

Josephson 结的动力学行为 (II)*

汪 子 丹 姚 希 贤

(南京大学物理系)

1984 年 7 月 29 日收到

提 要

本文对射频电流驱动下的包含干涉项电流的 Josephson 结系统的阵发混沌行为进行了研究,得到的标度关系与理论预言的相符.此外,我们计算了一些参数下的里亚普诺夫指数以及由此引入定义的吸引子的维数 d_L ,并且还用盒子计数法计算了几组参数下奇异吸引子的柯尔莫哥洛夫容量 d_c ,其值与 d_L 相近.

一、引 言

对 Josephson 结的混沌行为的研究,既是基本的,同样也有实际价值.一方面,Josephson 结的重要特征是具有很好的非线性特性,这对于各种混沌态的细致研究是适宜的.另一方面,对混沌行为及其发生区域的了解,对解决 Josephson 器件的一些噪声问题是有用的.近来,关于射频电流驱动的结的一些研究表明,在这个非线性系统中确实出现混沌行为^[1-6].在作者的前一篇文章中^[7],在 McCumber 模型的基础上,计入干涉项电流,得如下的微分方程:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{1}{\sqrt{\beta_c}} \frac{d\varphi}{d\tau} (1 + \varepsilon \cos \varphi) + \sin \varphi = A \sin(\Omega\tau). \quad (1)$$

其中, φ 是结两边超导体的位相差, $\beta_c = 2eI_c R^2 C / \hbar$ 是 McCumber 参数, Ω 是驱动电流的归一化频率 (相对于结等离子振荡频率 $\omega_0 = \left(\frac{2eI_c}{\hbar C}\right)^{1/2}$), A 是驱动电流的归一化振幅 (相对于临界超电流 I_c), C 和 R 分别是结电容和结电阻, $\tau = \omega_0 t$.

在文献 [7] 中,对方程 (1) 进行了大量的数值计算,给出了一些参数区域的解的动力学性质,其中对倍周期分岔行为、周期解的对称性进行了较为详细的研究.本文中,我们将对解的另一些性质进行研究.首先,对通向混沌的另一种过渡方式——阵发混沌行为进行考察.然后,再涉及里亚普诺夫指数的计算,并且根据两种不同的定义分别计算了吸引子的空间维数.

二、阵发混沌现象

阵发混沌发生于切分岔起点之前,表现在时间行为上忽而周期,忽而混乱,随机地在

* 中国科学院科学基金资助的课题.

两者之间跳跃。Manneville 和 Pomeau 首先给出了这种现象的理论解释^[8]。并且一般说来,它与倍周期分岔是孪生现象,凡是观察到倍周期分岔的系统,原则上均应有阵发混沌。

在求方程(1)的数值解中,仍取初始条件: $\varphi(0)=0, \left. \frac{d\varphi}{d\tau} \right|_0 = 0$, 且参数 $\varepsilon = -0.8$, $\beta_c = 6.25$ (本文中全是如此)。在 $Q = 0.5$ 时,我们通过绘出 $\dot{\varphi}, \varphi$ 随时间的变化曲线(略去了暂态过程),在靠近 $3P$ 区观察到了阵发混沌现象(见图 1(a))。当驱动电流的振幅 A 大于阈值(约 0.79966),解是以三倍驱动电流的周期 ($3T_0$) 作稳定振荡(见图 1(b))。当振幅 A 减小到阈值以下, $\dot{\varphi}(\tau)$ 和 $\varphi(\tau)$ 的形状变得不稳定,周期振荡的“层流”被阵发的“湍流”打断,而在这些“湍流”之间的振荡,除了在幅值上有较小的变化外,形状是规则的,它们被称为准周期状态(见图 1(a))。当 A 进一步减小,准周期振荡越来越频繁地被阵发“湍流”打断。最后,规则的振荡和“湍流”的爆发难以区分,完全进入了混沌状态(见图 1(c))。

