

# 一个镶嵌稀释双键 Potts 模型的严格解<sup>1)</sup>

杨 展 如

(北京师范大学物理系)

伍 法 岳

(美国波士顿东北大学)

1984年3月7日收到

## 提 要

本文研究在一个镶嵌正方形格子上的一个稀释双键 Potts 模型,模型中既包含铁磁作用,也包含反铁磁作用.得到了非常一般的和某些特殊情况下的临界行为的严格解及相图.特别是,我们的结果中展示出在二维情况下,当  $q \leq 3$  时,稀释反铁磁 Potts 模型也如同正规(非稀释)模型一样,存在着特殊的低温相.

## 一、引 言

对正规(非稀释) Potts 模型迄今已用各种理论方法进行了大量的研究<sup>[1]</sup>.近两三年来对稀释 Potts 模型的理论兴趣也大大增长<sup>[2-4]</sup>.其原因可能与下列情况有关: 1.某些镶嵌稀释退火 (Annealed) Potts 模型的严格解可借助于已知的正规模型的严格解求得; 2. Nienhuis 等人<sup>[5]</sup>引入空态概念到重整化群方法中,使得这一方法能证实存在一级相变(仅对自旋态数目  $q > 4$  情况)的预言.

铁磁 Potts 模型已有较多的理论结果,但反铁磁情况则由于其基态是无穷多重简并的而变得更加复杂. Berker 和 Kadanoff<sup>[6]</sup>曾采用标度论证提出反铁磁模型中存在着关联代数衰减的特殊低温相,且存在一个与空间维数有关的截止  $q$  值,  $q$  为 Potts 自旋态数目. Baxter<sup>[7]</sup>则在 1982 年获得了正方格子上反铁磁 Potts 模型的严格解.

我们考虑一个非常一般的稀释模型,它是 Kasai 等人<sup>[8]</sup>所提模型的推广.模型中既包含铁磁作用,也包含反铁磁作用.我们研究了两种作用共存和单独存在时的情况,获得了严格解.特别是获得了反铁磁相变随  $q$  值变化的规律.

## 二、模 型

考虑如图 1 的一个镶嵌正方形格子.所有正规格点上恒被一个  $q$  态自旋  $\mu$  占据.镶嵌格点分  $A, B$  两类型,它们均可随机地被  $q$  态自旋  $\sigma$  占据或空着.当某个  $A$  型格点被自

1) 本文曾在 1983 年第二届全国统计物理与凝聚态理论学术会议上报告.

旋  $\sigma$  占据时, 它跟两端最近邻正规格点上自旋  $\mu$  的作用为铁磁的, 作用常数  $J > 0$ ; 而当某个 B 型格点被自旋  $\sigma$  占据时, 它跟两端最近邻正规格点上自旋  $\mu$  的作用分别为铁磁的  $J > 0$  和反铁磁的  $-J < 0$ . 为了表现被占 A 型格点和 B 型格点的浓度, 我们引入两种格点的化学势  $\Delta_A$  和  $\Delta_B$ , 模型的哈密顿量写为

$$\begin{aligned}
 -\beta\mathcal{H} = & J \sum_{(ij)} \sum_A t_A \{ \delta_{\mu_i \sigma_{ij}} + \delta_{\mu_j \sigma_{ij}} \} \\
 & + J \sum_{(ij)} \sum_B t_B \{ \delta_{\mu_i \sigma_{ij}} - \delta_{\mu_j \sigma_{ij}} \} \\
 & + \Delta_A \sum_A t_A + \Delta_B \sum_B t_B.
 \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $t_A, t_B$  为随机变数, 当某个 A (或 B) 格点被占时  $t_A$  (或  $t_B$ ) = 1, 否则为 0.  $\sum_A, \sum_B$  分别对所有 A 型或 B 型格点求和,  $\sum_{ij}$  是对所有最近邻正规格点求和.  $J$  和  $-J$  分别代表铁磁和反铁磁作用参数.  $\beta = 1/kT$ , 其中  $k$  为玻耳兹曼常数,  $T$  为温度. 模型系统的热力学性质可用巨配分函数决定,

$$\Xi(J, \Delta_A, \Delta_B) = \sum_{\{\mu\}} \sum_{\{\sigma\}} \sum_{t_A} \sum_{t_B} \exp(-\beta\mathcal{H}). \quad (2)$$

这里  $\{\mu\}$  代表集合  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ ,  $N$  为正规格点的数目,  $\mu_i$  取值  $1, 2, \dots, q$ , 而  $\{\sigma\}$  代表所有镶嵌格点 Potts 自旋的集合, 也取  $q$  个值. 化学势  $\Delta_A, \Delta_B$  由下列约束条件决定:

$$\begin{aligned}
 p_A &= \frac{1}{2N} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \Delta_A}, \\
 p_B &= \frac{1}{2N} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \Delta_B}.
 \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $p_A, p_B$  分别为被占据的 A 型格点和 B 型格点的浓度.

