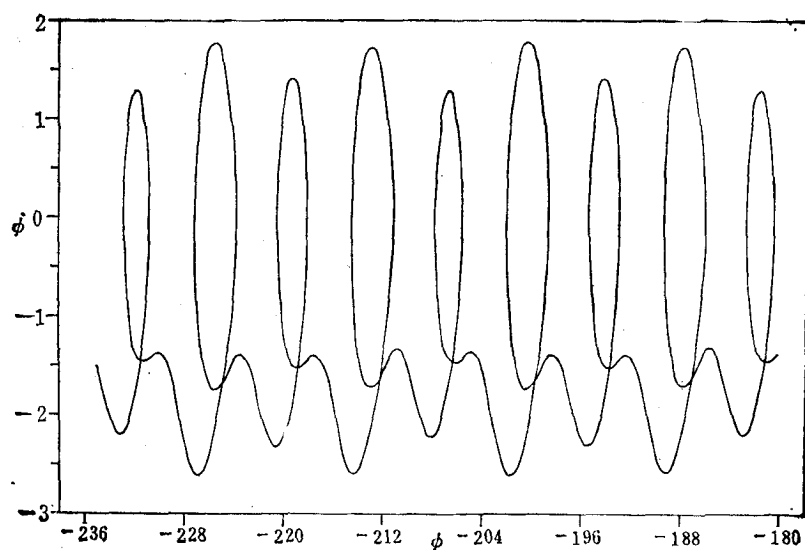
(b) $\Omega = 0.425$, $A = 1.026$, 束缚的混沌解



(c) $\Omega = 0.5$, $A = 0.7999$, 束缚的 3P 解

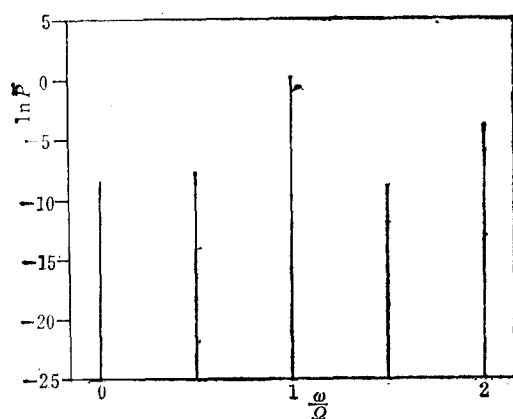
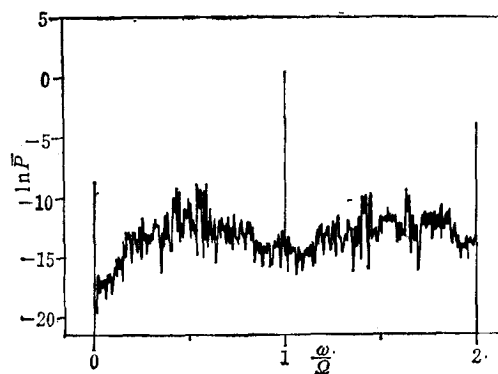
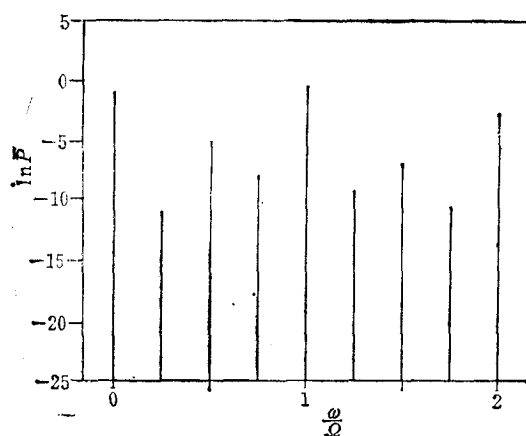
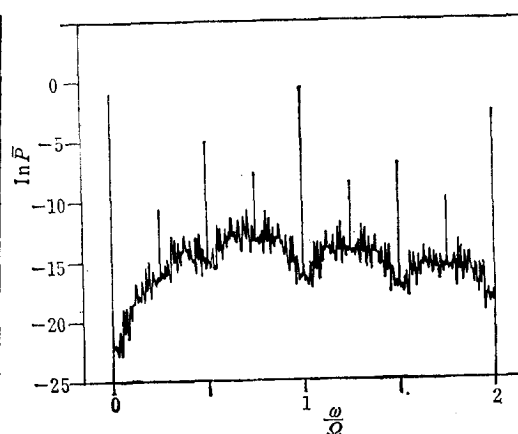
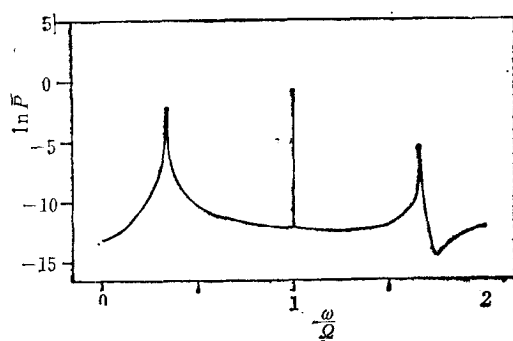
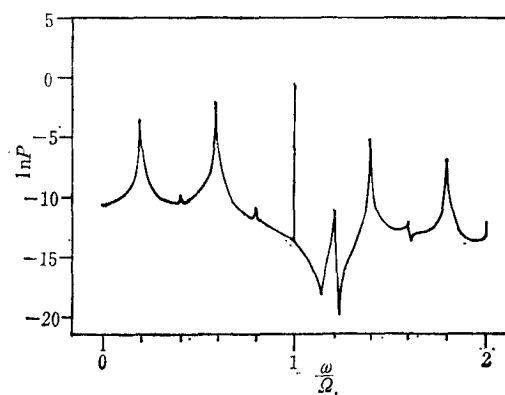


