

非平衡电离的多时标微扰论分析

常 铁 强

(应用物理与计算数学研究所, 北京)

1984年3月16日收到

提 要

本文用多时标微扰论方法分析非平衡电离问题。决定电子束缚态平均占据概率 P_n 的各物理过程通常具有很不相同的时间尺度。在本文中, 两个相邻能级之间的跃迁过程被看作是快过程, 其他过程 (包括电离) 则被看成是慢过程。这一理论特别适合于高 Z 元素的较低的束缚能级。理论给出了 P_n 作为自由电子数 n_e 的近似解析表达式, 结果代替求解 dP_n/dt 方程组, 只解 n_e 的常微分方程就够了。这样, 问题既得到简化又避免了 dP_n/dt 方程中很强的刚性。当辐射场达到 Planck 分布时, 这里得到的 P_n 就自然地变为 Fermi-Dirac 分布。

一、引 言

很多问题需要研究非平衡条件下的电离过程。例如, 激光照射物质时会产生低密度、高温度的等离子体区, 在此区内辐射几乎是透明的, 辐射和物质不平衡。如果靶物质是高 Z 的, 电子一般不会完全电离。此时为了研究激光能量的吸收、等离子体运动, 特别是激光能量的 X 射线转换, 必须仔细研究非平衡状态下的电离度以及电子在各束缚态上的分布。

影响电子分布的主要物理过程有: 光电效应及其反过程自由电子辐射复合; 自由电子和原子碰撞引起的束缚电子电离 (反过程为三体碰撞复合) 或者束缚电子被激发到高能态 (反过程为退激发); 谱线发射及吸收。还有一些其他效应, 如 Auger 效应, 但在下面的讨论中将不考虑, 这对高 Z 物质是对的。

描述电子状态及电离度变化可用组态速率方程^[1], 也可以用平均离子模型^[2]。在后者的情况下就是要计算束缚能级上的占据概率 P_n , 它满足下面的方程组^[2]:

$$\frac{dP_n}{dt} = A_n - B_n P_n + \beta_n + Q_n \quad (n = 1, 2, \dots, n_0), \quad (1)$$

$$n_e = \frac{N_0}{A} \left[Z_0 - \sum_{n=1}^{n_0} C_n P_n \right], \quad (2)$$

其中 N_0 为阿伏伽德罗常数, A 为原子量, Z_0 为原子序数, n_e 为单位质量的自由电子数, $C_n = 2n^2$ 是主量子数为 n 的能级的量子态数。在(1)式中,

$$A_n = N_e(\beta_n^{(v)} + N_e \beta_n^{(c)}), B_n = A_n + N_e \alpha_n^{(c)} + \alpha_n^{(v)}, \quad (3)$$

$$\beta_n = \frac{C_{n-1}}{C_n} N_e \beta_{n-1, n} P_{n-1} (1 - P_n) + N_e \alpha_{n+1, n} P_{n+1} (1 - P_n)$$

$$\begin{aligned}
& -N_e \alpha_{n,n-1} \frac{C_{n-1}}{C_n} P_n (1 - P_{n-1}) - N_e \beta_{n,n+1} P_n (1 - P_{n+1}) \\
& + H_{n,n+1} [\gamma_{n+1,n}^{(1)} P_{n+1} (1 - P_n) - \gamma_{n,n+1}^{(2)} P_n (1 - P_{n+1})] \\
& + \frac{C_{n-1}}{C_n} H_{n-1,n} [\gamma_{n-1,n}^{(2)} P_{n-1} (1 - P_n) - \gamma_{n,n-1}^{(1)} P_n (1 - P_{n-1})], \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_n = & \sum_{\substack{n' > n \\ n' \neq n+1}} H_{n,n'} [\gamma_{n',n}^{(1)} P_{n'} (1 - P_n) - \gamma_{n,n'}^{(2)} P_n (1 - P_{n'})] \\
& + \sum_{\substack{n'' < n \\ n'' \neq n-1}} \frac{C_{n''}}{C_n} H_{n'',n} [\gamma_{n'',n}^{(2)} P_{n''} (1 - P_n) - \gamma_{n,n''}^{(1)} P_n (1 - P_{n''})], \quad (5)
\end{aligned}$$