为了求出模型的相变特性的严格解, 一种可能的处理方法是将其化为一个等效的仅含正规格点上自旋相互作用的 Potts 模型. 一个自然的约化方法是 decimation 方法 (或

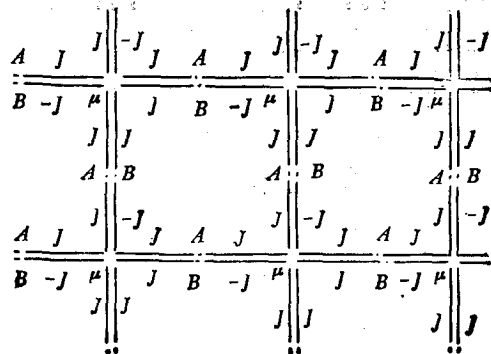


图 1

部份求和方法), 在此种处理下, 可将配分函数  $\Xi$  写为

$$\Xi = A^{Nz/2} \sum_{\{\mu\}} \exp\{K \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\mu_i \mu_j}\} = A^{Nz/2} Z(K). \quad (4)$$

这里  $z$  为配位数, 对正方形格子  $z = 4$ .  $Z(K)$  为等效 Potts 模型的配分函数, 其最近邻格点自旋的相互作用为  $K$ ,  $A$  为常数. 为了找出  $A$ ,  $K$  与  $J$  的关系, 我们分四种情况进行讨论.

### 1. 独立占据模型

首先讨论一种最一般的情况——A 型格点和 B 型格点彼此独立地被占. 在此情况下, 方程(4)中的  $A$  和  $K$  与  $J$  的关系为

$$\begin{aligned} A &= 1 + (2e^{2J} + q^2 - 2)e^{\Delta_A + \Delta_B} + (2e^J + q - 2)e^{\Delta_A} \\ &\quad + (e^J + e^{-J} + q - 2)e^{\Delta_B}, \\ e^K &= \frac{1}{A} [1 + (2e^{2J} + q^2 - 2)e^{\Delta_A + \Delta_B} + (e^{2J} + q - 1)e^{\Delta_A} + qe^{\Delta_B}]. \end{aligned} \quad (5)$$

利用(3)和(4)式可得下列表式:

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{1}{A} \{(2e^{2J} + q^2 - 2)e^{\Delta_A + \Delta_B} + (2e^J + q - 2)e^{\Delta_A}\} \\ &\quad + \frac{\varepsilon(K)}{Ae^K} \{[(2e^{2J} + q^2 - 2) - (2e^{2J} + q^2 - 2)e^K]e^{\Delta_A + \Delta_B} \\ &\quad + [(e^{2J} + q - 1) - (2e^J + q - 2)e^K]e^{\Delta_A}\}, \\ p_B &= \frac{1}{A} \{(2e^{2J} + q^2 - 2)e^{\Delta_A + \Delta_B} + (e^J + e^{-J} + q - 2)e^{\Delta_B}\} \\ &\quad + \frac{\varepsilon(K)}{Ae^K} \{[(2e^{2J} + q^2 - 2) - (2e^{2J} + q^2 - 2)e^K]e^{\Delta_A + \Delta_B} \\ &\quad + [q - (e^J + e^{-J} + q - 2)e^K]e^{\Delta_B}\}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\varepsilon(K)$  为最近邻自旋对的平均键能量,

$$\varepsilon(K) = \frac{1}{2N} \frac{\partial \ln \Xi(K)}{\partial K}. \quad (7)$$

原则上可以从(5), (6)式中消去  $\Delta_A$ ,  $\Delta_B$ , 从而求出  $p_A$ ,  $p_B$  作为  $K$ ,  $J$  及  $q$  的函数,

$$p_A = p_A(K, J, q), \quad p_B = p_B(K, J, q). \quad (8)$$

在此我们将不写出它们的显式, 因为过于冗长繁杂, 而直接给出有关的严格相图.

