

Boltzmann 方程的奇异扰动解法 (III)

边界层解

丁鄂江 黄祖洽

(北京师范大学低能核物理研究所)

1984年1月17日收到

提 要

用奇异扰动方法讨论了具有小 Knudsen 数的 Boltzmann 方程的边界层解,并把它归结为求解联立代数方程的问题.对于 Maxwell 边界条件,还得到了温度间断系数对于边界上的调节系数的依赖关系.

一、引 言

由于 Boltzmann 方程不仅含有对时间的偏导数,而且含有对坐标的偏导数^[1],因此适当的边界条件是求解 Boltzmann 方程不可缺少的.特别是在小 Knudsen 数的情况下,解在边界附近有奇异性,造成正规解失效.因此,在得到 Boltzmann 方程的正规解之后,还必须讨论它的边界层解.

但是,求边界层解的问题比求初始层解和正规解都要复杂得多.当我们用奇异扰动方法^[2-4]讨论边界层解时,所得到的初级近似方程比初始层解的初级方程要复杂,这个方程即使对于 Maxwell 分子也没有得到精确的基本解组,因此不得不依赖一些数值计算.其次,边界条件应当反映气体与容器壁的相互作用,因此一般地不是给定分布函数在边界上的值,而只是给出分布函数在边界上应当满足的某个特定关系式.最后,边界层解是在全部边界上对正规解的修正,而边界上不同点的法线可能相交,因此沿这些法线方向对正规解所做的修正有可能互相影响,以至于无法把求高阶近似解的过程无限制地继续下去.

本文只讨论平面对称系统,即分布函数为

$$f = f(v, \nu, x, t) \quad x \in [0, L], \quad (1)$$

其中 $v = |\mathbf{v}|$, $\nu = v_x/v$, $\mathbf{v}$ 为粒子的速度, x 为粒子的坐标, t 为时间.这时只有动力学边界层,即 Knudsen 层.我们假定正规解已经求得^[5].此外,我们只讨论正规解在边界附近的修正而不讨论初始层解在边界附近的修正.最后,本文仅限于讨论 Maxwell 分子,但本文的方法可以推广到非 Maxwell 分子.

二、半域生成函数

设分布函数(1)式可以写成^[6]

$$f(\mathbf{v}) = f_c \sum_{nl} a_{nl}(x, t) E_{nl}, \quad (2)$$

其中

$$f_c = (2\pi)^{-3/2} e^{-\frac{v^2}{2}}, \quad (3)$$

$$E_{nl} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-l)} \cdot (n-l)!!}{n!} v^l P_l(v) L_{\frac{1}{2}(n-l)}^{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$n = 0, 1, \dots, l = n, n-2, \dots, 1 \text{ 或 } 0, \quad (4)$$

$P_l(v)$ 为 l 阶 Legendre 多项式, $L_n^l(x)$ 为广义 Laguerre 多项式. (2) 式是在平均收敛的意义下写出的, 它成立的条件是 $\int f^2 f_c^{-1} d\mathbf{v}$ 存在并有限. 这样的函数组成的 Hilbert 空间记为 $\mathcal{H}$. 可以证明

$$\int f_c E_{nl} E_{n'l'} d\mathbf{v} = N_{nl} \delta_{nn'} \delta_{ll'}, \quad N_{nl} = \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{(n-l)!!}{(n+l)!!} \cdot \frac{(n+l+1)!}{(n!)^2}. \quad (5)$$

定义生成函数

$$\varphi(\mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = e^{-\frac{k^2}{2}} \sum_{nl} a_{nl}(x, t) e_{nl}, \quad (6)$$

其中

$$e_{nl} = \frac{(-ik)^n}{n!} P_l(\mu) \quad \mu = k_x/k. \quad (7)$$

如果 $f \in \mathcal{H}$, 那么也简单地记 $\varphi \in \mathcal{H}$. 再定义半域生成函数

$$\varphi^+(\mathbf{k}) = \int_{v_x > 0} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \varphi^-(\mathbf{k}) = \int_{v_x < 0} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (8)$$

则

$$\varphi^\pm(\mathbf{k}) = \sum_{nl} a_{nl} e_{nl}^\pm, \quad (9)$$

其中

$$e_{nl}^\pm = e^{\frac{k^2}{2}} \int f_c E_{nl}^\pm e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v}, \quad (10)$$

$$E_{nl}^\pm = \begin{cases} E_{nl} & v_x > 0, \\ 0 & v_x < 0; \end{cases} \quad E_{nl}^- = \begin{cases} 0 & v_x > 0, \\ E_{nl} & v_x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

显然

$$e_{nl} = e_{nl}^+ + e_{nl}^-. \quad (12)$$

设

$$e_{nl}^+ = \sum_{n'l'} A_{n'l'nl}^+ e_{n'l'}, \quad e_{nl}^- = \sum_{n'l'} A_{n'l'nl}^- e_{n'l'}. \quad (13)$$