其中 $N_e = \rho n_e$ 为单位体积自由电子数. 方程各项中的系数所对应的物理过程为: $\alpha_n^{(v)}$, $\beta_n^{(v)}$, 光电效应及辐射复合; $\alpha_n^{(e)}$, $\beta_n^{(e)}$, 碰撞电离及三体碰撞复合; $\alpha_{n+1,n}$, $\beta_{n,n+1}$, n 和 $n+1$ 能级间的碰撞退激发及碰撞激发; $H_{n,n'}$, n, n' 能态间的跃迁; $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ 和辐射场有关; $H\gamma^{(1)}$, $H\gamma^{(2)}$ 分别对应于谱线发射和吸收. 因此方程(1)中 $A_n - B_n P_n$ 描述电离, β_n 描述相邻能级间的跃迁, Q_n 描述非邻近能级跃迁. 在(1)式中已经忽略了非邻近能级间的碰撞激发与退激发(退激发相对于相应的能级间线发射完全可以忽略). 不过, 在下面的讨论中包括这些项是毫不困难的. 这些系数和电子温度(已假定自由电子满足 Maxwell 分布)及辐射场强度的详细关系可参看文献[2]. 这里, 为了下面讨论的需要, 仅指出

$$\alpha_{n,n-1} = \beta_{n-1,n} e^{I_{n-1,n}/T_e}, \quad (6)$$

其中 $I_{n-1,n} = I_{n-1} - I_n$, I_n 为第 n 壳层电子的电离能; 考虑诱导辐射后,

$$\frac{\gamma_{n',n}^{(1)}}{\gamma_{nn'}^{(2)}} = \frac{1 + f(\nu_{nn'})}{f(\nu_{nn'})}, \quad (7)$$

其中 $f(\nu)$ 是一个量子态上频率为 ν 的光子数 $h\nu_{nn'} = h\nu_{n'n} = |I_n - I_{n'}|$. 特别地当辐射场具有电子温度下的 Planck 分布时,

$$\frac{\gamma_{n',n}^{(1)}}{\gamma_{nn'}^{(2)}} = \exp\left\{\frac{I_n - I_{n'}}{T_e}\right\} \quad n' > n. \quad (8)$$

方程(1)的特点是具有强的刚性(stiff), 各项系数的大小差别很大, 给方程组数值求解带来困难.

本文的目的是讨论用多时标微扰论方法^[3,4]近似求解方程(1),(2). 当问题存在着时间尺度相差很大的不同过程而又需要知道物理量的长时间行为时, 可以用多时标微扰论方法. 包括在方程(1)中的两类过程是电子从束缚态到自由态的电离过程和电子在束缚态各能级之间的跃迁, 即束缚电子在不同能级上的分布过程. 前者的时间尺度 $\tau_n^{(i)} \sim 1/B_n$. 电子在束缚态各能级之间的跃迁主要是相邻能级之间的跃迁, 将 β_n 写为

$$\beta_n = d_n - g_n P_n$$

的形式, 此过程的弛豫时间 $\tau_n^{(b)} \sim 1/g_n$. 由于 g_n 中包含了线跃迁(跃迁概率大), 当系统中辐射场不太强(以使光电过程可视为慢过程), 对于主量子数不太高的能级, 电离是慢过程, 其弛豫时间相对要长得多, 特别对于高 Z 物质. 例如激光打高 Z 靶, $T_e \sim \text{KeV}$, 对于 $n = 1-5$, 在临界面附近的区域内(临界面处的电子密度 $N_{ec} = 10^{21}/\lambda^2 (\mu\text{m})$, λ 为激光波长)两个时间尺度至少差一、两个数量级(亚临界密度区差别更大). 方程(1)包括了非邻

近跃迁,它和邻近跃迁相比也要慢得多,也可以作为慢过程处理.随着 n 的提高,碰撞电离的时间尺度愈来愈小.如果实际问题需要考虑这些能级,常常可以采用其他近似方法,但这超出了本文讨论的范围.因此,为了讨论方便,在下面的讨论中,将认为全部束缚能态 $n=1, \dots, n_0$,多时标方法都适用.