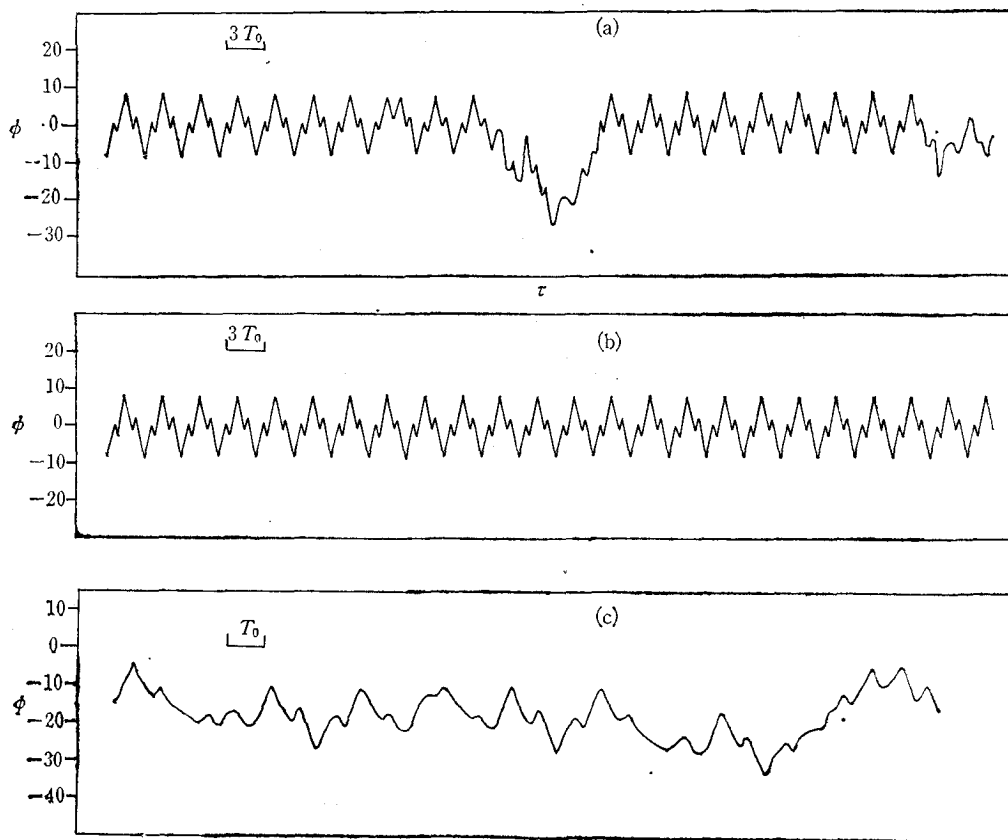


图 1 $Q = 0.5$, A 在阈值 A_c 附近, φ 随时间的变化曲线 (a) $A = 0.79945$, $\varphi(\tau)$ 混乱爆发间有准周期振荡; (b) $A = 0.7998$, $\varphi(\tau)$ 随时间周期振荡; (c) $A = 0.79$, 混沌态

根据 Manneville 和 Pomeau 的模型,在阵发混沌的区域,绘出变量 Y 的后一个值 Y_{n+1} 依赖于前一个值 Y_n (相隔一个准周期) 的图形, $Y_{n+1} - Y_n$ 的曲线将是简单的抛物线形状,且与 45° 分角线近似相切(不相交)。这样在 $Y_{n+1} - Y_n$ 曲线和 45° 分角线之间形成

一个狭长的“走廊”。若系统变量进入“走廊”，就出现了多次迭代，在“走廊”中间的行为给出准周期振荡。当迭代到“走廊”的另一端，准周期振荡的振幅离散，导致“湍流”的发生。经过一些大幅度跳跃之后，又可能进入这个“走廊”。从 $Y_{n+1} - Y_n$ 的抛物线形状出发，Manneville 和 Pomeau 预言了标度关系

$$N \propto (A_c - A)^{-1/2}. \quad (2)$$

这里， N 是准周期区域振荡的数目。更一般的结果是^[9]

