

球对称无限空间中稀薄气体的一种弛豫

丁 鄂 江 黄 祖 洽

(北京师范大学低能核物理研究所)

1984年1月27日收到

提 要

本文把平面对称空间中 Boltzmann 方程的奇异扰动解法^[7,8]推广到球对称空间, 并通过具体模型讨论了初始阶段弛豫过程的一些特点.

一、引 言

气体中发生的从非平衡分布(包括位形空间中或动量空间中的非平衡分布)向平衡分布的弛豫过程, 是非平衡态统计力学和不可逆过程热力学的重要课题.

在非平衡态统计力学和不可逆过程热力学中, 近平衡处发生的线性弛豫过程已被仔细地研究, 理论也日趋成熟. 但是, 当系统远离平衡态时, 弛豫过程的物理图象却不十分清楚, 而且各派理论也没有统一的描述^[1-3]. 为了搞清这个弛豫过程, 需要有一个比较简单而又带有某种普遍性的物理模型. 下面讨论稀薄气体中一种弛豫过程的简单物理模型.

设在气体中某处发生一个爆炸过程, 产生大量高速气体分子和热辐射. 由于热辐射的传播比因气体分子运动所发生的弛豫过程快得多, 所以在热辐射作用下远处气体的温度升高之后, 整个系统仍然远离平衡态: 在爆炸中心附近, 气体分子几乎以同一较高的速率向各方向运动, 而在远离爆炸中心的地方处于平衡状态. 如果气体比较稀薄, 在气体中发生的三体碰撞可以忽略, 那么就可以用 Boltzmann 方程来讨论这个弛豫过程^[4].

为了具体讨论这样的弛豫过程, 我们假定系统由单原子 Maxwell 分子组成, 爆炸中心处于坐标原点, 空间无界, 那么单粒子分布函数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 所满足的方程为^[4,5]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\varepsilon} \int d\mathbf{w} d\mathbf{u}' g_M(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}}') [f(\mathbf{w}')f(\mathbf{v}') - f(\mathbf{w})f(\mathbf{v})]. \quad (1)$$

其中 ε 是 Knudsen 数. 假定 $\varepsilon \ll 1$, 那么气体中的弛豫过程可以分为两个阶段. 第一个阶段, 时间大约是几个分子平均自由时间, 气体中发生的碰撞过程使气体很快达到局域平衡状态. 第二个阶段, 气体中发生的输运过程使气体逐渐走向全局的平衡态. 这两个阶段的划分只在 $\varepsilon \ll 1$ 时才有意义. 如果 $\varepsilon \sim 0(1)$, 那么气体的分子平均自由时间很长, 两个阶段就无法区分了^[5]. 本文只讨论 $\varepsilon \ll 1$ 的情形.

按照前面讨论的模型, 我们假定爆炸后气体分子的初始分布为

$$f(t=0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \exp\left[\frac{-(v-v_0\eta)^2}{2(1-\eta^2)}\right], \quad (2)$$

其中

$$\eta = [1 + \Delta + 4e^{-r_c/\delta} \cdot \text{sh}^2(r/2\delta)]^{-1} \quad r_c \gg \delta \gg \varepsilon, \quad 1 \gg \Delta > 0. \quad (3)$$

容易看出,在 $r \gg r_c$ 的地方, $\eta \approx 0$, 所以初始时是 Maxwell 分布, 而在 $r \ll r_c$ 的地方, $\eta \lesssim 1$, 所以初始分布接近于 $\frac{1}{2\pi} \delta(v-v_0)$. 限定 $\Delta > 0$ 是使 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 在权重 $e^{v^2/2}$ 之下平方可积, 以保证矩展开得以进行^[4]. 因为初始分布是球对称的, 由 (1) 式可以知道初始时刻的 $\partial f / \partial t$ 也是球对称的, 因此系统将一直保持球对称的状态.

在这个无界空间之中, 自然没有边界层问题. 由于近平衡问题已有较多的讨论, 所以本文主要讨论初始阶段的弛豫过程.