由(12)式可知

$$A_{n'l'nl}^+ + A_{n'l'nl}^- = \delta_{nn'} \delta_{ll'}. \quad (14)$$

考虑恒等式

$$E_{nl}^+ = \frac{1}{2} E_{nl} + \frac{1}{2} (E_{nl}^+ - E_{nl}^-), \quad (15)$$

利用(5)式之后可以得到

$$E_{nl}^+ = \frac{1}{2} E_{nl} + \frac{1}{2} \sum_{n'l'} B_{n'l'nl} E_{n'l'}, \quad (16)$$

$$B_{n'l'nl} = \begin{cases} \frac{2}{N_{n'l'}} \int_{v_x > 0} f_0 E_{nl} E_{n'l'} dv & \text{当 } n + n' = \text{奇数时,} \\ 0 & \text{当 } n + n' = \text{偶数时.} \end{cases} \quad (17)$$

当 $v_x > 0$ 时, $E_{nl} = E_{nl}^+$, 所以由(16)式得到

$$E_{nl}^+ = \sum_{n'l'} E_{n'l'}^+ B_{n'l'nl} \quad v_x > 0. \quad (19)$$

由此可得

$$E_{nl}^+ = \sum_{n'l'n''l''} E_{n'l'}^+ B_{n'l'n''l''} B_{n''l''nl}. \quad (20)$$

其中 n 和 n'' 同为奇数或同为偶数, 因此

$$\sum_{n'l'} B_{n'l'n''l''} B_{n''l''nl} = \delta_{nn''} \delta_{ll''}. \quad (21)$$

如果写成矩阵形式, 就是 $B^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ 为单位矩阵,

$$B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & b^{-1} \\ \hline b & 0 \end{array} \right]. \quad (22)$$

其中矩阵元 $B_{n'l'nl}$ 排列的顺序是: n' 为偶数的在上, 奇数在下; n 为偶数的在左, 奇数在右. 将(13)式与(16)式相比较, 可以得到

$$A_{n'l'nl}^+ = \frac{1}{2} \delta_{nn'} \delta_{ll'} + \frac{1}{2} B_{n'l'nl}. \quad (23)$$

又考虑到(14)式, 得到

$$A_{n'l'nl}^- = \frac{1}{2} \delta_{nn'} \delta_{ll'} - \frac{1}{2} B_{n'l'nl}, \quad (24)$$

写成矩阵的形式, 就是

$$A^+ = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \mathbf{1} & \frac{1}{2} b^{-1} \\ \hline \frac{1}{2} b & \frac{1}{2} \mathbf{1} \end{array} \right), \quad A^- = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \mathbf{1} & -\frac{1}{2} b^{-1} \\ \hline -\frac{1}{2} b & \frac{1}{2} \mathbf{1} \end{array} \right). \quad (25)$$

容易证明

$$(A^+)^2 = A^+, \quad (A^-)^2 = A^-, \quad (26)$$

$$A^+ A^- = A^- A^+ = 0. \quad (27)$$

(26)式说明 A^+ 和 A^- 的本征值都是 0 或 1, 而 (27) 式说明 A^- 的每一列都是 A^+ 的属于 0 本征值的本征矢.

实际计算中常常要把矩阵截断. 假定 n 为奇数和偶数的矩各保留 N 个, 那么

$$A_{2N}^+ = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \mathbf{1}_N & \frac{1}{2} b_N^{-1} \\ \hline \frac{1}{2} b_N & \frac{1}{2} \mathbf{1}_N \end{array} \right], \quad A_{2N}^- = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \mathbf{1}_N & -\frac{1}{2} b_N^{-1} \\ \hline -\frac{1}{2} b_N & \frac{1}{2} \mathbf{1}_N \end{array} \right]. \quad (28)$$

这时(14),(26),(27)式依然正确,因此 $A_{\hat{n}}^{\dagger}$ 的本征值都是 0 和 1, 而 $A_{\hat{n}}^{\dagger}$ 的迹为 N , 故它有 N 个 0 本征值和 N 个 1 本征值. 显然, $A_{\hat{n}}^{\dagger}$ 之中任意 N 列都可以作为 $A_{\hat{n}}^{\dagger}$ 的属于 0 本征值的相互独立的本征矢. 在(28)式之中也可以用 $(b^{-1})_N$ 代替 b_N^{-1} , 两种表示都是近似的, 而且当 N 很大时两者的差别不大.