$$N \propto (A_c - A)^{-(1-\frac{1}{\sigma})} = (A_c - A)^{\sigma} \quad (3)$$

$\sigma = -\frac{1}{2}$ ($z = 2$) 即回到 Manneville 和 Pomeau 的结果。我们的计算结果与上述的完

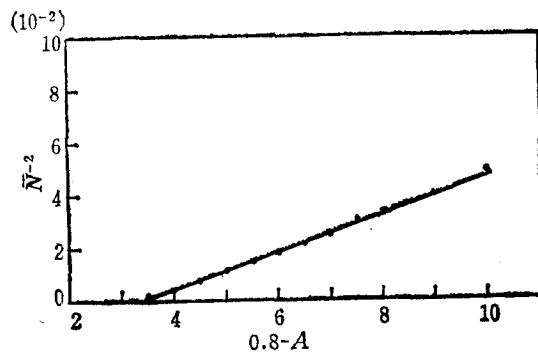


图3 $Q = 0.5, \bar{N}^{-2} - (A_c - A)$ 的关系

果，可见此参数区域的临界指数 $\sigma = -1/2$ 。

三、里亚普诺夫指数和吸引子的维数

为了便于讨论，将方程(1)化成一阶自治的常微分方程组：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= f_1(x, y, z) = A \sin z - \frac{1}{\sqrt{\beta_c}} (1 + \varepsilon \cos y)x - \sin y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= f_2(x, y, z) = x, \\ \frac{dz}{d\tau} &= f_3(x, y, z) = Q. \end{aligned} \quad (4)$$

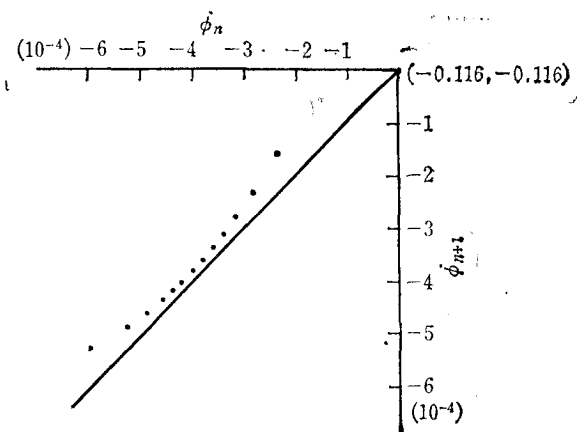


图2 $Q = 0.5, A = 0.7996$, 对应 $3P$ 阵发混沌的 $\phi_{n+1} - \phi_n$ 的图形

全一致。

图2绘出了准周期振荡中的

$$\phi_{n+1} - \phi_n$$

的相应点，得到的曲线与 Manneville 和 Pomeau 得到的图相似(见文献[8]的图3)。我们记下每个准周期区振荡数目 N ，并对多个准周期区振荡数目 N 进行平均，得 $\bar{N}$ 。

$$\bar{N}^{-2} - (A_c - A)$$

的点在图3中画出，直线表示对应理论预言的标度关系的计算机实验结果

并附加初始条件

$$z|_0 = 0. \quad (5)$$

其中,

$$x = \dot{\varphi}, y = \varphi. \quad (6)$$

我们知道非线性常微分方程组(4)的解的局部稳定性,由线性化的里亚普诺夫矩阵

$$U_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \right|_{r=r_0} \quad (r_0 \text{ 是方程(4)的解}) \quad (7)$$

的本征值决定. 而解的轨道的整体特征则是由三个一维里亚普诺夫指数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 决定. $(-, -, -)$ ——0 维不动点, $(0, -, -)$ ——一维极限环, $(0, 0, -)$ ——二维环面, $(+, 0, -)$ ——分数维数的奇异吸引子. 下面我们通过计算 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 来了解轨道的整体特征.

实际的计算总是把微分方程离散化成差分方程来进行的,即相当于把微分方程(4)用某一组代数方程

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F_1(x_n, y_n, z_n, h); \\ y_{n+1} &= F_2(x_n, y_n, z_n, h); \\ z_{n+1} &= F_3(x_n, y_n, z_n, h) = z_n + \Omega T_0 \end{aligned} \quad (8)$$

来代替. 下标 $n+1, n$ 所标出的时间相差一个周期 T_0 , h 是时间积分步长. 若差分格式精度高, h 很小, (8) 式中的 F_i 近似与 h 无关, 接近于 (4) 式的真正解. 里亚普诺夫指数^{[10] 1)}

$$\lambda^{(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \ln |A_n^{(i)}|. \quad (9)$$

$A_n^{(i)}$ 是雅可比矩阵 $J^{(n)} = J_n J_{n-1} \cdots J_1$ 的本征值.

$$J_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} & \frac{\partial F_1}{\partial y_k} & \frac{\partial F_1}{\partial z_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_k} & \frac{\partial F_2}{\partial y_k} & \frac{\partial F_2}{\partial z_k} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_k} & \frac{\partial F_3}{\partial y_k} & \frac{\partial F_3}{\partial z_k} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

由 (8) 式中 F_3 的表示式, 有

$$J_k = \begin{pmatrix} \boxed{j_k}_{2 \times 3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

即得

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{j}_{2 \times 3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

可见, 描述 z 方向运动的 $\lambda^{(3)} = 0$.