二、球对称情形下 Boltzmann 方程的解

对分布函数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 作 Fourier 变换^[6]

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (4)$$

那么 (1) 式可以写成

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{k} \cdot \partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\varepsilon} J_M(\varphi, \varphi). \quad (5)$$

其中

$$J_M(\varphi, \varphi) = \int d\hat{u}' g_M(\hat{k} \cdot \hat{u}') \left\{ \varphi \left[\frac{k}{2} (\hat{k} + \hat{u}') \right] \varphi \left[\frac{k}{2} (\hat{k} - \hat{u}') \right] - \varphi(\mathbf{k}) \varphi(0) \right\}. \quad (6)$$

在球对称的情况下, φ 只依赖于下列 4 个变数: 空间位置 $\mathbf{r}$ 的长度 r , $\mathbf{k}$ 的长度 k , $\mathbf{k}$ 的方向 $\hat{k}$ 与 $\mathbf{r}$ 的方向 $\hat{r}$ 夹角的余弦 $\mu = \hat{k} \cdot \hat{r}$, 时间 t , 即

$$\varphi = \varphi(r, k, \mu, t). \quad (7)$$

注意 μ 的含义与平面对称的情况不同. 利用 (7) 式可以把 (5) 式写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + i\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial r} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial r} + \frac{i(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial \mu} \\ - \frac{i\mu(1-\mu^2)}{kr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \frac{i(1+\mu^2)}{kr} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{1}{\varepsilon} J_M(\varphi, \varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

假定初条件是

$$\varphi(t=0) = \rho_0(r) e^{-\frac{k^2}{2} \theta_0(r) - i k \mu c_0(r)} \left[1 + \sum_{n,l} b_{nl}^{(0)}(r, 0) c_{nl} \right]. \quad (9)$$

其中求和是对 $n = 0, 1, \dots; l = n, n-2, \dots, 1$ 或 0 进行的, 而

$$c_{nl} = \frac{(-ik)^n}{n!} P_l(\mu), \quad (10)$$

$P_l(\mu)$ 是 l 阶 Legendre 多项式. 限定 $n+l =$ 偶数是因为 $\varphi(r, k, \mu, t) = \varphi(r, -k, -\mu, t)$.

求解定解问题(8),(9)式,在方法上与平面对称情形十分类似^[7,8],因此我们只列出主要步骤,而且计算结果仅求到一级近似。

设(8)式的正规解是

$$\varphi_n = \rho(r, t) e^{-\frac{k^2}{2} \theta(r, t) - i k \mu c(r, t)} [1 + \xi(r, k, \mu, t)], \quad (11)$$

则 ξ 满足方程

$$I_M(\xi) = -J_M(\xi, \xi) + \frac{6}{\rho} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + D_0 + D_0 \xi + D_1(\xi) + D_2(\xi) + D_3(\xi) + D_4(\xi) \right], \quad (12)$$

其中

$$I_M(\xi) = J_M(1, \xi) + J_M(\xi, 1), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D_0 = & \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho c)}{\partial r} + \frac{2c}{r} \right\} + e_{11} \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \theta)}{\partial r} \right\} \\ & + e_{20} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} + c \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{2}{3} \theta \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{c \theta}{r} \right\} \\ & + e_{22} \left\{ \frac{4}{3} \theta \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{c \theta}{r} \right\} + e_{31} 3\theta \frac{\partial \theta}{\partial r}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$D_1(\xi) = (c + e_{11}\theta) \frac{\partial \xi}{\partial r} + i\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial k \partial r} + \frac{i(1 - \mu^2)}{k} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu \partial r}, \quad (15)$$

$$D_2(\xi) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{k}{2} \frac{\partial \theta}{\partial r} - ik\mu \frac{\partial c}{\partial r} \right) \left\{ i\mu \frac{\partial \xi}{\partial k} + \frac{i(1 - \mu^2)}{k} \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right\}, \quad (16)$$