二、零级近似下的解

用多时标微扰论方法研究电离问题需求解 $\frac{dn_e}{dt}$ 微分方程,理由是这样的:在快时标的时间尺度内 P_n 的变化取决于电子在不同束缚能级间分布的快过程,但 P_n 的长时间行为是由电离的慢过程决定的,即由 $n_e(t)$ 决定.

进行微扰展开需要引入形式微扰参数 $\epsilon \ll 1$.根据前面的讨论,有

$$\frac{dP_n}{dt} = \epsilon[(A'_n - B'_nP_n) + Q'_n] + \beta_n, \quad (9)$$

$$\frac{dn_e}{dt} = -\epsilon \frac{N_0}{A} \sum_{n=1}^{n_0} C_n(A'_n - B'_nP_n). \quad (10)$$

得到(10)式,已经利用了 $\sum_{n=1}^{n_0} C_n\beta_n = \sum_{n=1}^{n_0} C_nQ_n = 0$.其中 $A'_n = A_n/\epsilon$, $B'_n = B_n/\epsilon$, $Q'_n = Q_n/\epsilon$.

令

$$P_n = P_n^{(0)}(\tau, \tau_1, \tau_2, \dots) + \epsilon P_n^{(1)}(\tau, \tau_1, \tau_2, \dots) + \epsilon^2 P_n^{(2)} + \dots, \\ n_e = n_e^{(0)}(\tau, \tau_1, \tau_2, \dots) + \epsilon n_e^{(1)}(\tau, \tau_1, \tau_2, \dots) + \epsilon^2 n_e^{(2)} + \dots, \quad (11)$$

其中 $\tau, \tau_1, \dots$ 等为独立时间变量.在多维空间的直线上 $\tau = t, \tau_1 = \epsilon t, \tau_2 = \epsilon^2 t \dots$, P_n, n_e 将满足方程(9),(10), d/dt 为该直线上的全微分,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots. \quad (12)$$

将(11),(12)式代入(9),(10)式,比较 ϵ 的相同次幂的项,就得到

$$\epsilon^0 \quad \frac{\partial P_n^{(0)}}{\partial \tau} = \beta_n, \quad (13)$$

$$\frac{\partial n_e^{(0)}}{\partial \tau} = 0; \quad (14)$$

$$\epsilon^1 \quad \frac{\partial P_n^{(0)}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial \tau} P_n^{(1)} = (A'_n - B'_nP_n + Q'_n)_{(0)} \\ + \sum_i \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial P_i} \right)_{(0)} P_i^{(1)} + \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial n_e} \right)_{(0)} n_e^{(1)}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial n_e^{(0)}}{\partial \tau_1} = -\frac{N_0}{A} \sum_{n=1}^{n_0} C_n(A'_n - B'_nP_n), \quad (16)$$

式中下脚标“(0)”表示用零级量代入.(14)式(0)表明 $n_e^{(0)}$ 只能是 $\tau_1, \tau_2, \dots$ 的函数,就是说

电离是一慢过程. 从 β_n 的表达式可以看到方程(13)是一非线性方程组, 解析地得到它的解是很困难的. 我们做进一步近似, 令 $\beta_n = 0$. 这一近似的物理解释是: 电子在束缚能态间的分布排列如此之快以至于可以忽略这一过程的弛豫时间, 认为是瞬时完成的. 这一近似立即导致 $P_n^{(0)}$ 的解析解. 首先, 为了简化计算, 定义

$$\begin{aligned}\omega_{n-1,n} &\equiv [N_c \beta_{n-1,n} + H_{n-1,n} \gamma_{n-1,n}^{(2)}], \\ \delta_{n,n+1} &\equiv [N_c \alpha_{n+1,n} + H_{n,n+1} \gamma_{n,n+1}^{(1)}].\end{aligned}\quad (17)$$