(d) $\Omega = 0.525$, $A = 1.04$, 束缚的 5P 解



(e) $\Omega = 0.65$, $A = 1.035$, 扩展的 4P 解

图 2 当 $\gamma_0 = 0.4$, $\varepsilon = -0.8$ 时, 在不同的 A , Ω 值下, 相空间中解的轨迹

(a) $Q = 0.425$, $A = 1.016$, 束缚的 $2P$ 解(b) $Q = 0.425$, $A = 1.026$, 束缚的混沌解(c) $Q = 0.65$, $A = 1.035$, 扩展的 $4P$ 解(d) $Q = 0.65$, $A = 1.0395$, 扩展的 $4I$ (周期为 4 的混沌带) 解。(注意: (c), (d) 在 $\omega = 0$, 对应很高的尖峰, 几乎和基频相当)(e) $Q = 0.5$, $A = 0.7999$, 束缚的 $3P$ 解(注意, 基频及其分频的偶倍频处, 无尖峰)(f) $Q = 0.525$, $A = 1.04$, 束缚的 $5P$ 解图 3 当 $r_0 = 0.4$, $\varepsilon = -0.8$ 时, 在不同的 A, Q 值下, 位相速度 $d\varphi/d\tau$ 的功率谱

在图 1 中,我们则是以一个点的解性质,表示其周围的一个小区域. 此外,在混沌区的束缚解和扩展解是混合在一起的,在参数空间中似乎是不可能将它们划分成不同的区域.

这里简要叙述计算结果. 参数空间中混沌区域是不小的,它被不同的周期区分隔成好多块,并且其中还含有 $4P$, $5P$, $7P$ 等极小的周期区(图 1 中画不出来). 而在周期区域里,大部分区域是 $1P$, $2P$ 和 $3P$ 也有一定比例. 在有些区域里,当 Q 为常数,增加 A 时可观察到经过倍周期分岔进入混沌,然后开始混沌带的反序列. 必须注意,倍周期分岔区域是很窄的: 在 $Q = 0.65$ 处, $A_{2p} = 1.01$, $A_\infty - A_{2p} \approx 0.028$. 也有些区域是经过阵发混沌从周期区进入混沌区的. 例如, $Q = 0.5$, $A_c = 0.7997$ 是临界点, A 大于 A_c 解是 $3P$, 当 A 从 A_c 变小,解就开始阵发混沌直至混沌. 此外,从有些周期区进入混沌区,似乎是直接的而不过过渡区.

