

研究简报

在 $SU(2)$ 模型中费密子的质量 与 Rubakov 效应

李新洲 汪克林 张鉴祖
(复旦大学) (中国科学技术大学) (山西大学)

1984年4月2日收到

提 要

在自发破缺的具有 Higgs 三重态的 $SU(2)$ 规范理论中,讨论了同位旋-1/2 的费密子的质量对费密子-磁单极束缚态的影响。结果表明,当费密子与 Higgs 场之间的直接耦合趋于零,但狄拉克质量保持固定时,费密子-磁单极束缚态的必要条件必不被满足。这个结果意味着对于 $SU(2)$ 模型由于狄拉克质量效应, Rubakov 效应不存在。

一、引 言

近来,人们对于所谓的 Rubakov 效应^[1,2],即在典型的强作用量级上磁单极催化质子衰变的效应表现出很大的兴趣。Rubakov^[1]在自发破缺的具有 Higgs 三重态的 $SU(2)$ 规范理论中就费密子质量为零的情形作了详细考察。他发现,在 'tHooft-Polyakov 磁单极^[3]存在的情况下,通过 Adler-Bell-Jackiw 反常^[4],费密子数破缺是强的。如果将 $SU(2)$ 群按如下方式:

$$T = \frac{1}{2} \text{diag}(0, 0, \tau, 0)$$

嵌入 $SU(5)$, 则 $SU(5)$ 大统一理论^[5]基本磁单极^[6]与 $SU(2)$ 的 'tHooft-Polyakov 磁单极渐近地相同。据此, Rubakov 推论出在 $SU(5)$ 大统一理论中上述效应会给出费密子-磁单极相互作用中有强作用量级的重子数破缺。Rubakov 也强调了起源于费密子质量效应的可能困难,因为费密子径向波函数在原点的边界条件会被费密子的质量所破坏,这使得上面的分析无效。Callen^[16]也获得了类似的结果。但是 Callen 认为,对于有质量费密子情形 Rubakov 效应依然存在。

最近,人们直接就 $SU(5)$ 磁单极^[7,8]和 $SO(10)$ 大统一理论^[9]的磁单极^[10]情形讨论了 Rubakov 效应。在这些讨论中考虑了起源于费密子和 Higgs 场之间直接耦合的费密子质量效应。结果表明,对于这些大统一磁单极情形 Rubakov 效应并不存在。其基本原因是,虽然 $SU(2)$ 理论与 $SU(5)$ 和 $SO(10)$ 理论的规范场结构是非常类似的,但是它们的 Higgs 结构却不同。

近年来人们对于在 'tHooft-Polyakov 磁单极外势中或 Julia-Zee 双子^[11]外势中费密子

束缚态的问题表现出很大的兴趣^[12-17], 这个问题是和 Rubakov 效应有关的.

可以证明, 采用 'tHooft-Polyakov 磁单极解, 可导出规范场-Higgs 场-费密场耦合系统的封闭径向方程组. 这表明, 对上述耦合系统, 'tHooft-Polyakov 磁单极解是完备的^[17]. 但是, 相互耦合的规范场-Higgs 场-费密场系统的动力学求解, 一般是非常困难的. 由于磁单极的质量非常重, 费密场对磁单极的影响一般是很小的, 故可忽略费密场对磁单极的反作用, 即把磁单极处理为外势^[1-2, 7-8, 10, 12-17]. 然后, 去求解在磁单极外势中的费密场方程. 在下面的讨论中, 我们将采用这一合理的近似.

在本文中我们考察在自发破缺的具有 Higgs 三重态的 $SU(2)$ 规范理论中当考虑费密子的质量效应后 Rubakov 效应是否存在. 在 $SU(2)$ 模型中, 费密子的质量有两类起源, 即狄拉克质量和来自费密子和 Higgs 场之间直接耦合的等效质量 (即 Jackiw-Rebbi 模型^[12].) 结果表明, 如果费密子与 Higgs 场之间的直接耦合趋于零, 但狄拉克质量保持固定, 则不存在费密子-磁单极束缚态. 这个结果意味着在上述 $SU(2)$ 模型中 Rubakov 效应也不存在. 其理由如下^[7, 8, 10]. Rubakov 效应依赖于一种精确的抵消机制. 这种抵消机制由磁单极场中费密子格林函数的渐近行为所决定, 此点又受费密子-磁单极零能束缚态控制. 所以, 如果没有这样的束缚态, 就没有 Rubakov 效应.