三、边界条件

在三维空间中通常把边界条件写成^[7,1]

$$\mathbf{v} \cdot \hat{n} f(\mathbf{v}) = - \int_{\mathbf{v}' \cdot \hat{n} < 0} R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \mathbf{v}' \cdot \hat{n} f(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad \mathbf{v} \cdot \hat{n} > 0, \quad (29)$$

其中 f 为分布函数在边界上的值, $\hat{n}$ 为边界的内法线方向, $R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ 表示速度为 $\mathbf{v}'$ 的粒子打在边界上时以速度 $\mathbf{v}$ 返回气体内的几率, 假定它与分布函数 $f(\mathbf{v})$ 无关. 如果边界不吸收也不产生粒子, 那么

$$\int_{\mathbf{v}' \cdot \hat{n} > 0} R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1 \quad \mathbf{v}' \cdot \hat{n} < 0. \quad (30)$$

把(29)式两边在半空间 $\mathbf{v} \cdot \hat{n} > 0$ 中积分, 可以得到

$$\langle \mathbf{v} \cdot \hat{n} \rangle = \int \mathbf{v} \cdot \hat{n} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 0, \quad (31)$$

其中用到(30)式. 假定边界的温度 θ_w 固定, 不失一般性, 可令 $\theta_w = 1$. 最后, 对于平衡分布(3)式, 应有细致平衡条件:

$$\mathbf{v} \cdot \hat{n} f_e(\mathbf{v}) = - \int_{\mathbf{v}' \cdot \hat{n} < 0} R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \mathbf{v}' \cdot \hat{n} f_e(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad \mathbf{v}' \cdot \hat{n} > 0. \quad (32)$$

由于 R 与 f 无关, 因此边界条件(29)式是线性的. 在平面对称问题中, 用到(2)式, 总可以把(29)式写成

$$\sum_{n|n'|} c_{ni}^+ S_{n|n'} \tilde{a}_{n'|} = 0, \quad (33)$$

其中 $\tilde{a}_{n'|}$ 是指 $a_{n'|}$ 在边界上的值. 矩阵 S 由 R 的具体形式决定. 例如, 对于镜反射的边界

$$R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v} + 2\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{v})), \quad (34)$$

$$S_{n|n'} = \frac{1}{2} [1 - (-1)^i] \delta_{nn'} \delta_{ll'}. \quad (35)$$

再如, 对于 Maxwell 边界,

$$R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = (1 - \alpha) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v} + 2\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{v})) + \alpha \sqrt{2\pi} \mathbf{v} \cdot \hat{n} f_e(\mathbf{v}) \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (36)$$

$$S_{n|n'} = \frac{1}{2} [1 - (1 - \alpha)(-1)^i] \delta_{nn'} \delta_{ll'} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{2\pi} A_{\hat{n}n'} \delta_{n0} \delta_{l0}. \quad (37)$$

当 $\alpha = 0$ 时, (36), (37)式归结为(34), (35)式. 当 $\alpha = 1$ 时, 就是完全重发射情况. α 称为调节系数. 在一般情况下, 先展开(如果能够展开的话)

$$\frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{n}}{\mathbf{v} \cdot \hat{n}} R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \sum_{n|n'|} f_e(\mathbf{v}) E_{ni}^+(\mathbf{v}) E_{n'|}^-(\mathbf{v}') R_{n|n'}/N_{n'|}, \quad (38)$$

则(29)式可以写成

$$\sum_{nl} \tilde{a}_{nl} E_{nl}^+(\mathbf{v}) = - \sum_{n[n', l', n'', l'']} \tilde{a}_{nl} E_{n'l'}^+(\mathbf{v}) R_{n'l', n'', l''} A_{n'', l'', nl}^-.$$

所以, 可以取

$$S_{nl, n'l'} = \frac{1}{2} \delta_{nn'} \delta_{ll'} + \frac{1}{2} \sum_{n'', l''} R_{nl, n'', l''} A_{n'', l'', n'l'}^-, \quad (39)$$

则(29)式就写成了(33)式的形式. 注意到(13)式, 又可得

$$\sum_{n[n', l', n'', l'']} e_{n'', l'', n'l'} A_{n'', l'', nl}^+ S_{nl, n'l'} \tilde{a}_{n'l'} = 0. \quad (40)$$

但 $\{e_{nl}\}$ 是完备独立基底, 故

$$\sum_{n[n', l']} A_{n'', l'', nl}^+ S_{nl, n'l'} \tilde{a}_{n'l'} = 0. \quad (41)$$

从(37)式容易看出 $S_{n, l00} = 0$, 所以 Maxwell 边界条件对于 $\tilde{a}_{00}$ 无限制. 一般情况下, 由(31)式知 $\tilde{a}_{11} = 0$.

四、边界层解的基本方程

在一维情况下, φ 应当满足 Boltzmann 方程^[2]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial x} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial x} = \frac{1}{\varepsilon} J_M(\varphi, \varphi). \quad (42)$$

正规解 φ_n 满足该方程, 即

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + i\mu \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial k \partial x} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \mu \partial x} = \frac{1}{\varepsilon} J_M(\varphi_n, \varphi_n). \quad (43)$$

但是, 一般地, φ_n 不满足边界条件(41)式. 假定

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_b \quad (44)$$

满足(41)式, 那么由(42), (43)式可知

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_b}{\partial t} + i\mu \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial k \partial x} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial \mu \partial x} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [J_M(\varphi_b, \varphi_b) + J_M(\varphi_n, \varphi_b) + J_M(\varphi_b, \varphi_n)]. \end{aligned} \quad (45)$$

