

关于纯引力共形反常

郭 汉 英 吴 可

(中国科学院理论物理研究所)

1984 年 7 月 21 日收到

提 要

本文采用几何和拓扑的方法,讨论弯曲时空中的纯引力共形反常,并得到了纯引力共形反常的新的表达式 $\alpha \varepsilon^{abcd} Q_{ab} \wedge Q_{cd} + \beta \varepsilon^{abcd} \mathcal{K}_{ab} \wedge \mathcal{K}_{cd}$, 其中 α, β 是任意常数, Q_{ab} 与 $\mathcal{K}_{ab}$ 分别是 Riemann 曲率 2-形式与 Thomas 引入的共形不变曲率 2-形式. 这里, 第一项正比于 Euler 类, 第二项除了包含通常熟知的 Weyl 张量平方项以外, 还含有其它共形不变的不变量.

最近, 有关规范反常的拓扑背景的研究取得了一些进展. 不仅阿贝耳反常与示性类, 以及指数定理的联系已是熟知的事实, 而且, 非阿贝耳反常与拓扑的联系也被揭示出来^[1,2]. $2n$ 维空间中的非阿贝耳规范群的规范反常可以由 $2n+1$ 维空间中相应于这个规范群的第二拓扑不变量在无穷小规范变换下的改变量得到. 显然, 这具有深刻的拓扑背景.

我们知道, 除了规范反常之外, 在量子场论中还有一种重要的反常——共形反常. 关于这种反常的量子场论处理已有大量的研究^[3]. 最近, 这种反常的拓扑起源也开始有所讨论^[4]. 本文将提出一种新的方法来计算纯引力的共形反常, 并得到这种纯引力反常的一种新的表达式. 对于 4 维紧致时空, 我们得到的纯引力共形反常是第二 Euler 类和 $\varepsilon^{abcd} \mathcal{K}_{ab} \wedge \mathcal{K}_{cd}$ 的线性组合, 其中 $\mathcal{K}_{ab}$ 是 Thomas 引入的共形不变曲率 2-形式^[5]. 这一项是我们得到的新结果. 它不仅包含通常已知的 Weyl 张量平方项, 而且还含有其他共形不变量. 我们采用的方法, 可以看作是文献 [1] 方法的推广. 仍以 4 维流形为例. 由于 $\pi_4(SO(4)) = 0$, 4 维紧致时空可以自然地嵌入到一个紧致的 5 维流形之中. 同时, 4 维时空的共形变换自然诱导 5 维流形上的拓扑不变量和几何不变量作相应的变更. 这些变更表现在 4 维时空上, 就是纯引力共形反常.

在 5 维紧致流形上可以定义第 3 Euler 类的第二拓扑不变量, 略去常数因子, 可以写为如下的 5 形式^[6]:

$$\begin{aligned} \pi^{5,E} = & \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6} (15 Q_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge Q_{\alpha_3 \alpha_4} \wedge \omega_{\alpha_5 \alpha_6} \\ & - 20 Q_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \omega_{\alpha_3 \alpha_4} \wedge \omega_{\alpha_5 \alpha_6} \wedge \omega_{\alpha_1 \alpha_6} \\ & + 8 \omega_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \omega_{\alpha_3 \alpha_4} \wedge \omega_{\alpha_5 \alpha_6} \wedge \omega_{\alpha_1 \alpha_6} \wedge \omega_{\alpha_2 \alpha_3}) \quad \alpha_6 = 6, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_6 = 1, \dots, 6$, $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_6}$ 是全反对称张量, 且 $\varepsilon^{123456} = 1$. $\omega_{\alpha_1 \alpha_2}$ 是利用正交标架表示的 Christoffel 符号, 即 Ricci 旋转系数的联络 1 形式

$$\omega_{\alpha_1 \alpha_2} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \rho \end{matrix} \right\} dx^\rho e_{\alpha_1}^\nu e_{\alpha_2}^\mu + e_{\alpha_1 \mu} dx^\mu e_{\alpha_2}^\mu. \quad (2)$$

