

部分相干信息处理中的逆源问题

庄松林 郑 权

(上海光学仪器研究所) (上海科学技术大学)

1984年3月7日收到

提 要

本文首先建立描写部分相干光信息处理系统的数学模型。作为例子,把它应用于光学象的退卷积问题,得到了为获得精确退卷积象的充要条件。建立了线性变换过程中的误差传递公式。这不仅可以用来估计退卷积象的误差,还可以用来预言最优光源分布。并且证明,对于带限信号,用合适的扩展光源,可以使退卷积象的误差尽可能小。

一、引 言

对传统的相干光学信息处理系统的运算能力,如光学象的相减、退卷积、信号的相关检测等,已作了较充分的研究。例如,可以证明,当采用严格的空相干光及滤波处理,能得到精确无误差的退卷积象。但是,由于相干光处理中存在不可避免的相干噪声及要求严格的实验条件,从而常常限制了它的应用。这样就产生了用空非相干(或部分相干)光的处理技术^[1-4]。这里有两个有兴趣的问题值得讨论,即: 1) 要得到精确的退卷积象,是否一定要用严格的空相干光及滤波器? 如果回答是肯定的,则2) 是否存在其它的光源分布及滤波函数,能够使退卷积象的误差尽可能地小。如果这一点能够做到,就可以得到误差尽量小的输出,又可以避免相干处理中存在的若干缺点。对上面这两个问题,迄今为止,并没有进行过研究。

本文首先建立描写部分相干光信息处理系统的数学模型。作为例子,把它应用于光学象的退卷积问题,得到了为获得精确退卷积象的充要条件。并且证明,利用适当辐射分布的扩展光源(空部分相干照明),可以使退卷积象的误差极小化。换句话说,当给定允许大小的误差时,可以求得最优的光源辐射分布。特别是,如果输入信号的扩展范围有限时,可以用任意的精度趋近于理想的退卷积象。

二、系统模型

光学信息处理系统可如图1所示。 L_1, L_2 及 L_3 为傅里叶变换透镜, P_1 为光源平面。光源的辐射强度分布为 $S(u, v)$; P_2 及 P_4 分别为输入及输出平面; P_3 为傅里叶平面。滤波函数为 $F(\alpha, \beta)$ 。由于从一个实际光源所发出的光不可能是严格单色的,也不存在严格的点光源,而为了改善系统的信噪比,又往往希望采用宽谱带或扩展光源^[5],所以光学系

统实际上是在部分相干条件下工作的。我们的目的是从建立描写这种处理系统的数学模型出发,然后找到一种来预计为得到最佳处理效果的光源分布 $S(u, v)$ 及滤波函数 $F(\alpha, \beta)$ 。在这里,我们首先讨论象的退卷积。这是因为它是在光学图象处理中的一个较重要的问题,而其余的问题可以用与之类似的方法进行处理。

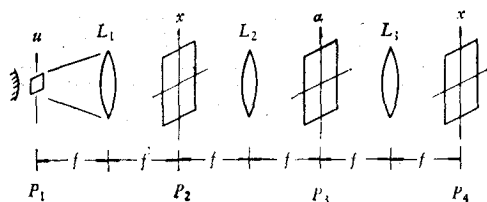


图 1

输入信号是某种卷积象,其振幅透过率为

$$t(x) = O(x) * h(x), \quad (1)$$

式中 $*$ 表示卷积运算; $O(x)$ 及 $h(x)$ 分别为原始信号及脉冲响应函数。不失一般性,本文都采用了一维表示。 $h(x)$ 可以与大气抖动、象差、物体运动等因素有关。所谓光信息处理系统的运算能力,在这种情形下,即是 $t(x)$ 经该系统处理后所输出的退卷积象 $I(x)$ 与原始信号 $O(x)$ 之间误差的大小。我们要研究的问题正是,是否能找到合适的 $S(u)$ 及 $F(\alpha)$ 使这种误差趋于极小。我们用下面的公式来定义误差的大小,即

