

用 $SU(2)$ 的分立子群对 $SU(2)$ 格点规范新作用量的 Monte Carlo 模拟

李文铸 张剑波 董绍静

(浙江大学物理系)

1984 年 5 月 4 日收到

提 要

我们用 $SU(2)$ 的正二十面体分立子群对 $SU(2)$ 格点规范理论的正弦作用量与指数作用量进行了 Monte Carlo 模拟. 发现由分立子群本身产生的一阶相变点分别在 $\beta_c' \approx 9.2 \pm 0.2$ 和 $\beta_c'' = 6.8 \pm 0.2$. 对方格能量和比热所得的结果与用 $SU(2)$ 群所得的结果一致. 从而证实了对以上两种作用量, 用分立子群代替连续群的适用性, 为以后进行计算时利用分立子群提供了依据.

格点规范理论提供了一种研究规范场非微扰效应的有效途径^[1]. 近年来在这个领域已做了大量工作, 取得了不少成果. 特别是把 Monte Carlo 模拟方法应用于格点规范理论的研究^[2], 使这个理论得到了迅速发展. 但是, 由于计算机容量与时间的限制, Monte Carlo 计算还是比较粗糙的, 有待于进一步完善与提高. 特别是在加入费密子后^[3], 用 Monte Carlo 模拟进行研究, 其计算量非常大, 以致于只能进行小格点、低统计精度的计算.

一些作者用 $SU(2)$ 的分立子群代替 $SU(2)$ 群对格点规范理论的 Wilson 作用量进行了 Monte Carlo 模拟^[4], 计算表明, 用 $SU(2)$ 的正二十面体分立子群来进行模拟, 其结果与 $SU(2)$ 群的结果符合得很好. 由分立子群本身引起的一阶相变点远离 $SU(2)$ 格点规范理论的过渡区. 这说明在 $SU(2)$ 群 Wilson 作用量情况下, 可以用正二十面体分立子群代替 $SU(2)$ 群进行计算. 从而为我们提供了一种减少计算机工作量的有效方法. 使得大格点高精度的 Monte Carlo 模拟成为可能.

众所周知, 格点规范理论作用量的形式是不唯一的. 根据 Wilson 提出的条件, 格点规范作用量可以有很多种形式^[5]. 最近, 李文铸、董绍静提出了一系列新的格点作用量^[6]. 研究这些作用量的性质, 对于我们深入研究格点规范理论无疑是有意义的.

最近, 我们对这些新作用量中的一部分进行了平均场计算^[7]和 Monte Carlo 计算^[7], 结果表明, 不同的作用量, 临界点 β_c 的值不同. 用正二十面体分立子群代替 $SU(2)$ 群进行 Monte Carlo 模拟, 对这些新作用量是否也适用呢? 本文的目的就是要回答这个问题, 以便为进一步计算弦张力、胶球质量、强子谱时利用分立子群提供依据.

1) 李文铸、张剑波、季达人, 浙江大学物理系预印本 ZUP-307.

本文中,我们对以下两种 $SU(2)$ 格点规范作用量进行了研究,这两种作用量是正弦作用量

$$S_P = \sin 1 - \sin\left(\frac{1}{2} \text{Tr} U_P\right) \quad (1)$$

指数作用量

$$S_P = 1 - \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} U_P - 1\right) \quad (2)$$

证明了用 $SU(2)$ 的正二十面体分立子群代替 $SU(2)$ 群进行 Monte Carlo 模拟是完全适用的。

用 $SU(2)$ 的正二十面体分立子群 Y 进行 Monte Carlo 模拟,首先是需要构造这个子群。我们采用的办法如下:把 $SU(2)$ 的群元写成

$$U = \cos \frac{1}{2} \theta + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{1}{2} \theta \quad (3)$$

这里 $\boldsymbol{\sigma}$ 为三个泡利矩阵。很明显,单位元就是 $\theta = 0$ 。接着根据正二十面体的对称轴和对称操作,可写出 $\mathbf{n}$ 和 θ ,从而可得到分立子群 Y 的群元。考察了正二十面体的全部对称性,刚好可写出 120 个元素。我们还用计算机直接验证了这 120 个元素集合的封闭性,从而证明这 120 个元素确实构成 $SU(2)$ 的 Y 子群。我们在进行 Monte Carlo 模拟之前,计算了这个子群的乘法表和各个元素的特征标,然后存入计算机,这样在进行 Monte Carlo 模拟时可节省很多机时。

本文中我们在 $4'$ 格点上对正弦作用量和指数作用量进行了 Monte Carlo 模拟,采用的是 Metropolis 方法^[6],具体的做法如下:

首先给每条链一个初始值,然后选定一条链,暂时保持其他链不变,进行下列过程:

(1) 计算与该链相联的 6 个元格的作用量 S_P 之和 S_{old} 。

(2) 用 (3) 式中取 $\theta = \pm \frac{2}{5} \pi$ 所得的 12 个元素中的一个乘上 U 产生一个新的链变量 U' , 并计算与之相联的 6 个元格的作用量 S_P 之和 S_{new} 。