$Q_{\alpha_1\alpha_2}$ 是相应的 Riemann 曲率 2-形式

$$Q_{\alpha_1\alpha_2} = d\omega_{\alpha_1\alpha_2} - \omega_{\alpha_1\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha_2}. \quad (3)$$

直接的计算可以证明,在无穷小变换

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \omega + \delta\omega \\ Q &\rightarrow Q + d\delta\omega - \delta\omega \wedge \omega - \omega \wedge \delta\omega \end{aligned} \quad (4)$$

下, $\pi^{5,E}$ 在 5 维流形上的改变量 $\delta\pi^{5,E}$ 为

$$45\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6}\delta\omega_{\alpha_1\alpha_2}\wedge Q_{\alpha_3\alpha_4}\wedge Q_{\alpha_5\alpha_6} \quad \alpha_6 = 6. \quad (5)$$

取 $\delta\omega = \delta\omega_{\alpha_1\alpha_2}$ 为 4 维时空上的共形变换诱导到高一维流形上的无穷小变换, 则改变量 $\delta\pi^{5,E}$ 在 4 维时空上的表现

$$45\varepsilon^{abcd}Q_{ab}\wedge Q_{cd} \quad (6)$$

就对纯引力共形反常有贡献。事实上,这就是我们熟知的纯引力共形反常中的一项,即 4 维流形上的第 2 Euler 类。

除此之外,我们还应当考虑 4 维上的共形不变的几何量在延拓到 5 维后所构成的 5 维上的几何不变量的贡献。有关共形几何的理论告诉我们,对于 n 维流形,可以引入 Thomas 定义的共形不变联络^[5]:

$$\mathcal{K}_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} - \frac{1}{4} \left(\delta_j^i \left\{ \begin{matrix} l \\ lk \end{matrix} \right\} + \delta_k^i \left\{ \begin{matrix} l \\ lj \end{matrix} \right\} - g_{jk} g^{il} \left\{ \begin{matrix} h \\ hl \end{matrix} \right\} \right). \quad (7)$$

它可以表为由度规张量 g_{ij} 构造的“拟”张量:

$$G_{ij} = (\det g)^{-1/n} g_{ij} \quad (8)$$

的 Christoffel 记号,相应的共形不变曲率张量为

$$\mathcal{K}_{jkl}^i = -\partial_l \mathcal{K}_{jk}^i + \partial_k \mathcal{K}_{jl}^i + \mathcal{K}_{ml}^i \mathcal{K}_{jk}^m - \mathcal{K}_{mk}^i \mathcal{K}_{jl}^m. \quad (9)$$

由于“拟”张量(8)式在共形变换下是不变的,显然相应的联络(7)式与曲率(9)式也是共形不变的。

完全类似于对 Riemann 曲率张量的讨论,我们可以定义 5 维上的几何不变量:

$$\begin{aligned} \pi^{5,K} = & \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6} (15\mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_2}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_3\alpha_4}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_5\alpha_6} \\ & - 20\mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_2}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_3\alpha_6}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_4\alpha_5}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_6} \\ & - 8\mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_6}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_2\alpha_6}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_3\alpha_6}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_4\alpha_6}\wedge\mathcal{K}_{\alpha_5\alpha_6}). \end{aligned} \quad (10)$$