这样, $\beta_n = 0$ 就写成

$$\begin{aligned}&\left\{ \frac{C_{n-1}}{C_n} \omega_{n-1,n} P_{n-1} + \delta_{n,n+1} P_{n+1} \right\}_{(0)} (1 - P_n^{(0)}) \\ &= P_n^{(0)} \left\{ \frac{C_{n-1}}{C_n} \delta_{n-1,n} (1 - P_{n-1}^{(0)}) + \omega_{n,n+1} (1 - P_{n+1}^{(0)}) \right\}_{(0)}.\end{aligned}\quad (18)$$

从(18)式可以看出, 如果

$$\begin{aligned}P_n^{(0)} (1 - P_{n-1}^{(0)}) \delta_{n-1,n} &= P_{n-1}^{(0)} (1 - P_n^{(0)}) \omega_{n-1,n}, \\ P_{n+1}^{(0)} (1 - P_n^{(0)}) \delta_{n,n+1} &= P_n^{(0)} (1 - P_{n+1}^{(0)}) \omega_{n,n+1}.\end{aligned}\quad (19)$$

就有

注意到不存在主量子数 $n = 0$ 的能级, $\beta_1 = 0$ 直接导致 $P_2^{(0)}(1 - P_1^{(0)})\delta_{1,2} = P_1^{(0)}(1 - P_2^{(0)})\omega_{1,2}$, 因此用归纳法就有

$$\frac{1 - P_n^{(0)}}{P_n^{(0)}} \delta_{n,n+1} = \frac{1 - P_{n+1}^{(0)}}{P_{n+1}^{(0)}} \omega_{n,n+1}, \quad n = 1 \cdots n_0 - 1. \quad (20)$$

令 $S_n = 1 - (P_n^{(0)}/P_n^{(0)})$, 则 $P_n^{(0)} = [1 + S_n]^{-1}$, S_n 满足迭推关系:

$$S_n/S_{n+1} = \frac{\omega_{n,n+1}}{\delta_{n,n+1}} \equiv \alpha_n. \quad (21)$$

则 $P_n^{(0)}$ 具有下面形式的解:

$$P_n^{(0)} = \frac{1}{(1 + S_n)} = 1 / \left[1 + \prod_{j=n}^{n_0-1} \alpha_j \cdot S_{n_0} \right]. \quad (22)$$

因此, 只要知道了 S_{n_0} , 其他能级的 $P_n^{(0)}$ 也就知道了. 但应该注意到 $P_{n_0}^{(0)}$ 不能通过上述的手续得到, 因为既然 $\omega_{n_0, n_0+1} = \delta_{n_0, n_0+1} = 0$, $\beta_{n_0} = 0$, 就得不到 $P_{n_0}^{(0)}$ 和 $P_{n_0-1}^{(0)}$ 之间的新的关系式. 其实这是很自然的, 因为 β_n 只描述邻近跃迁, 因而 $\beta_n = 0$ 只能给出 $P_n^{(0)}$ 之间的相对关系, 换句话说, 缺乏一个归一化常数, 例如束缚电子总数. 很显然 $P_{n_0}^{(0)}$ 应通过

$$n_e^{(0)} = \frac{N_0}{A} \left[Z_0 - \sum_{n=1}^{n_0} C_n P_n^{(0)} \right] \quad (23)$$

确定, 而 $n_e^{(0)}(\tau_1, \tau_2, \dots)$ 要由下面将讨论的微分方程确定. 不过, 在此之前让我们先讨论 S_n 的物理意义. 由于 $P_n^{(0)} = (1 + S_n)^{-1}$, 因而当达到热力学平衡时, $S_n = \exp\{[E_n - \mu_e]/kT_e\}$, 其中 μ_e 为一个电子的 Gibbs 自由能, $E_n = -I_n$,

$$\exp(\mu_e/kT_e) = \frac{N_e h^3}{2(2\pi m_e kT_e)^{3/2}}.$$

那时

$$S_n/S_{n+1} = \alpha_n = \exp\{(E_n - E_{n+1})/kT_e\}. \quad (24)$$

我们已经假定了自由电子满足 Maxwell 分布, 如果再假定光子具有平衡的 Planck 谱时, 利用(6),(8),(17),(21)式容易得到(24)式. 因此, 得到的结果能连续过渡到平衡态, 光子的 Planck 分布导致电子的 Fermi-Dirac 分布.