$$D_3(\xi) = \frac{i(1 - \mu^2)}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial k \partial \mu} - \frac{i\mu(1 - \mu^2)}{kr} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu^2} + \frac{i(1 + \mu^2)}{kr} \frac{\partial \xi}{\partial \mu}, \quad (17)$$

$$D_4(\xi) = \frac{kc}{r} (1 - \mu^2) \frac{\partial \xi}{\partial k} + \frac{i(1 - \mu^2)}{r} (-k\theta + i\mu c) \frac{\partial \xi}{\partial \mu}. \quad (18)$$

可以证明^[9]

$$I(e_{n1}) = -\lambda_{n1} e_{n1}. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{n1} = & 2\pi \int_{-1}^1 dv g(v) \left[1 + \delta_{n,0} \delta_{l,0} - \left(\frac{1+v}{2} \right)^{\frac{n}{2}} P_l \left(\sqrt{\frac{1+v}{2}} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{1-v}{2} \right)^{\frac{n}{2}} P_l \left(\sqrt{\frac{1-v}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

求解(12)式,得到正规解

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \xi^{(i)}, \quad (21)$$

其中

$$\xi^{(0)} = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} = & a_{00}^{(1)}(r, t) e_{00} + a_{11}^{(1)}(r, t) e_{11} + a_{20}^{(1)}(r, t) e_{20} - \frac{4\theta}{3\lambda_{22}\rho} \left(\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{c}{r} \right) e_{22} \\ & - \frac{3\theta}{\lambda_{31}\rho} \frac{\partial \theta}{\partial r} e_{31}. \end{aligned} \quad (23)$$

而 ρ, c, θ 满足方程组:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho c)}{\partial r} - \frac{2c\rho}{r}, \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= -c \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \theta)}{\partial r} + \frac{4\varepsilon}{3\lambda_{22}\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[\theta \left(\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{c}{r} \right) \right] + \frac{4\varepsilon \theta}{\lambda_{22}r\rho} \left(\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{c}{r} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -c \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2}{3} \theta \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{c\theta}{r} + \frac{8\varepsilon \theta}{9\lambda_{22}\rho} \left(\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{c}{r} \right)^2 + \frac{5\varepsilon}{3\lambda_{31}\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{10\varepsilon \theta}{3\lambda_{31}r\rho} \frac{\partial \theta}{\partial r}.\end{aligned}\quad (24)$$

$a_{00}^{(1)}, a_{11}^{(1)}$ 和 $a_{20}^{(1)}$ 满足方程组:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{00}^{(1)}}{\partial t} &= -c \frac{\partial a_{00}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\rho a_{11}^{(1)}) - \frac{2}{r} a_{11}^{(1)} + o(\varepsilon), \\ \frac{\partial a_{11}^{(1)}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial r} (c a_{11}^{(1)}) - \theta \frac{\partial a_{00}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\rho a_{20}^{(1)}) + o(\varepsilon), \\ \frac{\partial a_{20}^{(1)}}{\partial t} &= -c \frac{\partial a_{20}^{(1)}}{\partial r} - \frac{2}{3} \theta \frac{\partial a_{11}^{(1)}}{\partial r} - \frac{2}{3} a_{20}^{(1)} \left(\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{2c}{r} \right) \\ &\quad - a_{11}^{(1)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{4\theta}{3r} \right) + o(\varepsilon).\end{aligned}\quad (25)$$

ρ, c, θ 满足的初条件为

$$\rho(r, 0) = \rho_0(r), \quad c(r, 0) = c_0(r), \quad \theta(r, 0) = \theta_0(r). \quad (26)$$