现已证明<sup>[3,4,9,10]</sup>, 对正规 (非稀释) Potts 模型的  $K$  及  $\varepsilon(K)$  的临界值满足下列方程:

$$e^{K_c} = 1 + \sqrt{q}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon(K_c) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right), \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) (1 \pm \Delta(q)), \end{cases} \quad (10)$$

式中

$$\Delta(q) = \tanh\left(\frac{1}{2}\theta\right) \prod_{n=1}^{\infty} (\tanh n\theta)^2, \quad 2 \cosh \theta = \sqrt{q}. \quad (11)$$

而对反铁磁 Potts 模型,在二维正方格子上的严格解也由 Baxter<sup>[7]</sup> 得到

$$e^{K_c} = -1 + \sqrt{4 - q}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon(K_c) = 2\phi'(K) = 2 \frac{d\phi(K)}{dK}, \quad (13)$$

式中

$$\phi(K) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh^2 \mu t \sin h(2\pi - 2\nu)t}{t \sinh \pi t \sinh(\pi - 2\mu)t} dt, \quad (14)$$

$$e^K = \frac{\sin(\mu + \nu)}{\sin(\mu - \nu)}, \quad (15)$$

$$\mu = \cos^{-1} \frac{1}{2} \sqrt{q}, \quad \nu = \frac{1}{2} \mu + \frac{3}{4} \pi. \quad (16)$$

我们利用(13),(14)式求出在各种  $q$  值下  $\varepsilon_c$  的数值结果,为了分析问题的需要,已将  $q$  延拓为连续变量. 所得数值结果列于表 1.

表 1

$q$	1	1.5	2	2.5	3
$\varepsilon_c$	0.5	0.3791668	$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$	0.0447756	0

利用(8)–(10),(12)及(13)式获得现有模型的严格相图示于图 2.

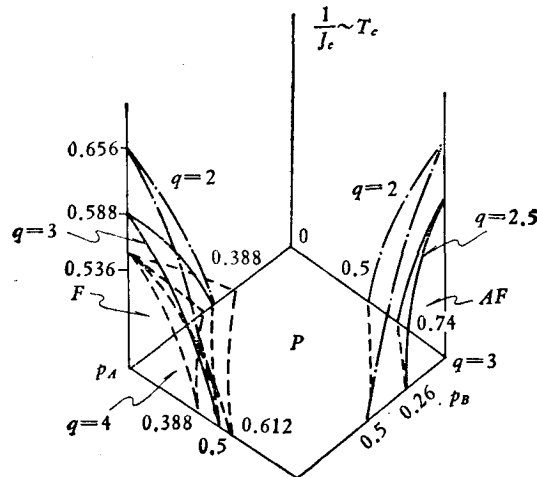


图 2

由图 2 可以看到,相空间分为三个区,其中铁磁区与反铁磁区被顺磁区所隔开. 铁磁区随  $q$  增大而缩小,但到  $q \geq 4$  时,铁磁区界面(相边界)分裂为两个面,二者之夹层相应于二相共存区,清楚地展示出一级相变的特征. 对反铁磁区,当取  $q$  为连续变量时,相图显示出随着  $q$  增加反铁磁区缩小的规律,到  $q = 3$  时反铁磁区体积为零,对应相图中一个点,这表明在二维情况下反铁磁相变的截止  $q$  值  $q_0(d=2) = 3$ ,这个结果与文献 [6,11–13] 一致,但与文献 [14] 中 Ranshaw 的猜想不同. 容易发现,独立占据模型的相图在  $q = 2$

情况下(相应于 Ising 模型)与文献[8]相同。

## 2. 格点-稀释等效铁磁 Potts 模型

如果在哈密顿量(1)式中取  $t_B = 0$  或  $\Delta_B = -\infty$ , 但同时保持  $t_A = 0$  或 1, 我们便得到格点-稀释单键 Potts 模型。容易发现, 不论  $A$  格点上的自旋与两边最近邻自旋  $\mu$  的相互作用  $J$  取为正还是取为负, 所得的等效正规 Potts 模型的作用常数  $K$  永远为正, 因此总是铁磁型的, 这将由下面方程(17)的第二个等式立即看出。类似(5)和(6)式可求出

$$A = 1 + e^{\Delta_A}(2e^J + q - 2), \quad e^K = \frac{1 + e^{\Delta_A}(e^{2J} + q - 1)}{1 + e^{\Delta_A}(2e^J + q - 2)} \quad (17)$$