$$\varepsilon = \|I(x) - O(x)\|, \quad (2)$$

式中 $\|\cdot\|$ 是某种范数。在数学上,我们的问题是,解出合理的 $S(u)$ 及 $F(\alpha)$ 使 ε 极小,即

$$\varepsilon = \min_{S, F} \max_O \|I(x) - O(x)\|. \quad (3)$$

下面我们将建立求解上述问题的数学模型。由于 $S(u)$ 非负,而光源的辐射能量是有限的,所以 $S(u)$ 是平方可积函数。它可以看作是希耳伯特空间 L^2 中的一个子集 L_+^2 , 即

$$S(u) \in L_+^2. \quad (4)$$

这里

$$L_+^2 = \left\{ S \mid S(u) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} S^2(u) du < +\infty \right\}, \quad (5)$$

而用

$$\|S\|_{L^2} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |S(u)|^2 du \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

来定义其范数。

部分相干光辐射场可以用所谓互强度来描写。由 Van Cittert-Zernik 定理^[6], 在 P_2 平面上的互强度为

$$J_1(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S(u) e^{-j\omega(x_1 - x_2)u} du, \quad (7)$$

式中 $\omega = 2\pi/\lambda f$, λ 为光波波长, f 为准直透镜焦距, x_1 及 x_2 为 P_2 平面上不同点的坐标。显然, $J_1(x_1, x_2)$ 仅与 x_1, x_2 的差有关,即

$$J_1(x_1, x_2) = g(x_1 - x_2) = T_1[S]. \quad (8)$$

这里 T_1 表示某种变换算子。令 $y = x_1 - x_2$, 即 $g(y)$ 为函数 $S(u)$ 的傅里叶变换。为

简单起见, 在这里略去了常数因子. 可以看到, $g(y)$ 也属于 L^2 空间. 并且存在

$$\|g\|_{L^2} = \|S\|_{L^2}. \quad (9)$$

进一步, 通过输入平面 P_2 后的互强度为

$$J_2(x_1, x_2) = J_1(x_1, x_2)t(x_1)t^*(x_2) = M_1[J_1], \quad (10)$$

式中 M_1 也是变换算子. 输入信号 $t(x)$ 可以看成是一个有限支集函数, 即该函数仅在有限区域内函数值不为零. 其性质足够好, 所以 $J_2(x_1, x_2)$ 也是平方可积函数. 而其维数为 $S(u)$ 的两倍, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |J_2(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < +\infty. \quad (11)$$

设

$$\|J_2\|_{L^2} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |J_2(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

因此 $J_2(x_1, x_2)$ 也是 L^2 中的一个元素. 应该指出, 虽然其维数不同, 我们仍用相同的符号来表示这两个 L^2 空间.

我们进一步用算子 M_1 来得到某些有用的关系, 即

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} |J_2(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 &= \iint_{-\infty}^{\infty} |g(x_1 - x_2)|^2 |t(x_1)|^2 |t^*(x_2)|^2 dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} 2 |g(y_1)|^2 \left| t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \right|^2 \left| t^*\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right) \right|^2 dy_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y_1)|^2 \phi(y_1) dy_1, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\phi(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \left| t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \right|^2 \left| t^*\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right) \right|^2 dy_2. \quad (14)$$

这里, 已作了变数代换, $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_1 + x_2$. 由于 t 是有限支集函数, 所以 $\phi(y)$ 有界, 即 $|\phi(y_1)| < K_1$, K_1 是某一常数. 这样

$$\|M_1 g\| = \|J_2\|_{L^2} \leq K \|g\|_{L^2} = K_1 \|S\|_{L^2}. \quad (15)$$

另一方面, 透镜的前焦面与后焦面上的互强度存在下述傅里叶变换关系, 即在 P_3 上的互强度为

$$J_3(\alpha_1, \alpha_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} J_2(x_1, x_2) e^{-i\omega(x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2)} dx_1 dx_2 = T[J_2], \quad (16)$$

T 为变换算子. (16) 式表示由一个 L^2 空间到另一个 L^2 空间的线性变换.