φ_n 显然不能满足初条件 (9) 式. 假定

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_i \quad (27)$$

满足方程 (8) 及初条件 (9) 式, 那么 φ_i 应当满足方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + i\mu \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial k \partial r} + \frac{i(1-\mu^2)}{k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \mu \partial r} + \frac{i(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial k \partial \mu} - \frac{i\mu(1-\mu^2)}{kr} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \mu^2} \\ + \frac{i(1+\mu^2)}{kr} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu} = \frac{1}{\varepsilon} [J_M(\varphi_i, \varphi_i) + J_M(\varphi_i, \varphi_n) + J_M(\varphi_n, \varphi_i)]\end{aligned}\quad (28)$$

及初条件

$$\varphi_i(t=0) = \rho_0 e^{-\frac{k^*}{2}\theta_0 - ik\mu c_0} \left[\sum_{nl} b_{nl}^{(0)}(r, 0) e_{nl} - \xi(t=0) \right]. \quad (29)$$

此外, 我们还要求 φ_i 满足

$$\varphi_i(t \rightarrow \infty) = 0, \quad (30)$$

我们称 φ_i 为初始层解. 设

$$\varphi_i = \rho(r, t) e^{-\frac{k^*}{2}\theta(r, t) - ik\mu c(r, t)} \phi(r, k, \mu, \tau). \quad (31)$$

$$\tau = t/\varepsilon. \quad (32)$$

那么 ϕ 满足的方程是

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \rho I_M(\phi) &= \rho J_M(\phi, \phi) + \rho \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j [J_M(\phi, \xi^{(j)}) + J_M(\xi^{(j)}, \phi)] \\ &\quad - \varepsilon [D_0 \phi + D_1(\phi) + D_2(\phi) + D_3(\phi) + D_4(\phi)].\end{aligned}\quad (33)$$

令

$$\psi = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \phi^{(j)}, \quad (34)$$

$$\phi^{(j)} = \sum_{nl} b_{nl}^{(j)}(r, \tau) e_{nl}, \quad (35)$$

那么可以求得(只写出 $j = 0, 1$ 两阶的结果), 当 $l \approx 0, 1$ 时

$$b_{nl}^{(j)}(r, \tau) = b_{nl}^{(j)}(r_0, 0) e^{-r_{nl}} + e^{-r_{nl}} \int_0^{\tau} e^{r'_{nl}} R_{nl}^{(j)}(r(r_0, \tau'), \tau') d\tau'. \quad (36)$$

其中

$$r_{nl} = r_{nl}(r_0, \tau) = \lambda_{nl} \int_0^{\tau} \rho(r(r_0, \tau'), \tau') d\tau', \quad (37)$$

$$r'_{nl} = r_{nl}(r_0, \tau') = \lambda_{nl} \int_0^{\tau'} \rho(r(r_0, \tau''), \tau'') d\tau''. \quad (38)$$

而 r_0, r, τ 之间的关系由 $dr/d\tau = \varepsilon c(r, \tau)$, $r(\tau = 0) = r_0$ 给出. $R_{nl}^{(j)}$ 的表达式为

$$R_{nl}^{(0)}(r, \tau) = \sum_{n', l', n'', l''} b_{n'l'}^{(0)}(r, \tau) b_{n''l''}^{(0)}(r, \tau) h_{Mnl}^{n'l'n''l''}, \quad (39)$$