对于 φ_b , 还应提出要求

$$\varphi_b(x \text{ 远离边界}) \rightarrow 0. \quad (46)$$

我们称 φ_b 为边界层解. 由于^[2]

$$\varphi_n = \rho e^{-\frac{k^2}{2}\theta - ik\mu\varepsilon} (1 + \xi), \quad (47)$$

再假定

$$\varphi_b = \rho e^{-\frac{k^2}{2}\theta - ik\mu\varepsilon} \eta, \quad (48)$$

就可以得到 η 所满足的方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + D_0 \eta + D_1 \eta + D_2 \eta = \frac{\rho}{\varepsilon} [I_M(\eta) + J_M(\eta, \eta) + J_M(\eta, \xi) + J_M(\xi, \eta)], \quad (49)$$

其中

$$\begin{aligned}
 D_0 &= D_{00} + \varepsilon D_{01}, \quad D_{00} = \frac{4}{3} \theta \frac{\partial c}{\partial x} e_{22} + 3\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} e_{31}, \\
 D_{01} &= \frac{4}{3\lambda_{22}\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{\partial c}{\partial x} \right) e_{11} + \left[\frac{8\theta}{9\lambda_{22}\rho} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 + \frac{5}{3\lambda_{31}\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] e_{20}, \\
 I_M(\eta) &= J_M(1, \eta) + J_M(\eta, 1), \quad D_1 = \left(c + \theta e_{11} + i\mu \frac{\partial}{\partial k} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \frac{\partial}{\partial \mu}, \\
 D_2 &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} e_{20} + \frac{\partial c}{\partial x} e_{11} \right) \left(i\mu \frac{\partial}{\partial k} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial}{\partial \mu} \right). \quad (50)
 \end{aligned}$$

先讨论 $x=0$ 附近的边界层解. 假定

$$x = \varepsilon X, \quad (51)$$

那么由(50)式得

$$D_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left(c + \theta e_{11} + i\mu \frac{\partial}{\partial k} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \frac{\partial}{\partial X}. \quad (52)$$

在求正规解时已经得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \frac{\partial(\rho c)}{\partial x}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -c \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \theta)}{\partial x} + \frac{4\varepsilon}{3\lambda_{22}\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{\partial c}{\partial x} \right), \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -c \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{2}{3} \theta \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{8\varepsilon \theta}{9\lambda_{22}\rho} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 + \frac{5\varepsilon}{3\lambda_{31}\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \quad (53)
 \end{aligned}$$

假定 ρ, c, θ 可以满足边界条件

$$\rho = 1, \quad c = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \quad (54)$$

并且假定在 $x=0$ 处 ρ, c, θ 的梯度也不大:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \lesssim O(1) \quad \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \quad (55)$$

把 ρ, c, θ 都在 $x=0$ 附近展开^[4]

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i \varepsilon^i X^i, \quad c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i X^i, \quad \theta = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon^i X^i. \quad (56)$$

由(53)式的第一式及(54)式可知

$$c_0 = c_1 = 0, \quad \rho_0 = \theta_0 = 1. \quad (57)$$

把(56),(57)式代入(50)及(52)式之中,可得

$$\begin{aligned}
 D_0 &= \sum_{j=0}^{\infty} D'_{0j} \varepsilon^j, \quad D'_{00} = 3\theta_1 e_{31}, \quad D'_{01} = \frac{8}{3} c_2 X e_{22} + (3\theta_1^2 + 6\theta_2) X e_{31}, \\
 D'_{0j} &= \frac{4}{3} X^j \sum_{i=1}^{j-1} (j-i+1) \theta_i c_{j-i+1} e_{22} + 3X^j \sum_{i=0}^j (j-i+1) \theta_i \theta_{j-i+1} e_{31} \\
 &\quad + \frac{8}{9} X^{j-1} \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{i=0}^k (k+1)(k-i+2) \theta_i c_{k-i+2} \rho [j-k-1] e_{11} \\
 &\quad + \left\{ \frac{16}{27} X^{j-1} \sum_{l=0}^{j-3} \sum_{k=0}^l \sum_{i=1}^{j-l-2} (i+1)(j-l-i) \theta_k c_{i+1} c_{j-l-i} \rho [l-k] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{3} X^{j-1} \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{k+1} (k+1)(l+1) \theta_{l+1} \theta_{k-l+1} \rho [j-k-1] \right\} e_{20}. \quad (58)
 \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{1}{\varepsilon} D \frac{\partial}{\partial X} + \sum_{j=0}^{\infty} D'_{1j} \varepsilon^j, \quad D = e_{11} + i\mu \frac{\partial}{\partial k} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial}{\partial \mu},$$

$$D'_{1j} = (c_{j+1} + \theta_{j+1} e_{11}) X^{j+1} \frac{\partial}{\partial X}, \quad (59)$$

$$D_2 = \sum_{j=0}^{\infty} D'_{2j} \varepsilon^j, \quad D'_{20} = (\rho_1 + \theta_1 e_{20}) \left(i\mu \frac{\partial}{\partial k} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial}{\partial \mu} \right),$$

$$D'_{2j} = \left[\sum_{k=0}^j (j-k+1) \rho[k] \rho_{j-k+1} + (j+1) c_{j+1} e_{11} + (j+1) \theta_{j+1} e_{20} \right]$$

$$\times \left(i\mu \frac{\partial}{\partial k} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial}{\partial \mu} \right). \quad (60)$$