和

$$p_A = \frac{2e^J + q - 2}{e^{-\Delta_A} + (2e^J + q - 2)} [1 - \varepsilon(K)] + \frac{e^{2J} + q - 1}{e^{-\Delta_A} + (e^{2J} + q - 1)} \varepsilon(K),$$

$$p_B = 0. \quad (18)$$

(17)式与文献[4]结果一致。我们也将注意到这个结果与键-稀释 Potts 模型:

$$P(K_{ij}) = p\delta(K_{ij} - K) + (1 - p)\delta(K_{ij})$$

得出相同的相图。这里  $P(K_{ij})$  为耦合常数分布函数,  $p$  为键的占据几率,  $K_{ij}$  代表最近邻自旋对间的耦合常数。

由(17)式消去  $\Delta_A$ , 可明显地写出

$$p_A = \frac{(2e^J + q - 2)(e^K - 1)}{(e^J - 1)^2} [1 - \varepsilon(K)]$$

$$+ \frac{(e^{2J} + q - 1)(e^K - 1)}{e^K(e^J - 1)^2} \varepsilon(K),$$

$$p_B = 0. \quad (19)$$

我们将分两种情况讨论临界浓度: 1) 对  $J > 0$  情况, 可求出被占格点  $A$  的临界浓度  $p_A^c$  为

$$p_A^c = \frac{(e^{K_c} - 1)\varepsilon(K_c)}{e^{K_c}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{对 } q \leq 4, \\ \frac{1}{2} [1 - \Delta(q)] & \text{对 } q \geq 4. \end{cases} \quad (20)$$

2) 对  $J < 0$  情况, 此时格点  $A$  自旋与最近邻两个正规格点自旋的相互作用都是反铁磁的, 由于此时等效正规 Potts 模型的相互作用  $K$  仍为正的, 因此利用(19)式可求出被占  $A$  格点的临界浓度为

$$p_A^c = \frac{1}{2} \{1 + (q - 2)\sqrt{q}\}. \quad (21)$$

此式确定了一个截止  $q$  值:  $q_0 = 2.618$ . 最近 Hajdukovic<sup>[13]</sup> 指出, 这个值可能看作是一个下限值。

## 3. 格点-稀释等效反铁磁 Potts 模型

前已指出,  $B$  型格点被自旋  $\sigma$  占据, 等效于两最近邻自旋  $\mu$  间存在一种反铁磁作用。

因此,如果在哈密顿量(1)式中令  $t_A = 0$  或  $\Delta_A = -\infty$ , 同时  $t_B$  仍可取 0 或 1, 便得到一个等效反铁磁 Potts 模型。在此模型中可求得

$$A = 1 + e^{\Delta_B}(e^J + e^{-J} + q - 2),$$

$$e^K = \frac{1 + e^{\Delta_B}q}{1 + e^{\Delta_B}(e^J + e^{-J} + q - 2)} \quad (22)$$

和

$$p_A = 0,$$

$$p_B = \frac{e^J + e^{-J} + q - 2}{e^{-\Delta_B} + (e^J + e^{-J} + q - 2)} [1 - \varepsilon(K)] + \frac{q}{e^{-\Delta_B} + q} \varepsilon(K). \quad (23)$$

易证(22)式中  $e^K < 1$ , 因此  $K < 0$ . 类似地,将  $\Delta_B$  消去可得

$$p_A = 0,$$

$$p_B = \frac{(e^J + e^{-J} + q - 2)(e^K - 1)}{q - (e^J + e^{-J} + q - 2)} [1 - \varepsilon(K)]$$

$$+ \frac{q(e^K - 1)}{e^K[q - (e^J + e^{-J} + q - 2)]} \varepsilon(K). \quad (24)$$