$$R_{nl}^{(1)}(r, \tau) = \tilde{\beta}_{nl}^{(1)} - \frac{(n-l+2)l}{(n+1)(2l-1)} \frac{\partial b_{n+1, l-1}^{(0)}}{\partial r} - \frac{n(l+1)\theta}{2l+3} \frac{\partial b_{n-1, l+1}^{(0)}}{\partial r}. \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{nl}^{(1)} = & 2\rho \sum_{n', l', n'', l''} b_{n'l'}^{(0)} \{ b_{n''l''}^{(1)} + a_{n''l''}^{(1)} \} h_{Mnl}^{n'l'n''l''} \\ & - \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} \left[\frac{l}{2l-1} b_{n-3, l-1}^{(0)} + \frac{l+1}{2l+3} b_{n-3, l+1}^{(0)} \right] \\ & - n(n-1)\theta \left(\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{c}{r} \right) \left[\frac{l(l-1)}{(2l-1)(2l-3)} b_{n-2, l-2}^{(0)} \right. \\ & \left. + \frac{2l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)} b_{n-2, l}^{(0)} + \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+3)(2l+5)} b_{n-2, l+2}^{(0)} \right] \\ & - n\theta \frac{l}{2l-1} \frac{\partial b_{n-1, l-1}^{(0)}}{\partial r} - \frac{n}{2} \frac{\partial \theta}{\partial r} \left[\frac{l(n-l)}{2l-1} b_{n-1, l-1}^{(0)} \right. \\ & \left. + \frac{(l+1)(n+l+1)}{2l+3} b_{n-1, l+1}^{(0)} \right] + \frac{n\theta}{r} \left[\frac{l(l-1)}{2l-1} b_{n-1, l-1}^{(0)} \right. \\ & \left. - \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3} b_{n-1, l+1}^{(0)} \right] - \left(\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{c}{r} \right) \left\{ \frac{(n-l+2)(l-1)l}{(2l-1)(2l-3)} b_{n, l-2}^{(0)} \right. \\ & \left. + \left[\frac{(n-l)(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} + \frac{(n+l+1)l^2}{(2l-1)(2l+1)} \right] b_{nl}^{(0)} \right. \\ & \left. + \frac{(l+2)(l+1)(n+l+3)}{(2l+3)(2l+5)} b_{n, l+2}^{(0)} \right\} - n \frac{c}{r} b_{nl}^{(0)} \\ & - \frac{(n-l+2)l}{(n+1)(2l-1)} b_{n+1, l-1}^{(0)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{l-1}{r} \right] \\ & - \frac{(l+1)(n+l+3)}{(n+1)(2l+3)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\rho b_{n+1, l+1}^{(0)}) + \frac{l+2}{r} b_{n+1, l+1}^{(0)} \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

当 $l = 0$ 或 1 时,

$$b_{n,0}^{(j)} = \frac{1}{2} [u_{n-}^{(j)} + u_{n+}^{(j)}], \quad b_{n-1,1}^{(j)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{n\theta}} [u_{n+}^{(j)} - u_{n-}^{(j)}]. \quad (42)$$

(42) 式中的 $u_{n-}^{(j)}$ 由下式给出:

$$u_{n-}^{(j)}(r, \tau) = u_{n-}^{(j)}(r_0, 0) e^{-r_{n0}^-} + e^{-r_{n0}^-} \int_0^\tau e^{r_{n0}^-} R_{n-}^{(j)}(r(r_0, \tau'), \tau') d\tau', \quad (43)$$

$$r_{n0}^- = r_{n0}^-(r_0, \tau) = \lambda_{n0} \int_0^\tau \rho(r(r_0, \tau'), \tau') d\tau', \quad (44)$$

$$r_{n0}^- \equiv r_{n0}^-(r_0, \tau') = \lambda_{n0} \int_0^{\tau'} \rho(r(r_0, \tau''), \tau'') d\tau'', \quad (45)$$

$$R_{n-}^{(j)}(r, \tau) = R_{n0}^{(j)} - \sqrt{\frac{n\theta}{3}} R_{n-1,1}^{(j)}, \quad (46)$$

$$R_{n0}^{(1)} = \tilde{\beta}_{n0}^{(1)} + \frac{n}{6} \frac{\partial \theta}{\partial r} b_{n-1,1}^{(0)}, \quad (47)$$

$$R_{n-1,1}^{(1)} = \tilde{\beta}_{n-1,1}^{(1)} - \frac{2}{5} (n-1) \theta \frac{\partial b_{n-2,2}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + c \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) b_{n-1,1}^{(0)}. \quad (48)$$