其中已取 $\lambda_{31} = 1$, $\lambda_{22} = 3/2$ 并引用了记号

$$\rho[j] = \sum_{\Sigma i_s = j} (-1)^{\Sigma i_s} \frac{(\Sigma i_s)!}{i_1! \cdots i_s! \cdots} \rho_{i_1}^{i_1} \cdots \rho_{i_s}^{i_s} \cdots.$$

再把正规解 $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \xi^{(j)}$ 在 $x=0$ 处重新展开^[4]

$$\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x=0) + \varepsilon X \frac{\partial \xi^{(j)}(x=0)}{\partial x} + \cdots + \varepsilon^i X^i \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \xi^{(j)}(x=0)}{\partial x^i} + \cdots,$$

那么

$$\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \xi_0^{(j)}, \quad (61)$$

其中

$$\xi_0^{(j)} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \xi^{(j-i)}(x=0)}{\partial x^i} X^i, \quad (62)$$

$\xi_0^{(j)}$ 的下标表示在 $x=0$ 处作的按 ε 幂的展开。令

$$\eta_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \eta_0^{(j)}, \quad (63)$$

η 的下标表示在 $x=0$ 附近的边界层解。利用(50), (56)式, 及(58)–(63)式, 可以写出(49)式的各阶近似方程。它的 ε^{-1} 阶方程为

$$D \frac{\partial \eta_0^{(0)}}{\partial X} - I_M(\eta_0^{(0)}) = J_M(\eta_0^{(0)}, \eta_0^{(0)}).$$

由(54)式知正规解(47)式的初级近似 $\varphi_n^{(0)} = \rho e^{-\frac{k^2}{2}\theta - ik\mu\varepsilon}$ 满足边界条件(41)式, 所以 $\eta_0^{(0)} = 0$ 。于是(49)式的以下各阶方程就是

$$D \frac{\partial \eta_0^{(1)}}{\partial X} - I_M(\eta_0^{(1)}) = 0, \quad (64)$$

$$D \frac{\partial \eta_0^{(j)}}{\partial X} - I_M(\eta_0^{(j)}) = R^{(j)} \quad j \geq 2, \quad (65)$$

$$R^{(j)} = - \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right)_{i-1} - \sum_{i=0}^{j-2} [D'_{0i} + D'_{1i} + D'_{2i}] \eta_0^{(j-i-1)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-1} [J_M(\eta_0^{(i)}, \eta_0^{(j-i)}) + J_M(\eta_0^{(j)}, \xi_0^{(j-i)}) + J_M(\xi_0^{(i)}, \eta_0^{(j-i)})]. \quad (66)$$

设

$$\eta_0^{(j)} = \sum_{nl} \tilde{b}_{nl}^{(j)}(X, t) e_{nl}, \quad \xi_0^{(j)} = \sum_{nl} \tilde{a}_{nl}^{(j)}(X, t) e_{nl}, \quad (67)$$

那么边界条件(41)式就应改写为

$$\sum_{n|n'l'} A_{n'l', nl}^* S_{nl|n'l'} [\tilde{a}_{n'l'}^{(j)} + \tilde{b}_{n'l'}^{(j)}] |_{x=0} = 0 \quad j = 1, 2, \dots. \quad (68)$$

五、初级近似

(64)式是关于 $\eta_0^{(0)}$ 的齐次线性方程. 令 $\tilde{e}_{nl} = N_{nl}^{-\frac{1}{2}} e_{nl}$ 并定义内积 $(\tilde{e}_{nl}, \tilde{e}_{n'l'}) = \delta_{nn'} \cdot \delta_{ll'}$, 那么以 $\{\tilde{e}_{nl}\}$ 为基底时, D 是实对称算子. 可以证明在 $\mathcal{H}$ 中 D 没有 0 本征值, 因此 D 有唯一的逆 D^{-1} . 用 D^{-1} 左乘(64)式, 得

$$\frac{\partial \eta_0^{(0)}}{\partial X} - D^{-1} I_M(\eta_0^{(0)}) = 0. \quad (69)$$

由于 D^{-1} 与 I_M 不对易, 所以 $D^{-1} I_M$ 不是 Hermite 算子. 定义算子 L 满足

$$L \tilde{e}_{nl} = \sqrt{\lambda_{nl}} \tilde{e}_{nl},$$

那么 L 是半正定的 Hermite 算子, 而且 $I_M = -L^2$. 用 L 左乘(69)式, 得

$$\frac{\partial}{\partial X} (L \eta_0^{(0)}) + (L D^{-1} L) (L \eta_0^{(0)}) = 0, \quad (70)$$