对于 $\lambda^{(1)}$ 和 $\lambda^{(2)}$, 很难用 (9) 式计算, 而是用 (4) 式的线性化方程的某种差分方程来

1) 本文的 λ 与文献 [10] 的定义稍有差别, 是对数关系.

计算(只考虑 x, y). 根据 Benettin 等人提出的方法^[11]

$$\lambda^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \Delta \tau} \sum_{i=1}^n \ln \frac{|\mathbf{d}_i|}{|\mathbf{d}|}. \quad (13)$$

其中, $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{d}_i$ 含义是: 某一时刻小矢量 $\mathbf{d} = (\delta x, \delta y)$, 按线性化微分方程:

$$\delta r_j = U_{jk} \delta r_k (k = 1, 2; j = 1, 2)$$

积分一步 $\Delta \tau$, 得 $\mathbf{d}_i$, 将其长度沿 $\mathbf{d}_i$ 直线方

向变为 $|\mathbf{d}|$ (得 $\frac{\mathbf{d}_i}{|\mathbf{d}_i|} |\mathbf{d}|$), 重复上述过程

(见图 4). 我们在参数 $\Omega = 0.55$, $A = 0.65$ —

0.85 区间, 进行了计算. 计算过程中发现,

$\lambda^{(1)}$ 的结果对 n 及初始点的选择和初始 $\mathbf{d}$ 的

方向的变化不敏感, 这与一般结论是一致的.

另外, 有^[12]

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} &= \lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{-1}{\sqrt{\beta_c}} (1 + \varepsilon \cos y_{(i)}). \end{aligned} \quad (14)$$

由 (14) 式算得 $\lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 再根据 $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(3)}$, 即得 $\lambda^{(2)}$. 对于同一组参数, 将 $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ 按大小顺序排列得 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ (计算结果见图 5). 在 $A = 0.65$ —0.685 和 0.74—0.785, λ_i 的符号是 (0, —, —), 对应周期解. $A = 0.69$ —0.735 和 0.79—0.85, λ_i 的符号是 (+, 0, —), 对应混沌解. 这与文献 [7] 中用其它分析方法得到的结果一致 (见文献 [7] 中的图 1).

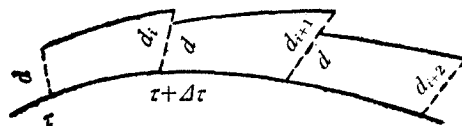


图 4

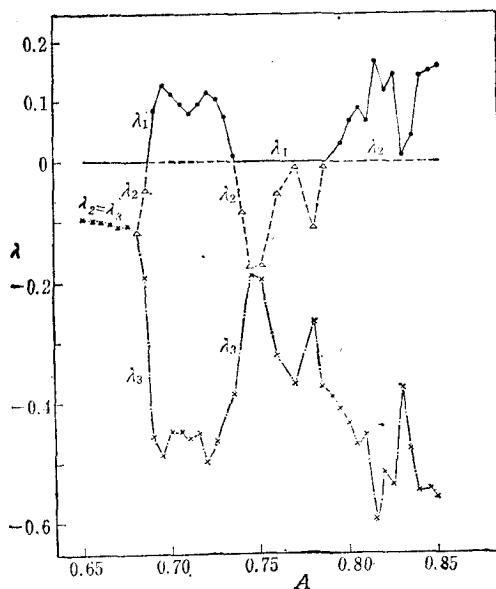


图 5 $\Omega = 0.55$, 三个里亚普诺夫指数随振幅 A 的变化曲线

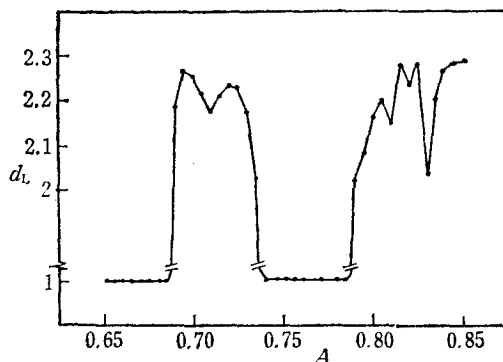


图 6 $\Omega = 0.55$, 吸引子维数 d_L 随振幅 A 的变化曲线

Kaplan-Yorke 利用里亚普诺夫指数引入一种维数的定义^[43], 即如果第 $j+1$ 个指数开始是负的, 则

$$d_L = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i. \quad (15)$$

根据 (15) 式, 容易通过计算得到 d_L (见图 6),

而吸引子维数的最基本最直观定义是柯尔莫哥洛夫容量^[9]