其中 $R_{n0}^{(0)}$, $R_{n-1,1}^{(0)}$ 仍由 (39) 式给出, $\tilde{\beta}_{n0}^{(1)}$, $\tilde{\beta}_{n-1,1}^{(1)}$ 仍由 (41) 式给出, 而 r, r_0, τ 之间关系由

$$\frac{dr}{d\tau} = \varepsilon \left[c(r, \tau) - \sqrt{\frac{n}{3}} \theta(r, \tau) \right], \quad r(\tau = 0) = r_0$$

给出. (42) 式中的 $u_{n+}^{(j)}$ 由下式给出:

$$u_{n+}^{(j)}(r, \tau) = u_{n+}^{(j)}(r_0, 0) e^{-r_{n0}^+} + e^{-r_{n0}^+} \int_0^\tau e^{r_{n0}^+} R_{n+}^{(j)}(r(r_0, \tau'), \tau') d\tau', \quad (49)$$

$$r_{n0}^+ = r_{n0}^+(r_0, \tau) = \lambda_{n1} \int_0^\tau \rho(r(r_0, \tau'), \tau') d\tau', \quad (50)$$

$$r_{n0}^+ \equiv r_{n0}^+(r_0, \tau') = \lambda_{n1} \int_0^{\tau'} \rho(r(r_0, \tau''), \tau'') d\tau'', \quad (51)$$

$$R_{n+}^{(j)}(r, \tau) = R_{n0}^{(j)} + \sqrt{\frac{n\theta}{3}} R_{n-1,1}^{(j)}. \quad (52)$$

其中 $R_{n0}^{(0)}$ 和 $R_{n-1,1}^{(0)}$ 仍由 (39) 式给出, $R_{n0}^{(1)}$, $R_{n-1,1}^{(1)}$ 仍由 (47) 和 (48) 式给出, 但 r, r_0, τ 之间关系由

$$\frac{dr}{d\tau} = \varepsilon \left[c(r, \tau) + \sqrt{\frac{n}{3}} \theta(r, \tau) \right], \quad r(\tau = 0) = r_0$$

给出. 在 (36) 式中出现的 $b_{nl}^{(0)}$ 的初值由 (29) 式中的 $b_{nl}^{(0)}(r, 0)$ 给出, 而

$$b_{nl}^{(1)}(r, 0) = -a_{nl}^{(1)}(r, 0) \quad (53)$$

这可确定 $(n, l) = (2, 2), (3, 1) \cdots$ 时的初值, 但不能确定 $b_{00}^{(1)}, b_{11}^{(1)}, b_{20}^{(1)}$ 的初值. 为保证 (30) 式, 必须有

$$a_{00}^{(1)}(r, 0) = 0,$$

$$a_{11}^{(1)}(r, 0) = - \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\rho b_{22}^{(0)}) d\tau - \frac{3}{r} \int_0^\infty b_{22}^{(0)} d\tau,$$

$$a_{20}^{(j)}(r, 0) = -\frac{5}{9} \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\rho b_{31}^{(0)}) d\tau - \frac{10}{9r} \int_0^\infty b_{31}^{(0)} d\tau - \frac{2}{3} \int_0^\infty \left(\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{c}{r} \right) b_{22}^{(0)} d\tau. \quad (54)$$

于是 $b_{00}^{(j)}$, $b_{11}^{(j)}$ 和 $b_{20}^{(j)}$ 的初值也被确定。(43), (49) 式中出现的 $u_{n-}^{(j)}$ 和 $u_{n+}^{(j)}$ 的初值由下式给出:

$$u_{n\pm}^{(j)}(r, 0) = b_{n0}^{(j)}(r, 0) \pm \sqrt{\frac{n}{3}} \theta(r, 0) b_{n-1,1}^{(j)}(r, 0). \quad (55)$$

最后, 由 (27), (11) 和 (31) 式可以得到

$$\begin{aligned} \varphi &= \rho(r, t) e^{-\frac{k^*}{2} \theta(r, t) - i k \mu c(r, t)} [1 + \xi + \phi] \\ &= \rho(r, t) e^{-\frac{k^*}{2} \theta(r, t) - i k \mu c(r, t)} \left[1 + \sum_{n,l} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (a_{nl}^{(j)} + b_{nl}^{(j)}) \right\} e_{nl} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