下面仔细讨论方程 (2) 解的功率谱问题. 以 Δt 为采样间隔,对位相速度 $d\varphi/d\tau$ (记为 $\dot{\varphi}$) 进行采样,得时间序列 $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dots, \dot{\varphi}_N$, 对 N 个采样值加上周期性条件 $\dot{\varphi}_{N+i} = \dot{\varphi}_i$. 我们知道离散序列 $\{\dot{\varphi}_i\}$ 的功率谱是

$$P(\omega_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C_j e^{-\sqrt{-1} \omega_k j}. \quad (3)$$

其中

$$C_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_{i+j}. \quad (4)$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}. \quad (5)$$

容易证明

$$P(\omega_k) = |V(\omega_k)|^2 = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \dot{\varphi}_j e^{-\sqrt{-1} \omega_k j} \right|^2 \quad (6)$$

我们就是利用 (6) 式通过计算 $V(\omega_k)$ 得到 $P(\omega_k)$, 然后, 对不同的采样序列 $\{\varphi_i\}$ 的 $P(\omega_k)$ 进行平均, 得 $\bar{P}(\omega_k)$, 这就是我们所要的 $d\varphi/d\tau$ 的功率谱. 在图 3(a)–(f) 中, 我们绘出了某几个参数 $d\varphi/d\tau$ 的对数功率谱 $\ln \bar{P}(\omega_k)$ (计算中取 $\Delta t = T_0/8$, $N = 1024$).

从图 3 中, 我们可看到, 周期运动对应尖峰, 混沌时出现较大的噪声背景. 扩展解的零频出现很高的尖峰, 和基频 ($\omega/Q = 1$) 的峰高相当. 而束缚解的零频峰与基频峰相比就很小, 由于每周期采样点为 8 个, 对于有偶次谐频的谱, 零频峰还是有一点的. 仅含有奇次谐频的谱无零频峰.

三、周期解的 H 对称性

考察方程 (2), 可发现其具有一种很有趣的对称性^[11], 它对于刻画长时间解的类型有重大作用. 为了研究这种对称性, 我们先定义一个描述解的半周期传播的二维映象 ($T_0 = 2\pi/Q$)

$$\begin{bmatrix} \varphi \left(T_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \\ \dot{\varphi} \left(T_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_\varphi(\varphi(nT_0), \dot{\varphi}(nT_0)) \\ H_{\dot{\varphi}}(\varphi(nT_0), \dot{\varphi}(nT_0)) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

由于方程(2)在变量 $\varphi \rightarrow 2k\pi - \varphi, \tau \rightarrow \tau + \frac{T_0}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的变换下不变, 这样一来, 对应一个周期的 Poincare 映象可由 $H\varphi$ 和 $H\dot{\varphi}$ 来表示

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi(T_0(n+1)) \\ \dot{\varphi}(T_0(n+1)) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2k\pi - H\varphi\left(2k\pi - \varphi\left(T_0\left(n + \frac{1}{2}\right)\right), -\dot{\varphi}\left(T_0\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\right) \\ -H\dot{\varphi}\left(2k\pi - \varphi\left(T_0\left(n + \frac{1}{2}\right)\right), -\dot{\varphi}\left(T_0\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2k\pi - H\varphi(2k\pi - H\varphi(\varphi(nT_0), \dot{\varphi}(nT_0)), -H\dot{\varphi}(\varphi(nT_0), \dot{\varphi}(nT_0))) \\ -H\dot{\varphi}(2k\pi - H\varphi(\varphi(nT_0), \dot{\varphi}(nT_0)), -H\dot{\varphi}(\varphi(nT_0), \dot{\varphi}(nT_0))) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_\varphi(\varphi(nT_0), \dot{\varphi}(nT_0)) \\ P_{\dot{\varphi}}(\varphi(nT_0), \dot{\varphi}(nT_0)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

注意到在相空间中任一满足 $H\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) = 2k\pi - \varphi, H\dot{\varphi}(\varphi, \dot{\varphi}) = -\dot{\varphi}$ 的点, 将是 Poincare 映象的不动点. 我们称对应这些不动点的周期解为 H 对称的, 亦即当

$$\varphi\left(\tau + \frac{T_0}{2}\right) = 2k\pi - \varphi(\tau), \quad \dot{\varphi}\left(\tau + \frac{T_0}{2}\right) = -\dot{\varphi}(\tau)$$