可以证明

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |J_3(\alpha_1, \alpha_2)|^2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} |J_2(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2.$$

这意味着

$$\|T[J_2]\|_{L^2} = \|J_3\|_{L^2} = \|J_2\|_{L^2}. \quad (17)$$

在傅里叶平面上通过滤波后的互强度为

$$J_4(\alpha_1, \alpha_2) = J_3(\alpha_1, \alpha_2) F(\alpha_1) F^*(\alpha_2) = M_2[J_3]. \quad (18)$$

这里 M_2 仍然是某种变换算子. 显然, 滤波函数 $F(\alpha)$ 有界, 即 $|F(\alpha_1)F^*(\alpha_2)|^2 \leq K_2$, K_2 为一有限常数. 则 $J_4(\alpha_1, \alpha_2)$ 也是平方可积函数, 存在

$$\|J_4\|_{L^2} \leq K_2 \|J_3\|_{L^2}. \quad (19)$$

最后, 在 P_4 平面上得到的输出强度为

$$I(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} J_4(\alpha_1, \alpha_2) e^{-j\omega(\alpha_1 - \alpha_2)x} d\alpha_1 d\alpha_2 = T_2[J_4]. \quad (20)$$

T_2 也是某种变换算子. 另一方面, 可以得到

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} I(x) dx \right)^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} |J_4(\alpha_1, \alpha_2)|^2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (21)$$

或

$$\|T_2[J_4]\|_{L^1} = \|I\|_{L^1} = \|J_5\|_{L^2}, \quad (22)$$

式中 L^1 为绝对可积函数的巴拿赫空间, 其范数定义为

$$\|I\| = \int_{-\infty}^{\infty} |I(x)| dx, \quad (23)$$

事实上, $I(x)$ 为非负函数, 其全体为

$$L_+^1 = \{I | I(x) \geq 0, I \in L^1\}. \quad (24)$$

这样, 我们将部分相干信息处理, 作为一系列线性变换过程, 即

$$I = T_2 M_2 T M_1 T_1 [S], \quad (25)$$

其中每一个变换算子的定义已在前面分别作了说明. 下面将利用这些关系来讨论“逆源”问题.

三、光学象的无误差退卷积

早已证明, 用严格的单色点光源及逆滤波器 (即 $S(u) = \delta(u)$ 及 $F(\alpha) = [\mathcal{F}\{h(x)\}]^{-1}$, 这里 $\mathcal{F}\{\cdot\}$ 表示傅里叶变换) 可以得到无误差的退卷积象. 但是反过来的问题, 即对其必要性并没有进行过研究. 如果能够找到一个有适当强度分布的扩展光源, 使仍然能够得到高质量的结果, 这将是非常有意义的事.

所谓无误差的退卷积象, 在数学上可用下式表示:

$$\min_{F, S} \max_0 \|I(x) - O(x)\| = 0. \quad (26)$$

要回答的问题是, $S(u)$ 及 $F(\alpha)$ 需满足怎样的条件才能使(26)式成立. 为此, 我们证明下面的命题.

命题 1 得到无误差退卷积象的充要条件为 J_1, J_2, J_3 及 J_4 是可分离变量的, 即

$$J_i(z_1, z_2) = A_i(z_1)A_i^*(z_2) \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (27)$$

证明 1) 充分性

如果 $J_1(x_1, x_2) = A_1(x_1)A_1^*(x_2)$, 则

$$J_2(x_1, x_2) = [A_1(x_1)t(x_1)][A_1(x_2)t(x_2)]^*,$$

由此

$$\begin{aligned} A_2(x_1) &= A_1(x_1)t(x_1), A_3(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(x_1)t(x_1)e^{-j\omega x_1\alpha_1}d\alpha_1, \\ A_4(\alpha_1) &= A_3(\alpha_1)F(\alpha_1), A_5(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} A_4(\alpha_1)e^{-j\omega\alpha_1x_1}d\alpha_1. \end{aligned} \quad (28)$$

由于 $t(x) = O(x) * h(x)$ 其傅里叶变换为 $\mathcal{F}\{t\} = \mathcal{F}\{O\}\mathcal{F}\{h\}$, 可以令

$$A_1(x)t(x) = O(x) * h_1(x). \quad (29)$$

这里 $h_1(x)$ 可以理解为广义的脉冲响应函数.