记

$$a_{nl} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (a_{nl}^{(j)} + b_{nl}^{(j)}). \quad (57)$$

那么物理量与它们的关系是

$$\text{密度} = \rho(1 + a_{00})$$

$$\text{流体速度} = \left(c + \frac{a_{11}}{1 + a_{00}} \right) \hat{r},$$

$$\text{动力学温度} = \theta + \frac{a_{20}}{1 + a_{00}} - \frac{1}{3} \frac{a_{11}^2}{(1 + a_{00})^2},$$

压强张量

$$\mathbf{P} = \rho \left\{ \left(\frac{3}{2} a_{22} - \frac{a_{11}^2}{1 + a_{00}} \right) \hat{r} \hat{r} + \left[\theta(1 + a_{00}) + a_{20} - \frac{1}{2} a_{22} \right] \mathbf{I} \right\},$$

热流矢量

$$\mathbf{q} = \rho \left[\frac{5}{6} a_{31} + \frac{a_{11}^3}{(1 + a_{00})^2} - \frac{5}{2} \frac{a_{11} a_{20}}{1 + a_{00}} - \frac{a_{11} a_{22}}{1 + a_{00}} \right] \hat{r}. \quad (58)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位张量, $\hat{r} \hat{r}$ 是并矢.

三、初始阶段弛豫的数值计算

为了把上节的普遍结果用于第一节中引进的具体模型, 首先要写出 φ 的初条件. 把 (2) 式代入 (4) 式中, 可得

$$\varphi(t=0) = \rho_0 e^{-\frac{k^*}{2} \theta_0} \left[1 + \sum_{l=0}^{\infty} b_{2l,0}^{(0)}(t=0) e_{2l,0} \right]. \quad (59)$$

其中

$$\rho_0 = d_0, \quad \theta_0 = d_1/d_0,$$

$$b_{2s,0}^{(0)}(t=0) = \sum_{s'=0}^s \frac{(2s)!(2s'-1)!!}{(2s')!(2s-2s')!} \left(-\frac{d_1}{d_0}\right)^{s'} \frac{d_{s-s'}}{d_0},$$

$$d_s = \frac{2}{2s+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\eta^2)}} \int_0^\infty v^{2s+2} \exp\left[\frac{-(v-v_0\eta)^2}{2(1-\eta^2)}\right] dv. \quad (60)$$

利用第二节的结果,可以计算出,精确到 $O(\varepsilon^2)$ 有

$$a_{00} = a_{11} = a_{20} = a_{22} = a_{33} = a_{42} = a_{44} = 0, \quad (61)$$

因此,由(58)式可知

$$\mathbf{P} = \rho\theta\mathbf{I}, \quad \mathbf{q} = \frac{5}{6} \rho a_{31} \hat{r}. \quad (62)$$

在 $r_c = 1$, $\delta = \Delta = 0.1$, $v_0 = 3$ 时, 经过数值计算可知, 在 $r = 0.9926$ 的地方, 热流 $\mathbf{q}$ 的大小及 a_{40} 随 τ 变化的曲线如表 1 所示. 计算中已取 $\lambda_{31} = 1$. $\mathbf{q}$ 为正表示热流从坐标原点向外.

表 1

τ	q/ε	a_{40}	τ	q/ε	a_{40}
0.000	0.00	-1.747	0.800	19.98	-0.016
0.016	-0.13	-1.591	1.000	20.25	-0.005
0.050	0.36	-1.303	1.200	20.29	-0.002
0.200	7.48	-0.542	1.600	20.26	-0.000
0.400	15.47	-0.168	2.000	20.25	-0.000
0.600	18.89	-0.052			

四、初始阶段弛豫过程的特点

如前所述, 初始阶段就是系统从远离平衡的状态向局域平衡状态弛豫的过程. 在这个阶段中, 许多在近平衡处有效的实验定律不再是正确的. 例如, 按照线性不可逆热力学, 系统中的热流与温度梯度成正比而方向与温度梯度相反^[1]. 但是, 我们所求得的结果表明, 在 $r = 0.9926$ 处, 温度梯度是 $-\hat{r}$ 方向, 而热流 $\mathbf{q}$ 在开始的某一段时间内与温度梯度是同方向的. 也就是说, 热量是从低温处流向高温处的.