$n_e^{(0)}(\tau_1)$ 满足的方程可由 (16) 式得到. 由于 $n_e^{(0)}$ 和 τ 无关, 而且在 $\beta_n = 0$ 的近似下 $P_n^{(0)}$ 也和 τ 无关, (16) 式右端各项以及该式左端的 $\frac{\partial}{\partial \tau_1} n_e^{(0)}$ 都和 τ 无关, 显然这些项应该相互消去, 否则将会得到 $n_e^{(1)} \propto \tau$ 的解, 当 τ 很大时 $n_e^{(1)}$ 将趋于无限大, 它不是物理解. 因此得到

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} n_e^{(0)} = -\frac{N_0}{A} \sum_{n=1}^{n_0} C_n (A'_n - B'_n P_n)_{(0)}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} n_e^{(1)} = 0, \quad (26)$$

即 $n_e^{(1)}$ 的变化也是缓慢的. (25) 和 (8) 式具有相同的形式, 给出电离度随时间的慢变化. 方程 (25) 以及 (22), (23) 就给出了零级近似下的解.

三、进一步展开

现在讨论方程 (15). 该方程左端第一项为 $\frac{\partial P_n^{(0)}}{\partial \tau_1}$, 在零级量 $P_n^{(0)}(n_e^{(0)})$, $n_e^{(0)}(\tau_1)$ 已经知道后, 它便是已知的, 而且和 τ 无关. 方程右端包括了 $n_e^{(1)}$, 它也和 τ 无关, 但它作为 τ_1 的函数需要用新的方程确定. 不过, 暂时先把它看成已知的, 以研究方程的性质. 方程 (15) 可写为

$$\frac{\partial P_n^{(1)}}{\partial \tau} = \sum_i R_{n,i} P_i^{(1)} + \Psi_n(\tau_1), \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_n(\tau_1) &= (A'_n - B'_n P_n + Q'_n)_{(0)} + \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial n_e} \right)_{(0)} n_e^{(1)} - \frac{\partial P_n^{(0)}}{\partial \tau_1} \\ &\equiv \Phi_n + \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial n_e} \right)_{(0)} n_e^{(1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$R_{n,i} \equiv \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial P_i} \right)_{(0)}. \quad (29)$$

(27) 式的解为

$$\begin{aligned} |P^{(1)}(\tau)\rangle &= \sum_m e^{\lambda_m \tau} \langle \tilde{\Lambda}_m | P^{(1)}(\tau=0) \rangle | \Lambda_m \rangle \\ &\quad - \sum_m \frac{1}{\lambda_m} [1 - e^{\lambda_m \tau}] \langle \tilde{\Lambda}_m | \Psi \rangle | \Lambda_m \rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 λ_m 为 R 矩阵的本征值, $|\Lambda_m\rangle$ 是相应的本征矢量

$$R |\Lambda_m\rangle = \lambda_m |\Lambda_m\rangle,$$

$$\langle \tilde{\Lambda}_m | R = \lambda_m \langle \tilde{\Lambda}_m |. \quad (31)$$

$\langle \tilde{\Lambda}_m |$ 是相应于同一本征值 λ_m 的左本征矢. $\langle \tilde{\Lambda}_i |, | \Lambda_j \rangle$ 之间满足正交归一条件,

$$\langle \tilde{\Lambda}_i | \Lambda_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (32)$$

现在来研究 λ_m 的取值范围. 因为在多时标微扰论方法中物理量被推广为多维空间 $\tau, \tau_1, \dots$ 中的函数, 而只要求物理量沿此空间直线 $\tau = t, \tau_1 = \epsilon t, \tau_2 = \epsilon^2 t, \dots$ 的全微分满

足原来的常微分方程, 所以在这个多维空间中沿其他任何方向的微分都可以根据物理问题而选取. 在现在的情况下, 物理上有意义的解就是 τ 很大时仍然有限的解. 从 (30) 式可知, 对应于 $\operatorname{Re} \lambda_m > 0$ 或者 $\lambda_m = 0$, 必须有 $\langle \tilde{\Lambda}_m | \Psi_m \rangle = 0$ (可解性条件), 可解性条件可以给出新的定解方程.

