

闭路格林函数中的相互作用绘景

徐 宏 华

(上海市普陀区业余大学)

1984年11月15日收到

提 要

本文证明了闭路格林函数中所引入的相互作用绘景应是 Incoming 相互作用绘景, 微扰展开也是在这个意义上进行的.

文献[1]中在海森堡绘景和相互作用绘景之间引入了如下的变换关系:

$$|a, t\rangle_I = \hat{U}(t, -\infty)|a\rangle_H, \quad (1)$$

$$\hat{A}_I(\mathbf{x}, t) = \hat{U}(t, -\infty)\hat{A}_H\hat{U}^{-1}(t, -\infty). \quad (2)$$

这里 $|a, t\rangle$ 为系统的态矢量, $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ 为场算子, 脚标自明. $\hat{U}$ 为相互作用绘景中的演化算子

$$\hat{U}(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \hat{H}_{int}(t') dt' \right\} \quad t > t_0. \quad (3)$$

上式中的 $\hat{H}_{int}(t)$ 为相互作用绘景中系统的相互作用哈密顿量. 在相互作用绝热浸入的假设下, 变换关系(1), (2)式规定了相互作用绘景和海森堡绘景在 $t = -\infty$ 时重合. 由(1)–(3)式所给出的绘景变换多年来一直被引用, 特别在闭路格林函数理论中引用得较多^[2,3]. 然而, 这样引入的相互作用绘景是否与通常的相互作用绘景完全等价? $\hat{H}_{int}(t)$ 的具体形式是什么? 是否仍如文献[1]中所取的形式, 即

$$\hat{H}_{int}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_{int} e^{-i\hat{H}_0 t}. \quad (4)$$

由于文献[1]的作者当时处理的是 $T = 0$ 的微扰理论, 因而采用了不严格的形式, 未给这个问题以澄清, 以后也未见过这方面的仔细讨论. 实际上, 正如本文将要证明的, 由关系(1)–(3)式所引入的相互作用绘景是量子场论中所用的 Incoming 相互作用绘景^[4], 而由(4)式所规定的却是通常的相互作用绘景. 虽然这两种相互作用绘景中的场算子都满足自由场运动方程, 但 Incoming 相互作用绘景中的场算子却具有海森堡算子的性质, 即可以进行时间平移, 这样在 $T \rightarrow 0$ 时, 微扰展开后的 Wick 定理就有不同的形式. 因此这两种形式的相互作用绘景是不完全等价的. 例如在文献[5]中, 由于采用了 Incoming 相互作用绘景, 从而将松原函数微扰展开的 Wick 定理推广到实时的情形.

我们重新考察各绘景之间的变换. 为简单起见我们取 $t = 0$ 时重合的薛定格绘景与海森堡绘景之间的变换, 即

$$|a\rangle_H = e^{i\hat{H}_0 t} |a, t\rangle_S, \quad (5)$$

$$\hat{A}_H(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A}_S(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}_0 t}. \quad (6)$$

设薛定格绘景与相互作用绘景之间的变换关系为

$$|a, t\rangle_I = \hat{R}(t) |a, t\rangle_S, \quad (7)$$

$$\hat{A}_I(x, t) = \hat{R}(t) \hat{A}_S(x) \hat{R}^{-1}(t). \quad (8)$$

绘景变换不改变物理量的平均值, 这要求 $\hat{R}(t)$ 必须是么正的. 设 $\hat{R}(t)$ 满足方程

$$\frac{\partial \hat{R}(t)}{\partial t} = i \hat{R}(t) \hat{H}_0 \quad (9)$$

或

$$\frac{\partial \hat{R}^+(t)}{\partial t} = -i \hat{H}_0 \hat{R}^+(t), \quad (10)$$

则由(7)式得到

$$i \frac{\partial}{\partial t} |a, t\rangle_I = \hat{H}_{\text{int}}^I(t) |a, t\rangle_I, \quad (11)$$

其中

$$\hat{H}_{\text{int}}^I(t) = \hat{R}(t) \hat{H}_{\text{int}} \hat{R}^{-1}(t). \quad (12)$$

(11)式的形式解为

$$|a, t\rangle_I = \hat{u}(t, t_0) |a, t_0\rangle_I, \quad (13)$$

$$\hat{u}(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \hat{H}_{\text{int}}^I(t') dt' \right\} \quad t > t_0. \quad (14)$$

将(8)式对时间求偏导数并利用(9),(10)式, 可得

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_I(x) = [\hat{A}_I(x), \hat{H}_0^I(t)] \quad (15)$$

$$\hat{H}_0^I(t) = \hat{R}(t) \hat{H}_0 \hat{R}^{-1}(t). \quad (16)$$

欲求解(9)或(10)式, 需要规定初值条件. 若取

$$\hat{R}(0) = I, \quad (17)$$

(9)式的解为

$$\hat{R}(t) = e^{i \hat{H}_0 t}. \quad (18)$$

这样就可得到通常的相互作用绘景, 在 $t = 0$ 时, 它与海森堡绘景、薛定格绘景重合. 若涉及到非平衡态统计, 例如闭路格林函数, 不仅要考虑系统沿时间正支演化, 也要考虑沿时间负支演化, 这时取初始条件(17)式是不适宜的. 根据绝热假释, $t = -\infty$ 时相互作用消失, 从而相互作用绘景和海森堡绘景重合. 以此为初值条件, 则有

$$|a, -\infty\rangle_I = |a\rangle_H. \quad (19)$$

由(13)式,

$$|a, t\rangle_I = \hat{u}(t, -\infty) |a\rangle_H, \quad (20)$$

从而场算子之间有相应的变换关系

$$\hat{A}_I(x) = \hat{u}(t, -\infty) \hat{A}_H(x) \hat{u}^{-1}(t, -\infty). \quad (21)$$