由此

$$\mathcal{F}\{A_1t\} = \mathcal{F}\{O\}\mathcal{F}\{h_1\}. \quad (30)$$

这样存在

$$\mathcal{F}\{h_1\} = \mathcal{F}\{A_1t\}\mathcal{F}\{h\}/\mathcal{F}\{t\}. \quad (31)$$

经过 T 变换后得到

$$T[J_2] = \mathcal{F}\{h_1\}\mathcal{F}\{O\}\mathcal{F}^*\{h_1\}\mathcal{F}^*\{O\}. \quad (32)$$

如果令滤波函数等于

$$F(\alpha) = \frac{1}{\mathcal{F}\{h_1\}} = \frac{\mathcal{F}\{t\}}{\mathcal{F}\{At\}\mathcal{F}\{h\}}, \quad (33)$$

则

$$J_4 = M[J_3] = \mathcal{F}\{O\}\mathcal{F}^*\{O\}. \quad (34)$$

最后经过 T_2 变换后就可以得到无误差的退卷积象.

2) 必要性

如果 $I(x) = O(x)$, 它们分别为

$$I(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} J_4(\alpha_1, \alpha_2)e^{-j\omega(\alpha_1-\alpha_2)x}d\alpha_1d\alpha_2 \quad (35a)$$

及

$$O(x) = \iint \mathcal{F}\{\sqrt{O}\}\mathcal{F}^*\{\sqrt{O}\}e^{-j\omega(\alpha_1-\alpha_2)x}d\alpha_1d\alpha_2. \quad (35b)$$

将上述两式相减得

$$\iint (J_4(\alpha_1, \alpha_2) - \mathcal{F}\{\sqrt{O}\}\mathcal{F}^*\{\sqrt{O}\})e^{-j\omega(\alpha_1-\alpha_2)x}d\alpha_1d\alpha_2 = 0. \quad (36)$$

由(22)式可以得到 $\|T_2[J_4]\| = \|J_5\|$, 这意味着在线性变换中范数并不发生改变, 因此

$$\|J_4 - \mathcal{F}\{\sqrt{O}\}\mathcal{F}^*\{\sqrt{O}\}\| = 0. \quad (37)$$

换句话说, $J_4(x_1, x_2)$ 是一个可分离变量的函数, 即

$$J_4(x_1, x_2) = A_4(x_1)A^*(x_2). \quad (38)$$

由(18)式 $J_3(\alpha_1, \alpha_2)$ 也是可分离变量的. 再由(17)式及(10)式可知, $J_2(x_1, x_2)$ 及 $J_1(x_1, x_2)$ 都是可分离变量的函数.

命题 2 获得无误差退卷积象的充要条件是 $J_1(x_1, x_2)$ 可以写成如下形式, 即

$$J_1(x_1, x_2) = e^{ja x_1} \cdot e^{-ja x_2}, \quad (39)$$

这里 a 为实常数.

证明

由命题 1, $J_1(x_1, x_2)$ 必定具有形式

$$J_1(x_1, x_2) = A(x_1)A_1^*(x_2).$$

由算子 T_1 的定义可以得到

$$A_1(x_1)A_1^*(x_2) = g(x_1 - x_2). \quad (40)$$

令 $x_1 = x_2 = x$, 则

$$|A_1(x)|^2 = g(o) = 1. \quad (41)$$

这里, 我们已经将常数 $g(o)$ 归格化为 1. 显然, 由(41)式可以得到函数 $A_1(x)$ 必定为纯位相函数, 即

$$A_1(x) = e^{j\theta(x)}, \quad (42)$$

式中 $\theta(x)$ 为相应的位相因子. 因此(40)式成为

$$e^{j[\theta(x_1) - \theta(x_2)]} = g(x_1 - x_2) \quad (43)$$

或者

$$\theta(x_1) - \theta(x_2) = l(x_1 - x_2) = \frac{1}{j} \ln g(x_1 - x_2). \quad (44)$$