从 β_n 的表达式可知, R 是一三对角矩阵:

$$\begin{aligned} R_{n,n} &= - \left[\frac{C_{n-1}}{C_n} \frac{P_{n-1}}{P_n} \omega_{n-1,n} + \frac{P_{n+1}}{P_n} \delta_{n,n+1} \right]_{(0)} < 0, \\ R_{n,n+1} &= \left[\frac{P_n}{P_{n+1}} \omega_{n,n+1} \right]_{(0)} > 0, \\ R_{n,n-1} &= \left[\frac{C_{n-1}}{C_n} \frac{P_n}{P_{n-1}} \delta_{n-1,n} \right]_{(0)} > 0. \end{aligned} \quad (33)$$

其他矩阵元为零. 由 (33) 式可知, R 的矩阵元都是实数, 而且 $R_{i,i+1} \cdot R_{i+1,i} > 0$, 这样的三对角矩阵称为 Jacobi 矩阵. 普遍的本征值取值范围的判断方法在稳定性理论中做了不少研究, 也存在一些判据, 例如 Hurwitz 判据^[5,6]. 但是当 R 的阶很高时, 采用 Hurwitz 判据很麻烦. 因此, 我们采用另外的方法研究 R 的本征值. 这里, 要利用两条关于 Jacobi 矩阵的定理^[7]. 下面, 首先引述这两条定理.

设 A 为 Jacobi 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & \\ & & c_{n-1} & a_n & \end{pmatrix}, \quad b_i c_i > 0. \quad (34)$$

令 φ_r 表示 $A - \lambda I$ 的 r 阶左上角主子行列式,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda) &= a_1 - \lambda, \\ \varphi_r(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 - \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{r-1} - \lambda & b_{r-1} & \\ & & c_{r-1} & a_r - \lambda & \end{vmatrix}, \\ \varphi_0(\lambda) &\equiv 1. \end{aligned} \quad (35)$$

并定义 $S_r(\lambda^*)$ 为 λ 取 λ^* 值时, 数值序列 $\varphi_0(\lambda^*), \varphi_1(\lambda^*), \dots, \varphi_r(\lambda^*)$ 中相邻两个为同号的个数 (若 $\varphi_i(\lambda^*) = 0$, 则规定 $\varphi_i(\lambda^*)$ 和 $\varphi_{i-1}(\lambda^*)$ 的符号相反). 例如, 该序列符号为 $+-0++-$ 时 $S_7 = 3$.

定理 I Jacobi 矩阵 $\varphi_r(\lambda)$ 的根均为实根, 且各不相等,

$$\lambda_1^{(r)} < \lambda_2^{(r)} < \lambda_3^{(r)} \dots < \lambda_r^{(r)}.$$

定理 II 若对某 λ_0 序列 $\varphi_0(\lambda_0), \varphi_1(\lambda_0) \dots \varphi_n(\lambda_0)$ 的同号数为 $S_n(\lambda_0)$, 则矩阵 A 恰有 $S_n(\lambda_0)$ 个大于 λ_0 的本征值.

利用这两条定理, 对 R 矩阵就可以证明下面的定理:

定理 由 (33) 式定义的矩阵 R 的所有本征值均小于 0.