将(5)式代入(20)式并比较(7)式, 得到

$$\hat{R}(t) = \hat{u}(t, -\infty) e^{i \hat{H}_0 t}. \quad (22)$$

由(12),(22)式可看出, (14)式是一个待解的自洽泛函方程, 当然难以直接求解. 幸好场

论中已为我们提供了解的形式. 取

$$\hat{u}(t, -\infty) = e^{i\hat{H}t} \hat{U}(0, -\infty) e^{-i\hat{H}t}, \quad (23)$$

其中 $\hat{U}$ 仍由(3),(4)式给出. 由(22),(23)式得

$$\hat{R}(t) = e^{i\hat{H}t} U(0, -\infty). \quad (24)$$

易知(24)式是么正的, 且满足方程(9)式. 这里已经利用了熟知的关系^[4]

$$\hat{H}\hat{U}(0, -\infty) = \hat{U}(0, -\infty)\hat{H}_0. \quad (25)$$

利用(23)式可得

$$\hat{u}(t, t_0) = e^{i\hat{H}t} \hat{U}(0, -\infty) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \hat{U}^{-1}(0, -\infty) e^{-i\hat{H}t_0}. \quad (26)$$

利用(25)式不难验证(26)式是微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, t_0) = -i\hat{H}_{\text{int}}^{\dagger}(t) \hat{u}(t, t_0) \quad (27)$$

满足初值条件 $\hat{u}(t_0, t_0) = 1$ 的解. 从而也是方程(14)的唯一解. 且

$$\hat{H}_{\text{int}}^{\dagger}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{U}(0, -\infty) \hat{H}_{\text{int}} \hat{U}^{-1}(0, -\infty) e^{-i\hat{H}t}. \quad (28)$$

显然(28)与(4)式是不同的. 重要的是, 由(23),(21)式得

$$\begin{aligned} \hat{A}_I(x) &= e^{i\hat{H}t} \hat{U}(0, -\infty) e^{-i\hat{H}t} \hat{A}_H(x) e^{i\hat{H}t} \hat{U}^{-1}(0, -\infty) e^{-i\hat{H}t} \\ &\equiv \hat{A}_{\text{in}}(x). \end{aligned} \quad (29)$$

(29)式中的 $\hat{A}_{\text{in}}(x)$ 正是量子场论中所引入的 in-场算子^[4]. 它既具有海森堡算子的性质, 即

$$\hat{A}_I(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A}_I(\mathbf{x}, 0) e^{-i\hat{H}t}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \hat{A}_I(x)}{\partial t} = i[\hat{H}, \hat{A}_I(x)], \quad (31)$$

又满足自由场运动方程. 这是因为

$$\hat{H}_0 = e^{i\hat{H}t} \hat{U}(0, -\infty) \hat{H}_0 \hat{U}^{-1}(0, -\infty) e^{-i\hat{H}t} = \hat{H}. \quad (32)$$

这些性质是众所周知的.

以上我们证明了由(1)–(3)式所规定的相互作用绘景就是 Incoming 相互作用绘景, 而相应的 $\hat{U}$ 矩阵应由(26)式给出. 这就表明在文献[5]中应用 Incoming 相互作用绘景对闭路格林函数作微扰展开, 不仅是合理的, 而且也是必然的. 此外, 这个问题的澄清可期望对温度场论也有潜在的影响.

蔡建华教授详细阅读了手稿, 作者表示感谢.

参 考 文 献

- [1] A. A. 阿布里科索夫等著, 赫柏林译, 统计物理学中的量子场论方法, 科学出版社, (1963).
- [2] C. Caroli *et al.*, *J. Phys.*, **C4**(1971), 916.
- [3] 赫柏林, 于泳等, 统计物理学进展, 科学出版社(1981).
- [4] D. Lurie, *Particles and Fields*, John Wiley and Sons, N. Y., (1968).
- [5] Zhou Guang-Zhao, Su Zhao-bin, Hao Bai-Lin and Yu lu, *Commun. in Theor. Phys. (Beijing)*, **1** (1982), 307.

THE INTERACTION PICTURE IN THE CLOSED TIME PATH GREEN'S FUNCTIONS

XU HONG-HUA

(Shanghai Puduo District College of Spare Time)

ABSTRACT

It is clarified that the interaction picture introduced in CTPGF ought to be the incoming one and the perturbation expansion of CTPGF to be developed also in this sense.