其中 $L D^{-1} L$ 是 Hermite 算子, 因此本征值 $\mu_{s's}$ 是实数,

$$L D^{-1} L \psi_{s's} = -\mu_{s's} \psi_{s's}. \quad (71)$$

约定用 s' 表示 $\mu_{s's}$ 的符号, 即 s' 只取 0, 1, 2, $\mu_{0s} = 0$, $\mu_{1s} < 0$, $\mu_{2s} > 0$. 记 $\tilde{e}_{00}$, $\tilde{e}_{11}$, $\tilde{e}_{20}$ 所张的子空间为 $\mathcal{H}_1$, 与 $\mathcal{H}_1$ 正交的子空间为 $\mathcal{H}_2$, 则 $L \eta_0^{(0)} \in \mathcal{H}_2$. 可以证明 $L D^{-1} L$ 的 0 本征值是 4 重简并的, 这 4 个本征矢为

$$\phi_{01} = \tilde{e}_{00}, \quad \phi_{02} = \tilde{e}_{20}, \quad \phi_{03} = \tilde{e}_{11}, \quad \phi_{04} = \tilde{e}_{31}. \quad (72)$$

不难证实 $(\phi_{0s}, L D^{-1} L \tilde{e}_{nl}) = (L D^{-1} L \phi_{0s}, \tilde{e}_{nl}) = 0$. 用 $\mathcal{H}_3$ 表示与 ϕ_{0s} 正交的子空间, 那么 ϕ_{1s} 与 ϕ_{2s} 都在 $\mathcal{H}_3$ 之中. 当 $s' = 1, 2$ 时, 在(71)式中用 $-\mu$ 代 μ , 得

$$L D^{-1} L \phi_{s's}(k, -\mu) = \mu_{s's} \phi_{s's}(k, -\mu).$$

这说明本征值 $\mu_{s's}$ 的反号仍是本征值. 不妨约定 $\mu_{2s} = -\mu_{1s}$, $\phi_{1s}(k, -\mu) = \phi_{2s}(k, \mu)$.

现在可以把(70)式的解写成

$$L \eta_0^{(0)} = \sum_{s's} \tilde{c}_{s's} e^{\mu_{s's} X} \phi_{s's}, \quad (73)$$

其中 $\tilde{c}_{01} = \tilde{c}_{02} = \tilde{c}_{03} = 0$, 其余 $\tilde{c}_{s's}$ 为任意常数. 但由于 L 无逆, 所以还不能从(73)式求出 $\eta_0^{(0)}$. 能够满足(73)式的 $\eta_0^{(0)}$ 的最一般形式为

$$\eta_0^{(0)} = \sum_{s's} c_{s's} e^{\mu_{s's} X} \psi_{s's}, \quad (74)$$

其中 c_{01} , c_{02} , c_{03} 可以是 X 的函数, 而

$$L(c_{01}r_{01} + c_{02}r_{02} + c_{03}r_{03}) \approx 0, \quad (75)$$

$$c_{s's} = \tilde{c}_{s's}, \quad Lr_{s's} = \phi_{s's} \quad \text{当 } (s', s) \approx (0, 1), (0, 2), (0, 3) \text{ 时}. \quad (76)$$

注意(76)式之中 $r_{s's}$ 在 $\mathcal{H}_1$ 中的分量允许与 X 有关. 由于 c_{01}, c_{02}, c_{03} 是任意选择的, 所以由(75)式得 $Lr_{01} = Lr_{02} = Lr_{03} = 0$, 因此不妨取

$$r_{01} = \tilde{e}_{00}, \quad r_{02} = \tilde{e}_{20}, \quad r_{03} = \tilde{e}_{11}. \quad (77)$$

把 $\eta_0^{(1)} = c_{01}r_{01}, c_{02}r_{02}, c_{03}r_{03}$ 依次代入(69)式, 可得

$$\frac{dc_{01}}{dX} = \frac{dc_{02}}{dX} = \frac{dc_{03}}{dX} = 0.$$

所以 c_{01}, c_{02}, c_{03} 是与 X 无关的常数. 按(76)式的要求, 设 $r_{04} = \alpha_{00}^{04}\tilde{e}_{00} + \alpha_{11}^{04}\tilde{e}_{11} + \alpha_{20}^{04}\tilde{e}_{20} + \tilde{e}_{31}$, 将 $\eta_0^{(1)} = c_{04}r_{04}$ 代入(69)式, 可得

$$\frac{d\alpha_{00}^{04}}{dX} = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \frac{d\alpha_{11}^{04}}{dX} = 0, \quad \frac{d\alpha_{20}^{04}}{dX} = -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

由于已有(77)式作为基本解, 所以可以取

$$r_{04} = \tilde{e}_{31} + \left(\sqrt{\frac{2}{5}} \tilde{e}_{00} - \sqrt{\frac{3}{5}} \tilde{e}_{20} \right) X. \quad (78)$$

对于 $s' \approx 0$ 的情形, 可以类似地确定 $r_{s's}$ 的所有分量(只差一个共同的常因子), 这些分量都是常数, 而且 c_{11} 和 c_{31} 分量是 0.