证明 注意到对 $R - \lambda I$ 的主子行列式

$$\varphi_{r+1}(\lambda) = (R_{r+1,r+1} - \lambda)\varphi_r(\lambda) - R_{r+1,r}R_{r,r+1}\varphi_{r-1}(\lambda), \quad (36)$$

就可以求出 $\varphi_{r+1}(0)$ 的值. 因为 $\omega_{0,1} = \delta_{0,1} = 0, \varphi_0(0) = 1$ (定义),

$$\varphi_1(0) = R_{1,1} = -\left(\frac{P_2}{P_1} \delta_{1,2}\right)_{(0)} < 0, \quad (37)$$

代入(36)式得

$$\varphi_2(0) = \left(\frac{P_3}{P_1} \delta_{1,2}\delta_{2,3}\right)_{(0)} > 0. \quad (38)$$

但是, 假使

$$\varphi_k(0) = (-)^k \left[\frac{P_{k+1}}{P_1} \prod_{i=0}^k \delta_{i,i+1} \right]_{(0)} \quad k = r, r-1,$$

则

$$\begin{aligned} \varphi_{r+1}(0) = & - \left[\frac{C_r}{C_{r+1}} \frac{P_r}{P_{r+1}} \omega_{r,r+1} + \frac{P_{r+2}}{P_{r+1}} \delta_{r+1,r+2} \right]_{(0)} \\ & \cdot (-)^r \left[\frac{P_{r+1}}{P_1} \prod_{i=1}^r \delta_{i,i+1} \right]_{(0)} - \left[\frac{C_r}{C_{r+1}} \omega_{r,r+1} \delta_{r,r+1} \right]_{(0)} \\ & \cdot \left[(-)^{r-1} \frac{P_r}{P_1} \prod_{i=1}^{r-1} \delta_{i,i+1} \right]_{(0)} = (-)^{r+1} \left[\frac{P_{r+2}}{P_1} \prod_{i=1}^{r+1} \delta_{i,i+1} \right]_{(0)}. \end{aligned} \quad (39)$$

因此就有

1) $\varphi_r(0)$ 的符号为 $(-)^r$, $S_n(0) = 0$, 即无论 R 矩阵的阶为多少, 均不存在大于 0 的本征值.

2) 因 $\delta_{i,i+1} > 0$, 所以 $\varphi_{n_0}(0) \neq 0$, $\lambda = 0$ 不是 R 的本征值, 定理得证.

由此定理可知, 解(30)式不存在导致发散的项. 在上一节中已经忽略了 $P_n^{(0)}$ 对 τ 的依赖性, 与此一致, 在(30)式中令 $\tau \rightarrow \infty$, 就得到

$$|P^{(1)}\rangle = - \sum_m \lambda_m^{-1} \langle \tilde{\Lambda}_m | \Psi \rangle | \Lambda_m \rangle, \quad (40)$$

$|\Psi\rangle$ 中包括了未知函数 $n_c^{(1)}$, $|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + \left| \left(\frac{\partial \beta}{\partial n_c} \right)_{(0)} \right\rangle n_c^{(1)}$, $n_c^{(1)}$ 要由相应的方程确定. 将方程(10)展开到 ε^2 , 并忽略 $\frac{\partial n_c^{(0)}}{\partial \tau_2}, \frac{\partial n_c^{(2)}}{\partial \tau}$ 后, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_c^{(1)}}{\partial \tau_1} = & - \frac{N_0}{A} \sum_{n=1}^{n_0} C_n \left(\frac{\partial A'_n}{\partial n_c} - \frac{\partial B'_n}{\partial n_c} P_n \right)_{(0)} n_c^{(1)} \\ & + \frac{N_0}{A} \sum_n C_n B'_n P_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (41)$$

将(40)式代入(41)式后得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_c^{(1)}}{\partial \tau_1} = & - \frac{N_0}{A} \left\{ \sum_n C_n \left[\frac{\partial A'_n}{\partial n_c} - \frac{\partial B'_n}{\partial n_c} P_n \right. \right. \\ & \left. \left. + B'_n \sum_m \lambda_m^{-1} \langle \tilde{\Lambda}_m | \left| \frac{\partial \beta}{\partial n_c} \right| | \Lambda_m \rangle_n \right]_{(0)} \right\} n_c^{(1)} \\ & - \frac{N_0}{A} \left[\sum_n C_n B'_n \sum_m \lambda_m^{-1} \langle \tilde{\Lambda}_m | \Phi \rangle | \Lambda_m \rangle_n \right]_{(0)}, \end{aligned} \quad (42)$$

其中 $|\Lambda_m\rangle_n$ 表示矢量 $|\Lambda_m\rangle$ 的第 n 个分量.