将(12),(13)式代入上式,便得到本模型的严格临界面方程,从而可构造出相图。图 3 是根据(24)及(12),(13)式绘出的相图。由相图我们再次发现低温有序相随  $q$  值增加(如果把  $q$  看作连续变量)而缩小,最后当  $q = 3$  时缩为一个点。易证临界浓度  $p_B^c$  为

$$p_B^c = (1 - e^{Kc})(1 - \varepsilon_c)$$

$$= (2 - \sqrt{4 - q})(1 - \varepsilon_c). \quad (25)$$

上式的数值结果列于表 2。

比较(21)和(25)式,我们会发现两者得到的截止  $q$  值是不同的,前者得到的  $q_c$  值为 2.618, 后者为 3, 这种不同恰好反映了两个模型的差别。我们也将发现这两个模型的相图在其它方面是非常相似的,前者相应的相图可参考例如文献[4]。这两个模型对比的结果似乎可能说明,在反铁磁情况下,把稀释模型的截止  $q$  值当作一个下限值是正确的<sup>[13]</sup>。

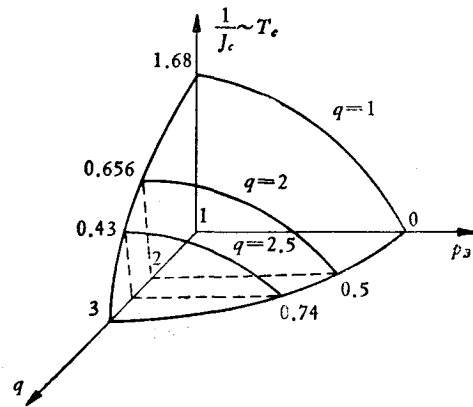


图 3

表 2

$q$	1	2	2.5	3
$p_B^c$	0	0.5	0.74	1

#### 4. 互斥占据模型

我们现在讨论模型哈密顿量的一个有趣的特殊情况,即每对格点  $A$  和  $B$  不能同时被

占或同时空着的情况,这意味着每对双键只取  $t_A = 1, t_B = 0$  或  $t_A = 0, t_B = 1$ . 相应于此模型的结果为

$$A = e^{\Delta_A}(2e^J + q - 2) + e^{\Delta_B}(e^J + e^{-J} + q - 2),$$

$$e^K = \frac{e^{\Delta_A}(e^{2J} + q - 1) + e^{\Delta_B}q}{e^{\Delta_A}(2e^J + q - 2) + e^{\Delta_B}(e^J + e^{-J} + q - 2)} \quad (26)$$

和

$$p_A = \frac{1}{A} e^{\Delta_A}(2e^J + q - 2)$$

$$+ \frac{\varepsilon(K)}{A^2 e^K} \{ e^{\Delta_A + \Delta_B} [(e^{2J} + q - 1)(e^J + e^{-J} + q - 2) - q(2e^J + q - 2)] \},$$

$$p_B = \frac{1}{A} e^{\Delta_B}(e^J + e^{-J} + q - 2)$$

$$+ \frac{\varepsilon(K)}{A^2 e^K} \{ e^{\Delta_A + \Delta_B} [q(2e^J + q - 2) - (e^{2J} + q - 1)(e^J + e^{-J} + q - 2)] \}. \quad (27)$$

由(26)式的第二式可看出  $K$  可能取正值,也可能取负值,同时由(27)式立即可证明下列预期的关系:

$$p_A + p_B = 1. \quad (28)$$

这一模型等效于下列随机键模型:

$$P(K_{ij}) = p_A \delta(K_{ij} - K) + p_B \delta(K_{ij} + K), \quad (29)$$

式中  $P(K_{ij})$  为耦合常数分布函数,  $p_A$  为铁磁键占据几率,而  $p_B = 1 - p_A$  为反铁磁键占据几率.

由(26)式消去  $\Delta_A, \Delta_B$ , 并代入(27)式中便得

$$p_A = \frac{[q - e^K(e^J + e^{-J} + q - 2)]}{q(2e^J + q - 2) - (e^J + e^{-J} + q - 2)(e^{2J} + q - 1)} \{ (2e^J + q - 2) - \frac{\varepsilon(K)}{e^K} [e^K(2e^J + q - 2) - (e^{2J} + q - 1)] \},$$

$$p_B = \frac{[(e^{2J} + q - 1) - e^K(2e^J + q - 2)]}{(e^J + e^{-J} + q - 2)(e^{2J} + q - 1) - q(2e^J + q - 2)} \{ (e^J + e^{-J} + q - 2) - \frac{\varepsilon(K)}{e^K} [e^K(e^J + e^{-J} + q - 2) - q] \}. \quad (30)$$

立即可证临界浓度为

$$p_A^c = \varepsilon(K_c), \quad p_B^c = 1 - \varepsilon(K_c). \quad (31)$$

将(9),(10)或(12),(13)式代入(30)式便可得严格的临界界面方程,与其相应的相图示于图4.