称为 H 对称的. 例如, $\Omega = 0.4, A = 0.85$ 和 $A = 0.9$ 就是分别对应 $k = 0$ 和 $k = 2$ 的对称 $(1, 0)$ 解. 我们的计算结果表明, 参数空间的不少周期解具有这样的对称性 (如图 1). 当解的周期不是基本周期 $T_0 = 2\pi/\Omega$, 而是 $T = (2N+1)T_0 (N = 1, 2, \dots)$, 则只要将 (7) 和 (8) 式中的 T_0 扩充到 T , 前面的结论就可推广. 这样对于 $((2N+1), q)$ 型的周期解也可能具有上述对称性. 例如图 1 中的 $(3, 0)$ 区域就是 H 对称的, 图 2(c) 就是其中一个参数点下解的相空间轨迹. 此外, 容易证明, 在 $\dot{\varphi}$ 的功率谱中, 具有 H 对称的周期解没有偶次谐频, 计算结果确实如此 (见图 3(f)).

但是, 对于偶倍周期解 (即 $(2N, q)$ 解), 则没有 H 对称性 (见图 1). 证明如下:

若不然, 则有

$$\varphi(\tau + NT_0) = 2k\pi - \varphi(\tau), \quad (9)$$

$$\dot{\varphi}(\tau + NT_0) = -\dot{\varphi}(\tau), \quad (10)$$

$$\ddot{\varphi}(\tau + NT_0) = -\ddot{\varphi}(\tau), \quad (11)$$

将 (9)–(11) 式代入 (2) 式, 即得 $A \sin \Omega \tau = 0$, 这是矛盾的.

然而, 我们知道在靠近混沌区常常伴随着倍周期分岔序列, 如此一来, 周期解的 H 对称性和通向混沌的途径有了一定的联系. 只有当周期解的 H 对称性破缺, 才可能经倍周期分岔进入混沌. 换句话说, 对称区通向混沌的形式只能是直接的 (包括阵发混沌形式).

四、倍周期分岔的有关性质

以往理论指出: 在倍周期分岔通向混沌的过程中, 主序列由 $2^{n-1}P$ 的分岔点 μ_n 迅速收敛到 $n = \infty$ 的参数值 μ_∞ , 收敛方式是

$$\mu_n = \mu_\infty - \text{const} \cdot \frac{1}{\delta_n}. \quad (12)$$

其中

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} \quad (13)$$

是一个普适常数。对于一大类一维和非保守二维映象 $\delta = 4.669$ 。

我们仔细地研究了 $Q = 0.65$ 、 $A = 1.028-1.0385835$ 时的主序列分岔行为, 结果见表 1。

表 1

n	2	3	4	5	6
A_n	1.0280	1.03628	1.03810	1.038485	1.0385675
ΔA_n	$\pm 0.5 \times 10^{-4}$	$\pm 0.5 \times 10^{-5}$	$\pm 0.5 \times 10^{-5}$	$\pm 0.5 \times 10^{-6}$	$\pm 0.5 \times 10^{-6}$
δ_n	4.55	4.67	4.67		
$\Delta \delta_n$	± 0.06	± 0.09	± 0.12		

表 1 中 ΔA_n 和 $\Delta \delta_n$ 表示 A_n 和 δ_n 的计算误差。

由表 1 可见, 我们的结果与一般理论所得的结果比较符合。

另外, 我们还知道倍周期分岔过程中, 每分岔一次功率谱中就出现一批对应新分频及其倍频的尖峰, 而新出现的分频峰达到一定高度后就不再增长。这时, $2^n P$ 的功率谱中, 2^k 分频 ($k \ll n$) 的平均峰高 $\Phi(k)$ 与 2^{k+1} 分频的平均峰高 $\Phi(k+1)$ 之比是一个常数^[14]:

$$2\beta^{(2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\beta_k^{(2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(k)}{\Phi(k+1)} = 20.963. \quad (14)$$

取对数并表示为分贝得

$$10 \log_{10} \frac{\Phi(k)}{\Phi(k+1)} = 13.21 \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty).$$