应当指出,在 4 维时空的共形变换所诱导出的 5 维变换下, $\pi^{5,K}$ 并不是共形不变的,这是因为“拟”张量的定义(8)式依赖于流形的维数。这样,类似于有关 Euler 第二拓扑不变量的讨论 ($\pi^{5,K}$ 在形式上与 $\pi^{5,E}$ 完全对应),在 4 维时空的共形变换下,(10)式会表现出如下的反常项:

$$\varepsilon^{abcd}\mathcal{K}_{ab}\wedge\mathcal{K}_{cd}. \quad (11)$$

显然,这个反常项和通常给出的另一纯引力反常项,即 Weyl 张量的平方项:

$$C_{abcd}C^{abcd} \quad (12)$$

的表现形式是不一样的,但(11)式中已经包含了 Weyl 张量的平方项(12)式,除此之外,还包含了一些其它的反常项,它们在共形变换下也是不变的。这是因为,共形不变曲率张量 $\mathcal{K}_{jkl}^i$ 与 Weyl 张量的关系为

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ikl}^i = C_{ikl}^i + \frac{1}{2}(\delta_l^i \mathcal{K}_{ik} - \delta_k^i \mathcal{K}_{il} + G^{ih} \mathcal{K}_{hl} G_{ik} - G^{ih} \mathcal{K}_{hk} G_{il}) \\ - \frac{1}{6} \mathcal{K}(\delta_l^i G_{ik} - \delta_k^i G_{il}).\end{aligned}\quad (13)$$

其中

$$\mathcal{K}_{ik} = \mathcal{K}_{iki}^i, \quad \mathcal{K} = G^{ik} \mathcal{K}_{ik}. \quad (14)$$

总之,按照上述分析,纯引力共形反常应写为(6)式与(11)式的线性组合

$$\alpha \varepsilon^{abcd} Q_{ab} \wedge Q_{cd} + \beta \varepsilon^{abcd} \mathcal{K}_{ab} \wedge \mathcal{K}_{cd} \quad (15)$$

其中 α 与 β 是任意待定参数. (15)式就是我们所得到的关于纯引力共形反常的新的表达式. 它不仅包含通常表达式中已有的 Euler 类和 Weyl 张量平方,而且还包含其它共形不变的几何量.

最后,我们指出,本文的方法和结果可以直接推广到高维. 有关引进 Thomas 共形联络和共形不变曲率的考虑,在推导纯引力共形反常的其它方法中也应有所反映. 例如,如果考虑到这一点, Bonora 等人^[4]利用上同调理论得到的共形反常的一组基可能是不完备的.

参 考 文 献

- [1] Chou Kuang-chao, Guo Han-ying, Wu Ke and Song Xing-chang, *Phys. Lett.*, **134B**(1984), 67; *Commun Theor. Phys. (Beijing, China)*, **3**(1984) 125 以及所引文献.
- [2] B. Zumino, Chiral Anomalies and Differential Geometry, Lectures given at Les Houches, August, (1983). Preprint LBL-16747, UCB-PTH-83/16, B. Zumino, Wu Yong-shi and A. Zee, UC-Berkeley University of Washinton preprint (Revised) 40048—18p3, (1983).
- [3] 例如见 N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982 以及所引文献.
- [4] L. Bonora, P. Cotta-Ramusino and C. Reina, *Phys. Lett.*, **126B**(1983), 305.
- [5] T. Y. Thomas, *The Differential Invariants of Generalized Spaces*, Cambridge University Press, (1934).
- [6] S. S. Chern, *Ann. Math.*, **46**(1945), 674.

ON THE CONFORMAL ANOMALY FOR PURE GRAVITY

GUO HAN-YING WU KE

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Based upon the geometrical and topological method, the conformal anomaly for pure gravity in a curved space-time is discussed, and a new expression $\alpha \varepsilon^{abcd} Q_{ab} \wedge Q_{cd} + \beta \varepsilon^{abcd} \mathcal{K}_{ab} \wedge \mathcal{K}_{cd}$ of the conformal anomaly for pure gravity is obtained, where α, β are two arbitrary constants, Q_{ab} and $\mathcal{K}_{ab}$ are Riemann curvature 2-form and conformal invariant curvature 2-form respectively introduced by Thomas. In the expression the first term is proportional to Euler class, the second term contains not only the ordinary Weyl tensor square but also the other conformal invariants.