二、费密子径向波函数的方程组

在自发破缺的具有 Higgs 三重态的 $SU(2)$ 规范理论中, 具有狄拉克质量的同位旋 $I = 1/2$ 的费密子既和规范场耦合也和 Higgs 场直接耦合. 这个系统的拉氏密度是^[12]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{a\mu\nu} F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu H)_a (D^\mu H)_a + \frac{1}{2} \mu^2 H_a^2 - \frac{1}{8} \lambda (H_a^2)^2 \\ & + i\bar{\psi}_n \gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu \psi)_n - m\bar{\psi}_n \psi_n - h\bar{\psi}_n \frac{1}{2} \tau_{nm}^a \psi_m H^a, \end{aligned} \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned} F_{a\mu\nu} &= \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} + g\epsilon_{abc} A_{b\mu} A_{c\nu}, \\ (D_\mu H)_a &= \partial_\mu H_a + g\epsilon_{abc} A_{b\mu} H_c, \\ (\mathcal{D}_\mu \psi)_n &= \partial_\mu \psi_n - ig \frac{1}{2} \tau_{nm}^a A_{a\mu} \psi_m, \\ a &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

τ 是同位旋包里矩阵. 参数 h 是正的无量纲的. 由 (1) 式可得费密子方程:

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{2} h(\tau \cdot H)\psi = 0. \quad (3)$$

'tHooft-Polyakov 磁单极解是^[3]

$$\begin{aligned} A_i^a &= \epsilon_{aij} \hat{r}_j \frac{K(r) - 1}{gr}, \\ A_0^a &= 0, \\ H^a &= \hat{r}^a \frac{H(r)}{gr}. \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\hat{r}^a = \mathbf{r}^a/r$. 相应地, 处于定态的费密子场可表为

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} [u_1(r) + i v_1(r) \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}}] \chi \\ [u_2(r) + i v_2(r) \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}}] \chi \end{bmatrix} e^{-iEt}, \quad (5)$$

对于定态, 费密子的质量与能量应满足条件:

$$-m < E < m. \quad (6)$$

(5) 式中 $u_i(r), v_i(r) (i=1, 2)$ 是径向变量 r 的复标量函数, 而

$$\chi = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

此处, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是同位旋量. (5) 和 (7) 式是系统的总角动量:

$$\mathbf{J}^2 = \left(\mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \right)^2$$

的本征值为 0 的本征态的普遍形式, 上式中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为自旋包里矩阵.

利用 (4), (5), (7) 和 (3) 式可化为如下方程组:

$$(E - m)u_1 + \frac{1}{r}(K + 1)v_2 + v'_2 - i \frac{\hbar}{2gr} H v_1 = 0, \quad (8)$$

$$(E - m)v_1 + \frac{1}{r}(K - 1)u_2 - u'_2 + i \frac{\hbar}{2gr} H u_1 = 0, \quad (9)$$

$$(E + m)u_2 + \frac{1}{r}(K + 1)v_1 + v'_1 + i \frac{\hbar}{2gr} H v_2 = 0, \quad (10)$$

$$(E + m)v_2 + \frac{1}{r}(K - 1)u_1 - u'_1 - i \frac{\hbar}{2gr} H u_2 = 0. \quad (11)$$

在得出 (8)–(11) 式时, 应用了如下公式:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi = -\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \chi = -3\chi, \quad (13)$$

$$\epsilon_{aij} \tau^a \sigma^i x_j \chi = 2ir(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \chi, \quad (14)$$

$$\epsilon_{aij} \tau^a \sigma^i x_j (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \chi = -2ir \chi. \quad (15)$$

应用 χ 的定义 (7) 式, 容易证明这些等式. 令

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r} R_1, & u_2 &= \frac{1}{r} R_2, \\ v_1 &= \frac{1}{r} S_1, & v_2 &= \frac{1}{r} S_2. \end{aligned} \quad (16)$$