对(44)式进行变量代换, 令 $x_1 = x + y$, $x_2 = y$, 则

$$\theta(x + y) - \theta(y) = l(x). \quad (45)$$

另一方面, 若在(44)式中令 $x_1 = x$, $x_2 = 0$, 得到

$$\theta(x) - \theta(o) = l(x). \quad (46)$$

由(45)及(46)式,

$$\theta(x + y) = \theta(y) + \theta(x) - \theta(o). \quad (47)$$

上式指出 $\theta(x)$ 是变量 x 的线性函数, 这样 $\theta(x)$ 可以表示成

$$\theta(x) = ax + b, \quad (48)$$

这里 a 及 b 为两个任意常数. 最后,

$$A_1(x_1)A_1^*(x_2) = e^{j(ax_1+b)} \cdot e^{-j(ax_2+b)} = e^{jax_1} \cdot e^{-jax_2}.$$

命题得证.

进一步, 由黎曼引理, 当 x_1 或 x_2 趋于无限时, 函数 $g(x_1 - x_2)$ 趋于零. 但是, 另一方面如(40)式所示, 它不可能等于零. 这意味着在通常的意义下, 不存在一个平方可积函数 $S(u)$, 能使所得到的退卷积象是绝对精确的. 即使在广义的意义下, 由于

$$e^{j(x_1-x_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} S(u) e^{-j\omega(x_1-x_2)u} du,$$

$S(u)$ 也必定是 δ 函数. 这样由(31)式, 滤波函数应该为 $F(\alpha) = [\mathcal{F}\{h\}]^{-1}$, 即应是逆滤波函数. 至此, 我们得到了一个重要的结论, 即要得到无误差的退卷积象, 不管脉冲响应函数是什么形式, 其充要条件为

$$S(u) = \delta(u)$$

及

$$F(\alpha) = [\mathcal{F}\{h\}]^{-1}.$$

四、误差传递及带限信号

如上一节所证明了的,虽然为了得到无误差的退卷积象,光源的强度分布必须是 δ 函数,但是,我们在这一节将要证明,存在某种分布的扩展光源,能够使退卷积象的误差尽可能地小. 或者说,我们可能找到使误差极小的最优光强分布.

在第二节中已经证明,部分相干信息处理系统可以看成是一系列线性变换过程,即

$$S(u) \xrightarrow{T_1} J_1(x_1, x_2) \xrightarrow{M_1} J_2(x_1, x_2) \xrightarrow{T} J_3(\alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{M_2} J_4(\alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{T_2} I(x). \quad (49)$$

由(49)式,可以估计在变换过程中的误差传递,即由光源的分布,可以计算输出象的误差. 反之,也可以用下述误差传递公式来确定最优光源分布,即

$$\begin{aligned} \|T_1 \Delta S\| &= \|\Delta S\|, \quad \|M_1 T_1 \Delta S\| = K_1 \|\Delta S\|, \\ \|T M_1 T_1 \Delta S\| &= K_1 \|\Delta S\|, \quad \|M_2 T M_1 T_1 \Delta S\| = K_1 K_2 \|\Delta S\|, \\ \|T_2 M_2 T M_1 T_1 \Delta S\| &= K_1 K_2 \|\Delta S\|, \end{aligned} \quad (50)$$

式中 ΔS 是与退卷积象的误差相对应的光源的误差. 事实上,信号的尺寸总是有限的. 故我们可以假定在 $|x| > l$ 时, $t(x) = 0$, 即

$$g(y) = \begin{cases} 1 & |y| \leq \sqrt{2} l, \\ 0 & |y| > \sqrt{2} l. \end{cases} \quad (51)$$

这样,如果由扩展光源所导致的输入平面上的互强度函数是窗函数,即

$$J_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & |x_1 - x_2| \leq \sqrt{2} l, \\ 0 & \text{其余}, \end{cases} \quad (52)$$

则对一个带限卷积信号,仍然可以得到无误差的退卷积象.