初看起来, 这个结果似乎与热力学第二定律相违背, 其实不然. 因为在初始时刻, 在 $r \ll r_c$ 的范围内, 分布函数远离局域 Maxwell 分布, 因此有较小的熵. 在热量从低温向高温流动的同时, 中心部分的气体很快地向局域 Maxwell 分布弛豫, 它的熵有大幅度的增长. 因此就整个系统来说, 熵还是增加的.

从分子运动论的观点看来, 初始时刻中心附近 v_0 速度的分子多, 而更高速度及更低速度的分子很少, 而在外部是 Maxwell 分布, 其高速分子及低速分子的数目都比中心多, 只是速率在 v_0 附近的分子数目远不及中心多. 所以速率 v_0 的分子由中心向外“扩散”, 而高速及低速的分子由外部向中心“扩散”. 低速分子的运动慢, 对热流的贡献小, 而高速分

子的运动快,对热流的贡献大。因此,在一个短暂的时间之内,系统中可能出现热流从低温指向高温的现象。

就每一个局部来说,系统从初态(非正规态)向正规态的过渡是很快的。例如上节得到的 a_{40} , 是以指数形式急剧地衰减到零的。但是,这只是精确到 $O(\epsilon^2)$ 的结果。事实上,由于 $\lambda_{31} = \lambda_{40}$, 这一简并造成了气体中的高矩声波^[9]。从 a_{31} 的弛豫行为看出,它向正规态的弛豫过程不完全是指数形式的,而是有小小的振动。 a_{40} 的首次振动的振幅是 $O(\epsilon^2)$ 数量级的,因此在我们的计算结果中没有表现出来。

应当指出,本文所讨论的具体模型是相当简单的,但在初始阶段的弛豫过程中已经看到了很复杂的现象。由此可以看出,从空间不均匀的初始状态出发,气体中的弛豫过程是极其复杂的,远非空间均匀的情况可以比拟。

感谢彭桓武教授的宝贵意见。

参 考 文 献

- [1] S. R. de Groot and P. Mazur, Nonequilibrium Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam, (1962).
- [2] I. Prigogine, Thermodynamics of Irreversible Processes, Interscience, New York, 3-rd ed., (1967).
- [3] 郝柏林、于渌等编,统计物理学进展,科学出版社, (1981).
- [4] C. Cercignani, Theory and Application of the Boltzmann Equation, Scottish Academic Press, Edinburgh, (1975).
- [5] S. Chapman and T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press, Cambridge, 3-rd ed., (1970).
- [6] A. B. Бобылев, ДАН, 225 (1975), 1041.
- [7] 丁鄂江、黄祖洽,物理学报, 34(1985), 65.
- [8] 丁鄂江、黄祖洽,物理学报, 34(1985), 77.
- [9] Wang Chang C. S. and G. E. Uhlenbeck, The Kinetic Theory of Gases, in "Studies in Statistical Mechanics", Vol. V, J. de Boer and G. E. Uhlenbeck eds., North-Holland, Amsterdam, (1970).

A KIND OF RELAXATION OF RAREFIED GASES IN INFINITE SPACE WITH SPHERICAL SYMMETRY

DING E-JIANG HUANG ZU-QIA

(Low Energy Nuclear Physics Institute, Beijing Normal University)

ABSTRACT

The singular perturbation solution of Boltzmann equation for the plane geometry^[7,8] is generalized to the spherical case. Based on a specific model, some characteristics in the initial stage of relaxation process are discussed.