则 (12)–(15) 式可化为如下的费密子径向波函数的方程组:

$$R'_1 - \frac{1}{r} K R_1 - (E + m) S_2 + i \frac{\hbar}{2gr} H R_2 = 0; \quad (17)$$

$$R'_2 - \frac{1}{r} K R_2 - (E - m) S_1 - i \frac{\hbar}{2gr} H R_1 = 0; \quad (18)$$

$$S'_1 + \frac{1}{r} K S_1 + (E + m) R_2 + i \frac{\hbar}{2gr} H S_2 = 0; \quad (19)$$

$$S_2' + \frac{1}{r} K S_2 + (E - m) R_1 - i \frac{\hbar}{2gr} H S_1 = 0. \quad (20)$$

对于 (17)–(20) 式的束缚态解, $R_i, S_i (i = 1, 2)$ 应满足如下的物理上合理的边界条件:

$$\text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 或 } r \rightarrow 0 \text{ 时, } R_i, S_i = 0, (i = 1, 2). \quad (21)$$

三、束缚态的必要条件

应用 (17)–(20) 式和渐近行为 (21) 式, 可得一等式, 据此, 可作出束缚态必要条件的某些定性结论. 由 (17)–(20) 式容易导出

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} (R_1 S_2^* - R_2^* S_1) + E (|R_1|^2 + |S_1|^2 - |R_2|^2 - |S_2|^2) \\ & - m (|R_1|^2 + |R_2|^2 + |S_1|^2 + |S_2|^2) - \frac{\hbar}{gr} H \cdot \mathcal{J}_m (R_1 S_1^* + R_2 S_2^*) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

将上式从 0 到 ∞ 积分, 由于渐近行为 (21) 式, 可得 $\int_0^\infty d(R_1 S_2^* - R_2^* S_1) = 0$, 且后三项的积分存在. (22) 式化为

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{\gamma} (\alpha + h\beta), \quad (23)$$

上式中,

$$\alpha \equiv \int_0^\infty dr (|R_1|^2 + |R_2|^2 + |S_1|^2 + |S_2|^2) > 0, \quad (24)$$

$$\beta \equiv \frac{1}{mg} \int_0^\infty dr \cdot \frac{1}{r} H \cdot \mathcal{J}_m (R_1 S_1^* + R_2 S_2^*), \quad (25)$$

$$\gamma \equiv \int_0^\infty dr (|R_1|^2 + |S_1|^2 - |R_2|^2 - |S_2|^2). \quad (26)$$

结合束缚态条件 (6) 和 (23) 式, 可得如下不等式:

$$-1 < \frac{1}{\gamma} (\alpha + h\beta) < 1, \quad (27)$$

这是费密子-磁单极束缚态的必要条件. 这意味着, 若 (27) 式不被满足, 则束缚态必不存在. 可分两种情形:

1. h 保持固定. 容易看出在这种情形下不等式 (27) 式可以存立. 此时又有四种可能情形:

1) $\gamma > 0, \beta < 0$. (26) 式给出

$$\gamma_1 > \gamma_2, \quad (28)$$

此处,

$$\gamma_1 \equiv \int_0^\infty dr (|R_1|^2 + |S_1|^2) > 0, \quad \gamma_2 \equiv \int_0^\infty dr (|R_2|^2 + |S_2|^2) > 0, \quad (29)$$

(27) 式化为

$$0 < -\frac{2}{\beta} \gamma_2 < h < -\frac{2}{\beta} \gamma_1. \quad (30)$$

2) $r < 0, \beta < 0$. (26) 式给出

$$r_1 < r_2. \quad (31)$$

(27) 式化为

$$0 < -\frac{2}{\beta} r_1 < h < -\frac{2}{\beta} r_2. \quad (32)$$

对于上述两种情形, 不等式 (27) 成立. 这意味着, 费密子-磁单极束缚态可存在. 对于另外两种情形, 由于不能得到正的 h , 故不予讨论.

2. h 趋于 0. 此时 (23) 式化为

$$\frac{E}{m} = \frac{\alpha}{r}. \quad (33)$$

因为 $\alpha/|r| > 1$, 对于这种情形, 不等式 (27) 不可能被满足. 这意味着费密子-磁单极束缚态必不存在.