由图4可见,铁磁相的一个显著特征是,当  $q > 4$  时,两相共存区随  $q$  增加而明显地增大. 同时看到欲形成反铁磁低温有序相,仅当 B 型格点的被占浓度足够大时才能形成. 例如对  $q = 2$ ,  $p_B$  应不低于 0.85; 而对  $q = 2.5$ ,  $p_B$  应不低于 0.95. 但到  $q \geq 3$  时,决

不可能形成低温有序相。这些结果仅对二维成立, 当维数增加时,  $q$  的截止值可能增加<sup>[6,15]</sup>。相图也显示出, 对  $q=2$ , 铁磁相和反铁磁相具有对称的相边界, 这反映出界面方程的特殊对称性。

总之, 我们采用一个非常一般的稀释 Potts 模型, 讨论了各种有意义的极限情况下的相变行为的严格解及相图。所得结果似乎支持下列一种猜测: 稀释系统的临界定性行为与正规(非稀释)系统是相同的。我们的结果仅对退火 (Annealed) 模型成立, 不适用于淬火 (Quenched) 模型。

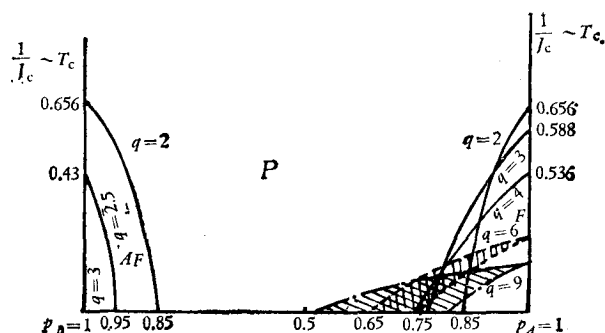


图 4

## 参 考 文 献

- [1] F. Y. Wu, *Rev. Mod. Phys.*, **54** (1982), 235.
- [2] B. W. Souther and M. F. Thorpe, *J. Phys.*, **C12**(1979), 5351.
- [3] S. Sarbach and F. Y. Wu, *Z. Phys.*, **B44**(1981), 309.
- [4] F. Y. Wu, *J. Stat. Phys.*, **23**(1980), 773.
- [5] B. Niehuis, A. N. Berker, E. K. Riedel and M. Schick, *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979), 737.
- [6] A. N. Berker and L. Kadanoff, *J. Phys.*, **A13** (1980), L259.
- [7] R. J. Baxter, *Proc. Roy. Soc. (London)*, preprinting.
- [8] Y. Kasai, S. Miyazima and I. Syozi, *Prog. Theor. Phys.*, **42**(1969), 1.
- [9] R. J. Baxter, *J. Phys.*, **C6**(1973), L445.
- [10] R. J. Baxter, H. N. V. Temperley and S. E. Ashley, *Proc. Roy. Soc. (Loddon)*, **A358** (1978), 535.
- [11] M. P. Nightingale and M. Schick, *J. Phys.*, **A15** (1982), L39.
- [12] T. Temesvari, *J. Phys.*, **A15** (1982), L625.
- [13] D. Hajdukovic, *J. Phys.*, **A16**(1983), 2881.
- [14] J. D. Ranshaw, *J. Phys.*, **A12**(1979), L271.
- [15] J. R. Banavar, G. S. Grest and D. Jasnow, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 1424.



## EXACT SOLUTION OF A DILUTE DOUBLE BOND POTTS MODEL ON THE DECORATED SQUARE LATTICE

YANG ZHAN-RU

*(Department of Physics, Beijing Normal University)*

F. Y. WU

*(Northeastern University, Boston, U.S.A.)*

### ABSTRACT

The critical behavior of a dilute double bond Potts model on the decorated square lattice is investigated. The exact equations of critical surface and phase diagrams are obtained in some special cases. In particular, our results exhibited a distinctive low-temperature phase at  $q \leq 3$  on two-dimension lattice for the dilute antiferromagnet Potts model, as expected.