注意到 $\tilde{e}_{nl}$ 与 e_{nl} 的差别只是常因子, 所以经过适当调整系数及记号, 可把(69)式的解写成

$$\eta_0^{(1)} = \sum_{s's} c_{s's}^{(1)} e^{\mu_{s's} X} r_{s's}, \quad r_{s's} = \sum_{nl} \alpha_{nl}^{s's} e_{nl}, \quad (79)$$

其中

$$\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_{03} = \mu_{04} = 0, \quad r_{01} = e_{00}, \quad r_{02} = e_{20}, \quad r_{03} = e_{11}, \quad r_{04} = e_{31} + \frac{X}{3} (e_{00} - e_{20}),$$

$$\mu_{1s} < 0, \quad \mu_{2s} = -\mu_{1s}, \quad \alpha_{11}^{1s} = \alpha_{11}^{2s} = \alpha_{31}^{1s} = \alpha_{31}^{2s} = 0, \quad \alpha_{nl}^{2s} = (-1)^n \alpha_{nl}^{1s}. \quad (80)$$

值得注意的是 r_{04} 与 X 有关而 $c_{s's}^{(1)}$ 与 X 无关. 在实际运算中求 $\alpha_{nl}^{s's} (s' = 1, 2)$ 时不必重复本节分析过程, 而只须把 $e^{\mu_{s's} X} r_{s's}$ 代入(69)式之中, 求解

$$D^{-1} I_M r_{s's} = \mu_{s's} r_{s's} \quad (81)$$

即可. 容易看出 $\{r_{s's}\}$ 构成 $\mathcal{H}$ 中的完备集.

现在, 边界条件(68)式可以写成

$$\sum_{n'l'nl} A_{n'l'nl}^+ S_{nl'n'l'} \left[\tilde{a}_{n'l'}^{(1)} + \sum_{s's} \alpha_{n'l'}^{s's} c_{s's}^{(1)} \right] \Big|_{X=0} = 0. \quad (82)$$

为保证(46)式, 必须取

$$c_{0s}^{(1)} = c_{2s}^{(1)} = 0. \quad (83)$$

如果在(82)式中取到 $2N$ 阶矩阵之后截断, 那么 $c_{s's}^{(1)}$ 之中有 $(N-2)$ 个待定系数, $\tilde{a}_{n'l'}^{(1)}$ 之中有 2 个待定系数 $\tilde{a}_{11}^{(1)}$ 和 $\tilde{a}_{30}^{(1)}$, 这 N 个待定系数只需 N 个线性代数方程就可决定. 由于 A_{1N}^+ 有 N 个 0 本征值, 故(82)式的 $2N$ 个方程只有 N 个是独立的, 可以取 n'' 为奇数的部分, 而 $\tilde{a}_{11}^{(1)}$ 总是 0, 未知数又减少一个, 相应地 A_{1N}^+ 之中 $(n'', l'') = (1, 1)$ 的一行又可以不用. 这样, 问题完全归结为求解 $(N-1)$ 个联立线性代数方程. 为了使解反映出边

界层的存在,在 $c_{ij}^{(j)}$ 之中至少应有一个待定系数,所以 $N \geq 3$. 当 $N = 3$ 时,函数空间由基矢 $c_{00}, c_{20}, c_{22}, c_{11}, c_{31}, c_{33}$ 张成,可见在三维空间中用 13 矩方法讨论边界层是不够的.

在 $\tilde{a}_{ij}^{(j)}$ 之中唯一非零的已知参数为 $\tilde{a}_{31}^{(1)} = -3\theta_1$, 而(82)式是线性的,所以可写成

$$\tilde{a}_{20}^{(1)} = \tilde{\omega}_{20}\theta_1, \quad c_{11}^{(1)} = \omega_{11}\theta_1, \quad \eta_0^{(1)} = \theta_1 \sum_i \omega_{1i} e^{\mu_{1i}x} r_{1i}. \quad (84)$$

记 $\Delta\theta = \varepsilon \tilde{a}_{20}^{(1)}$, $\tau_c = \tilde{\omega}_{20}$, 则

$$\Delta\theta = \varepsilon \tau_c \left. \frac{\partial\theta}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (85)$$

它反映了由于边界所造成的气体温度的变化, τ_c 称为温度间断系数. 对于 Maxwell 边界用 6×6 矩阵计算得到

$$\tau_c \doteq 4.61 \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(\alpha + 14.7)}{\alpha(\alpha + 21.67)}. \quad (86)$$

当 $\alpha = 1$ 时, $\tau_c \doteq 1.60$; 而当 $\alpha = 0$ 时, $\tau_c = +\infty$, 这反映出镜反射的边界总是要求边界上的温度梯度为 0.