显然,为了得到如(52)式的互强度函数,对于一维情况,光源的分布应该是

$$S(u) = \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda f} l u}{\frac{2\pi}{\lambda f} l u}, \quad (53)$$

式中 λ 为光波波长, f 为照明透镜的焦距.

对于二维情形

$$S(u) = \frac{J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda f} l u\right)}{\frac{2\pi}{\lambda f} l u}. \quad (54)$$

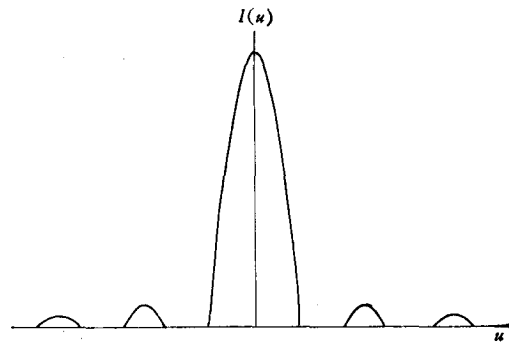


图2 扩展光源辐射分布

这里的 $J_1(x)$ 是第一类一级贝塞耳函数. 但是,光源分布必须是非负函数. 而在(53)及(54)式中都存在负值,所以我们定义一个非负的光源分布 $S^+(u)$ 来代替 $S(u)$, 即

$$S^+(u) = \begin{cases} S(u) & S(u) \geq 0, \\ 0 & \text{其余}. \end{cases} \quad (55)$$

$S^+(u)$ 为物理上可实现的光源分布,如图2所示. $S(u)$ 及 $S^+(u)$ 之间的差别就是 $\|\Delta S\|$,

而用(50)式,就可以估计由此所引起的退卷积象的误差。

五、结 论

本文建立了描述部分相干信息处理系统的数学模型。指出,这是一系列的线性变换过程。并同时得到了它的误差传递公式。这不仅可以用来估计退卷积象的误差,还可以用来预言最优光源分布。作为逆源问题,我们证明了光源分布为 δ 函数是得到无误差退卷积象的充要条件。并且证明,对于带限信号,用合适的扩展光源,可以使退卷积象的误差尽量地小。本文虽然只讨论了光学象退卷积的问题,但类似的方法也适用于其它光学处理问题。讨论逆源问题的意义在于,研究采用空间非相干(或部分相干)光进行信息处理的可能性及估计其运算能力,用以避免相干处理中的某些不足。

参 考 文 献

- [1] A. Lohmann, *Appl. Opt.*, **16** (1977), 261.
- [2] E. N. Leith and J. Roth *Appl. Opt.*, **16** (1977), 2565.
- [3] F. T. S. Yu, *Opt. Commun.*, **27**(1978), 23.
- [4] G. M. Morris and N. George, *Appl. Opt.*, **19** (1980), 3843.
- [5] F. T. S. Yu, S. L. Zhuang and S. T. Wu, *Appl. Phys.*, **B27** (1982), 99.
- [6] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 2nd rev. ed. Pergamon Press, New York, (1964).

THE IRVERSE SOURCE PROBLEM IN PARTIALLY COHERENT OPTICAL INFORMATION PROCESSING

ZHUANG SONG-LIN

(Shanghai Institute of Optical Instrument)

ZHENG QUAN

(Shanghai University of Science and Technology)

ABSTRACT

In this paper, we established a mathematical model for describing a partially coherent optical processing, and the error transfer formulas are also derived. The mathematical model could be used not only for estimating the error of a restoration image, but also for predicting the optimum source distribution. The necessary and sufficient condition for achieving non-error restoration image is obtained. And we also proved that for a truncation signal, the restoration image could be obtained with arbitrary precision by using an appropriate light source.