从(42)式解出 $n_e^{(1)}$ 后代入(40)式就得到 $P_n^{(1)}$ 。这样展开到 ϵ 的一次方项, 就得到了近似解

$$\begin{aligned} P_n(t) &= P_n^{(0)}(\epsilon t) + \epsilon P_n^{(1)}(\epsilon t), \\ n_e(t) &= n_e^{(0)}(\epsilon t) + \epsilon n_e^{(1)}(\epsilon t). \end{aligned} \quad (43)$$

四、讨 论

多时标微扰论是一种常用的近似方法, 我们将它用来解决平均离子模型近似下的电离问题。在进一步忽略了快时标的时间尺度以后, 得到了电子占据概率的解析解, 使问题得到很大的简化, 归结为只解自由电子数的常微分方程, 不仅减少了待解方程的数目, 而且也避免了解原 P_n 方程中由线跃迁引起的很强的刚性。一般来说, 采用多时标微扰论方法应对不同时标求解, 我们之所以能够忽略对快时标的依赖性 ($\tau \rightarrow \infty$) 是因为我们处理的问题是一个弛豫过程问题, 包括快过程弛豫和慢过程弛豫。解的长时间行为是由慢过程决定的, 快时标过程弛豫行为只在最初一段短时间内有较大影响, 随着时间的发展, 它的影响会越来越小。

电离以及电子在束缚态上的分布速率和电子温度及物质密度有关。在很多实际问题中 ρ, T_e 也是时间空间的函数, 而且电离本身就会直接引起电子温度的变化, 因而我们得到的电子数变化速率方程要和流体力学方程耦合求解, 微观过程系数中包含的辐射场强度及谱分布也要由辐射输运方程提供。

应用多时标微扰论的基础是快慢过程能够明显地分开。因此, 在我们的情况下, 如果辐射强度很大(辐射参数包括在 $\alpha^{(p)}, \beta^{(p)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ 中)以致于光电效应速率很快可以和线发射过程比较时, 本文的方法就不再适用了。

电离问题的多时标微扰论方法处理不同于通常采用的电晕模型或碰撞辐射模型^[8], 不仅因为我们考虑了电离度和电子占据概率的时间变化过程, 而且因为这里给出的方法既适用于远离平衡也适用于离开局部热力学平衡不远的情况, 而碰撞辐射模型只适用于光性薄的情况。

参 考 文 献

- [1] K. G. Whitney and J. Davis, *J. Appl. Phys.*, **45** (1974), 5294.
- [2] W. A. Lokke and W. H. Grasberger, UCRL-52276, (1977).
- [3] G. Sandi, *Nuovo Cimento*, **36** (1965), 67.
- [4] Ronald C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* Academic Press, New York and London, (1972), 1.
- [5] Jörg W. Stucki, *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, **33**(1978), 99.
- [6] Hermann Haken, *Synergetics*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, (1977), 5.
- [7] 蒋尔雄、高坤敏、吴景琨, 线性代数, 人民教育出版社, (1978).
- [8] D. Colombant and G. F. Tonon, *J. Appl. Phys.*, **44**(1973), 3524.

NONEQUILIBRIUM IONIZATION PROBLEM ANALYZED BY USING MULTIPLE-TIME-SCALE PERTURBATION THEORY

CHANG TIE-QIANG

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing*)

ABSTRACT

This paper analyzes nonequilibrium ionization problem by using multiple-time-scale perturbation theory. The processes which are responsible for electron's average occupation probabilities P_n generally have much different time scales. In this paper the transitions between two neighbouring bound energy levels are considered as fast, the others, including the ionization processes, as slow. It is especially suitable for lower levels of high Z elements. The theory presented here gives analytic expressions for P_n as functions of n_e , the number of free electrons. As a result, instead of solving equations of dP_n/dt we just need solving the differential equation for n_e . So the problem is much simplified with avoiding the strong stiff which exists in equations dP_n/dt . When radiation field reaches the Planck distribution, the P_n obtained here can naturally change into the Fermi-Dirac distribution.