六、高阶近似及边界层解的构造

高阶近似方程是线性非齐次方程. 因 $\{r_{i's}\}$ 是 $\mathcal{R}$ 中的完备集, 因此 $D^{-1}R^{(j)}$ 可以用 $\{r_{i's}\}$ 表出:

$$D^{-1}R^{(j)} = \sum_{i's} R_{i's}^{(j)}(X, t) r_{i's}. \quad (87)$$

假设(65)式的解为

$$\eta_0^{(j)} = \sum_{i's} c_{i's}^{(j)}(X, t) e^{\mu_{i's}x} r_{i's}. \quad (88)$$

把(88)式代入(65)式之中, 得到

$$\frac{\partial c_{i's}^{(j)}}{\partial X} = e^{-\mu_{i's}x} R_{i's}^{(j)}(X, t). \quad (89)$$

因此

$$c_{i's}^{(j)}(X, t) = c_{i's}^{(j)}(0, t) + \int_0^X e^{-\mu_{i's}x'} R_{i's}^{(j)}(X', t) dX'. \quad (90)$$

当 $s' = 0, 2$ 时, 必须保证(46)式, 因此

$$c_{i's}^{(j)}(0, t) = - \int_0^{+\infty} e^{-\mu_{i's}x'} R_{i's}^{(j)}(X', t) dX' \quad s' = 0, 2.$$

于是得到

$$c_{i's}^{(j)}(X, t) = - \int_X^{+\infty} e^{-\mu_{i's}x'} R_{i's}^{(j)}(X', t) dX' \quad s' = 0, 2. \quad (91)$$

在(88)式中待定的系数仍然只有 $c_{ij}^{(j)}(0, t)$, 它与 $\tilde{a}_{ij}^{(j)}$ 一起由(68)式决定, 于是又归结为解联立的 $(N-1)$ 个代数方程.

到此为止所得到的解 η_0 只适用于 $x = 0$ 附近, 为求 $x = L$ 处边界层解 η_L , 在(49)式

之中令 $x = L - \varepsilon X$, 可以得到 η_L 所满足的方程, 它与 η_0 满足的方程(64)–(66)式的区别仅在于所有对 X 的导数变号, 因此解法完全类似, 不再赘述.

最后, 定义光滑函数^[4]

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/3, \\ \text{单调而且无限次可微} & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ 0 & x \geq 2/3. \end{cases} \quad (92)$$

那么(49)式的解可以写成

$$\eta = \eta_0 \bar{\phi}\left(\frac{2x}{L}\right) + \eta_L \bar{\phi}\left(\frac{L-2x}{L}\right). \quad (93)$$

所以边界层解

$$\varphi_b = \rho e^{-\frac{\kappa^2}{2}\theta - i\kappa\mu c} \left[\eta_0 \bar{\phi}\left(\frac{2x}{L}\right) + \eta_L \bar{\phi}\left(\frac{L-2x}{L}\right) \right]. \quad (94)$$

现在, 我们可以看到, 因为边界有两个, 而两个边界层会互相影响, 所以必须把解表示为(98)式. 这样一来, 我们不可能无限制地求高阶近似. 我们求得的不是一个无穷级数解. 这是与初始层解完全不同的. 这在实际上不会造成损害, 因为具体应用时总是只求极少数几阶近似解.

本文主要结论在文献[8]中已作介绍.

作者感谢彭桓武教授的宝贵意见, 郝柏林、于渌教授在讨论中给予的建议和帮助.

参 考 文 献

- [1] C. Cercignani, *Theory and Application of the Boltzmann Equation*, Scottish Academic Press, Edinburgh, (1975).
- [2] 钱伟长主编, 奇异摄动理论及其在力学中的应用, 科学出版社, (1981).
- [3] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, Wiley, (1973).
- [4] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, *У. М. Н.*, 12 (1957), 3.
- [5] 丁鄂江、黄祖洽, 物理学报, 34(1985).
- [6] C. S. Wang Chang and G. E. Uhlenbeck, On the Propagation of Sound in Monatomic Gases. University of Michigan Press, Project M999, Ann. Arbor, Michigan (1952). Reprinted in "The Kinetic Theory of Gases", Studies in Statistical Mechanics, vol. V, North-Holland, Amsterdam, (1970).
- [7] C. Cercignani, Boundary Value Problems in Linearized Kinetic Theory, in "Transport Theory", Bellman *et al.* eds., SIAM-AMS Proceedings, vol. I, AMS, Providence, (1968), p. 249.
- [8] 丁鄂江、黄祖洽, 物理学报, 33(1984), 722.

ON THE SINGULAR PERTURBATION SOLUTION OF BOLTZMANN EQUATION (III)

“BOUNDARY LAYER” SOLUTION

DING E-JIANG HUANG ZU-QIA

(Low Energy Nuclear Physics Institute, Beijing Normal University)

ABSTRACT

The “boundary layer” solution of Boltzmann equation with a small Knudsen number is discussed by using a kind of singular perturbation method, and is reduced to solving a set of linear algebraic equations. The dependence of the temperature jump coefficient on the accommodation coefficient is obtained for the Maxwell’s boundary conditions.