$$d_c = \lim_{\rho \rightarrow 0} \ln n_\rho / \ln \frac{1}{\rho}. \quad (16)$$

其中, n_ρ 是以 n 维(轨迹运动的相空间维数)边长为 ρ 的小盒子覆盖吸引子得到含有吸引子点集的盒子数. 我们用盒子计数法粗略地计算了四组参数下的奇异吸引子的 d_c . 为了计算方便, 应把已知的维数消去. 方法是先将 (4) 式写成耦合振子形式^[44]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{\sqrt{\beta_c}} (1 + \varepsilon \cos y)x - \sin y + Au, \\ \dot{y} &= x, \quad \dot{u} = Qv, \quad \dot{v} = -Qu, \\ u|_0 &= 0, \quad v|_0 = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

显然, 轨线在 (u, v) 平面单位圆上的运动是已知的, 它对维数贡献为 1. 然后, 考虑轨线与 (u, v) 平面坐标轴有固定夹角的 (x, y) 平面的交点所构成的点集的维数. 这个点集相当于在 (15) 式基础上(其中 $z = Qv$) 用周期 $2\pi/Q$ 采样所获得的点集. 吸引子维数即为点集维数加 1. 表 1 给出了计算结果且与 d_L 对照. 从表 1 可见, 两者结果是相近的.

表 1 $Q = 0.55$

A	0.71	0.80	0.835	0.85
d_c	2.19 ± 0.02	2.17 ± 0.04	2.20 ± 0.01	2.24 ± 0.04
d_L	2.18	2.16	2.20	2.28

四、结 语

本文的结果进一步表明了 Josephson 结系统具有丰富的非线性动力学行为. 通过具体计算, 验证了阵发混沌过程中的标度性质. 此外, 通过计算里亚普诺夫指数, 我们看到, 如一般结论, 里氏指数确是刻画轨道整体性质的特征量. 并且, 如所预期, 根据里氏指数计算的奇异吸引子的维数与用盒子计数法得到的结果相近.

参 考 文 献

- [1] B. A. Huberman, J. P. Crutchfield and N. H. Parkard, *Appl. Phys. Lett.*, **37**(1980), 750.
- [2] E. Ben-Jacob, Y. Braiman, R. Shainsky, Y. Imry, *Appl. Phys. Lett.*, **38**(1981), 822.
- [3] N. F. Pedersen and A. Davidson, *Appl. Phys. Lett.*, **39**(1981), 830.
- [4] E. Ben-Jacob, I. Goldhirsch, Y. Imry, S. Fishman, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1599.
- [5] W. J. Yeh and Y. H. Kao, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1888; *Appl. Phys. Lett.*, **42**(1983), 299.
- [6] A. H. MacDonald, M. Plischke, *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 201.
- [7] 汪子丹、姚希贤, 本刊本期.

- [8] P. Manneville and Y. Pomeau, *Phys. Lett.*, **75A**(1979), 1; *Commun., Math. Phys.*, **74**(1980), 189.
- [9] 郝柏林, 物理学进展, **3**(1983), 329.
- [10] E. Ott, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 655.
- [11] G. Benettin, L. Gulgani and J. M. Streicyn, *Phys. Rev.* **A14**(1976), 2338.
- [12] I. Shimada, T. Nagashima, *Progr. Theor. Phys.*, **61**(1979), 1605.
- [13] J. Kaplan, J. Yorke, *Lecture Notes in Math.*, **730**(1979), 204.
- [14] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, 物理学报, **3**(1984), 437.

DYNAMICAL BEHAVIOR OF RF-BIASED JOSEPHSON JUNCTIONS (II)

WANG ZI-DAN YAO XI-XIAN

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

Numerical investigations of a differential equation describing a rf-biased Josephson junction, in which the interference term current is included, are carried out in some parameter region. The existence of the intermittant transition to chaos is obtained and the critical exponent of the scaling law is determined in agreement with theoretical predictions. Furthermore, the Lyapunov exponent is calculated for several parameters, then the fractal dimension of strange attractor d_L is obtained, its dependence on the Lyapunov exponent is defined by Kaplan and Yorke. In addition, the Kolmogorov capacity of strange attractor d_c is also calculated by box-counting algorithm. Such calculated values of d_L and d_c are close to each other as expected.