对于前面考察过的 $2^n P$ 主序列, 我们所得到的结果与上述结论基本一致。图 4 是一幅 $64P$ 的功率谱。表 2 是我们的计算结果。

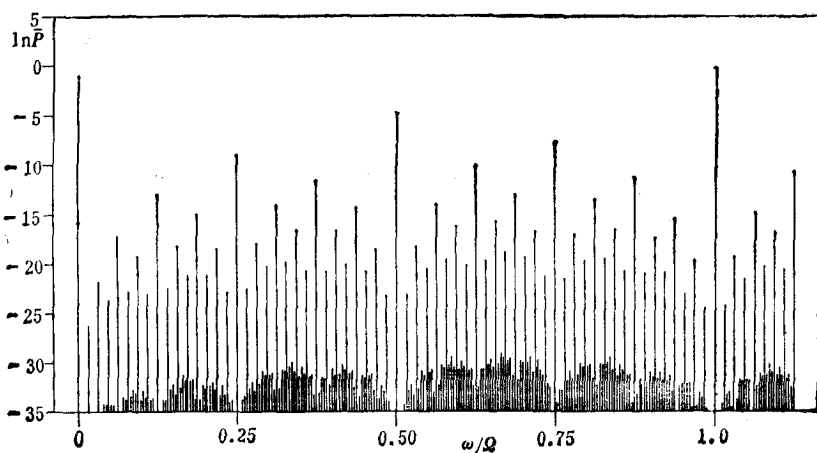


图 4 当 $r_0 = 0.4$, $s = -0.8$, $Q = 0.65$, $A = 1.0385835$ 时的 $64P$ 功率谱

表 2

k	1	2	3	4	5
$\Phi(k)/\Phi(k+1)$	29.298	19.027	21.945	21.181	31.461
$10\log_{10} \frac{\Phi(k)}{\Phi(k+1)}(\text{dB})$	14.67	12.79	13.41	13.26	14.97

五、小 结

本文所得的结果表明变阻尼摆方程(2)含有丰富的动力学行为,尤其是靠近混沌区。我们观察到由一维离散映象所预言的混沌开始的两种机制: Feigenbaum 的倍周期分岔机制及 Pomeau 和 Manneville 的阵发混沌机制^[15,16]。我们还可注意到一维离散映象的几个基本特征,在本系统亦基本具备。

此外,关于本系统阵发混沌的详细讨论、一维里亚普诺夫指数的计算,以及奇异吸引子的空间维数的研究,我们将另文讨论。

参 考 文 献

- [1] E. Ott, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 655.
- [2] J-P. Eckmann, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 643.
- [3] K. Tomita, *Phys. Reports*, **86**(1982), 114.
- [4] 郝柏林, *物理学进展*, **3**(1983), 329.
- [5] D. E. McCumber, *J. Appl. Phys.*, **39**(1968), 3113.
- [6] B. A. Huberman, J. P. Crutchfield and N. H. Packard, *Appl. Phys. Lett.*, **37**(1980), 750.
- [7] E. Ben-Jacob, Y. Braiman, R. Shainsky, Y. Imry, *Appl. Phys. Lett.*, **38**(1981), 822.
- [8] N. F. Pedersen and A. Davidson, *Appl. Phys. Lett.*, **39**(1981), 830.
- [9] E. Ben-Jacob, I. Goldhirsch, Y. Imry, S. Fishman, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1599.
- [10] W. J. Yeh and Y. H. Kao, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1888; *Appl. Phys. Lett.*, **42**(1983), 299.
- [11] A. H. MacDonald, M. Plischke, *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 201.
- [12] N. F. Pedersen, T. F. Finnegan and D. N. Langenberg, *Phys. Rev.*, **B6**(1972), 4151.
- [13] D. N. Langenberg, *Rev. Phys. Appl.*, **9**(1974), 35.
- [14] M. Nauenberg, J. Rudnik, *Phys. Rev.*, **B24**(1981), 493.
- [15] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **19**(1978), 25.
- [16] P. Manneville and Y. Pomeau, *Phys. Lett.*, **A75**(1979), 1; *Commun. Math. Phys.*, **74**(1980), 189.

DYNAMICAL BEHAVIOR OF RF-BIASED JOSEPHSON JUNCTIONS (I)

WANG ZI-DAN YAO XI-XIAN

(*Department of Physics, Nanjing University*)

ABSTRACT

A lot of numerical investigation of equations of rf-biased Josephson junctions is carried out, in which the interference term is included in current-phase relation. Chaotic behavior, sequence of period-doubling bifurcations, inverse sequence of chaotic band and intermittent chaos are found separately in various parameter regions. The convergent factor δn of $2^n P$ sequence and the ratio $\Phi(k)/\Phi(k+1)$ are calculated, where $\Phi(k)$ is the average height of the peaks corresponding to $2^k P$ in the power spectrum. We also study the symmetry possessed by period solutions and its relation to the nature of approach to chaos