四、简短的结论和讨论

1. 如果费密场与 Higgs 场之间的直接耦合趋于零, 则不存在费密子-磁单极束缚态. 这一结论在物理上是易于理解的. 这意味着纯粹“磁场”(磁单极)不能束缚有质量的费密子. 这个结果表明, 由于狄拉克质量项, 在自发破缺的 $SU(2)$ 规范理论中 Rubakov 效应不存在. 我们的这个结论与最近 Hortacsu, Kalayci 和 Pak 的结果^[18]一致. 他们在 $1/N$ 展开的近似方案下, 考虑费密子的质量项后, 求解了 S 波费密子-磁单极理论. 结果表明, 零能四点函数在原点很快地消失. 此点意味着, 由于费密子的质量效应, 使得费密子不能接近磁单极核, 从而不可能导致费密子数破缺的催化效应.

2. 如果费密场与 Higgs 场间的直接耦合^[12]和费密子狄拉克质量项同时存在, 则由于费密场-Higgs 场之间所提供的附加耦合, 费密子束缚态存在的必要条件是满足的. 对这种情形, 我们得不到确定的结论. 此时, Rubakov 效应可能存在, 但也可能不存在. 为了得出确定的结论, 必须考察费密子束缚态存在的充分条件. 此点, 将在今后的工作中讨论.

3. 在上述定性讨论中, 我们应用了严格的静态规范场和 Higgs 场的磁单极位形, 把它处理为外势去求解费密子场方程. 此外, 没有作任何进一步近似. 但在 Rubakov^[1] 和 Callen^[2] 的讨论中, 则作了某些进一步近似. 特别是, 他们仅讨论了在磁单极核 $r_0 \sim M_x^{-1}$ 外部的规范场位形, 此处, M_x 是理论的中间玻色子的大质量. 然后, 把相应的边界条件加在 r_0 处的费密场上. 由于非阿贝尔规范场系统的高度非线性, 考察上述类点近似是否合理, 显然是很有趣的. 我们将在今后工作中对此作进一步考察.

参 考 文 献

- [1] V. A. Rubakov, *ZHETF Pis'ma*, **33**(1981), 658; *Nucl. Phys.*, **B203**(1982), 311.
- [2] C. G. Callen, Jr., *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 2141; *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2058; *Nucl. Phys.*, **B212** (1983), 391.
- [3] G. 'tHooft, *Nucl. Phys.*, **B179**(1974), 276;

- A. M. Polyakov, *ZHETF Pis'ma*, **20**(1974), 430.
- [4] S. Adler, *Phys. Rev.*, **177** (1969), 2426.
- J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cim.*, **51**(1969), 47.
- [5] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 438.
- [6] C. P. Doks and T. N. Tomaras, *Phys. Rev.*, **D21** (1980), 2940.
- [7] T. F. Walsh, P. Weisz and Tai Tsun Wu, *Nucl. Phys.*, **B232**, (1984), 349.
- [8] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, Accepted for publication in *Nuov. Cim.*, **A**.
- [9] H. Fritzsch and P. Minkowsk, *Ann. Phys.*, **93** (1975), 193.
- [10] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Phys. Lett.*, **140B**, (1984), 209.
- [11] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 222.
- [12] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 3398.
- [13] 王明中, 汪克林, 郑希特, 沈鼎昌, 章正刚, 高能物理与核物理, **2** (1978), 35.
- [14] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuovo Cim.*, **A75** (1983), 87.
- [15] 李新洲, 汪克林, 张鉴祖, 科学通报, **28** (1983), 1231; 英文版, **29**, (1984), 1307.
- [16] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuov. Cim.*, **80A**(1984), 311.
- [17] 汪克林, 张鉴祖, 高能物理与核物理, 待发表.
- [18] M. Hortacsu, J. Kalayci and Namik K. Pak, Ref. TH. 3875-CERN, (1984).

THE FERMION'S MASS TERMS IN AN $SU(2)$ MODEL AND THE RUBAKOV EFFECT

LI XIN-ZHOU

(Fudan University, Shanghai)

WANG KE-LIN

(University of Science and Technology of China, Hefei)

ZHANG JIAN-ZU

(Shanxi University)

ABSTRACT

In an $SU(2)$ spontaneously broken gauge theory with a Higgs triplet, the mass effect of an isospin-1/2 fermion on the fermion-monopole bound states is discussed. It is shown that when the direct coupling between fermion and Higgs field approaches zero, but the Dirac mass is kept finite, then the necessary condition of the fermion-monopole bound state is not satisfied. This result means that the Rubakov effect is absent for $SU(2)$ monopole because of the Dirac mass.