(3) 计算 $\Delta S = S_{\text{new}} - S_{\text{old}}$ 。取一个均匀分布的随机群 $0 < r < 1$, 若

$$r > \exp(-\beta \Delta S)$$

则保留老的链变量 U , 否则以新链变量 U' 代替老链变量 U 。

对每一条选定的链,我们重复上述过程六次,然后按一定次序转移到下一条链。对所有链变量完成一次扫描称为一次 Monte Carlo 迭代。

我们做了小步长跑动,计算了 $\langle E_P \rangle = \langle S_P \rangle$ 和 $c_\beta = -\beta^2 \frac{\partial \langle E_P \rangle}{\partial \beta}$ 随 β 变化的曲线。计算时,每个数据都做 110 个迭代取后 100 个迭代作平均,在一阶相变点附近做 150 个迭代。并在分立子群失效的一阶相变点附近做了热循环,证实了以下结果:

1) 对正弦作用量,分立子群的有效区为 $0 \leq \beta \leq 9.2$ 。失效的一阶相变点 $\beta'_c \approx 9.2 \pm 0.2$, 见图 1 (对 Wilson 作用量 $\beta'_c \approx 5.9^{[6]}$)。

2) 对指数作用量,分立子群有效区为 $0 \leq \beta \leq 6.8$, 失效的一阶相变点 $\beta'_c \approx 6.8$, 见图 2。

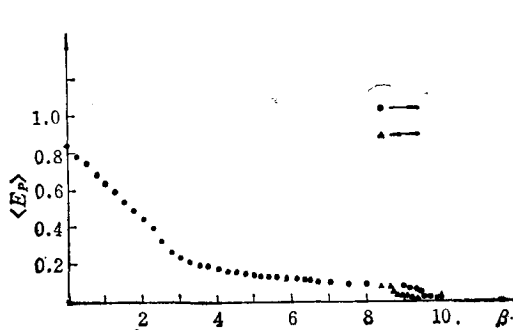


图 1

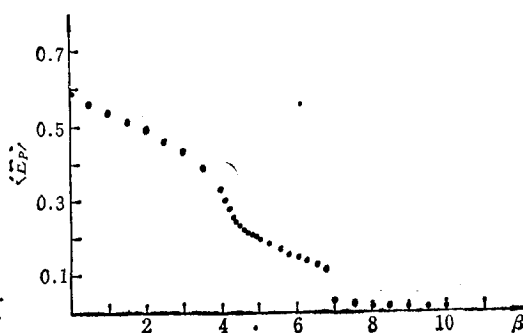


图 2

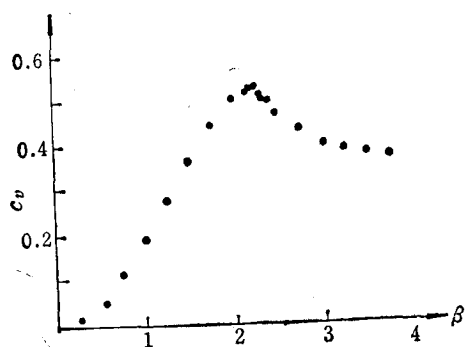


图 3

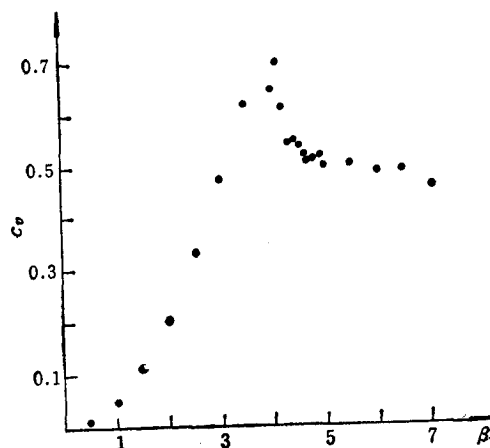


图 4

3) 与我们用 $SU(2)$ 群的结果^[7]相比较, 两种作用量的 $\langle E_P \rangle$ 均能很好地一致。

4) 比热峰的位置与 $SU(2)$ 群的结果一致, 见图 3 (正弦作用量的比热) 和图 4 (指数作用量的比热)。

以上结果表明, 在正弦作用量和指数作用量情形, 用 $SU(2)$ 的正二十面体分立子群代替 $SU(2)$ 群来进行 Monte Carlo 模拟是完全合理的。这就使我们以后计算弦张力、强子谱等需要很多机时的工作中可应用分立子群, 从而大大降低工作量。本文中另一个有趣的现象是对正弦作用量, 正二十面体分立子群的适用性伸展到 $\beta_c' \approx 9.2$, 于是一个十分自然的可能是, 该作用量也将 $SU(3)$ 分立子群的适用性延伸。如果 $SU(3)$ 分立子群的适用性能延伸到过渡区之后, 那么 $SU(3)$ 规范群各种量的计算就可以用分立子群来完成。特别是带费密子的格点规范理论, 由于工作量太大, 目前很多工作都是以 $SU(2)$ 规范群来计算的。若 $SU(3)$ 分立子群也可利用, 那么我们今后的计算就可以对 $SU(3)$ 规范群了。这对格点规范理论的深入研究是非常有意义的。

参 考 文 献

- [1] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
- [2] M. Creutz, *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980), 313; C. B. Lang, C. Rebbi *et al.*, *Phys. Lett.*, **101B** (1981), 173.

- [3] C .B. Lang, H. Nicolai, *Nucl. Phys.*, **B 200** (1982), 135.
- [4] D. Petcher ,D. H. Weingarten, *Phys. Rev.*, **D22** (1980), 2465; G. Bhanot, C. Rebbi, *Nucl. Phys.*, **B180** (1981), 469.
- [5] N. S. Manton, *Phys. Lett.*, **96B** (1980), 328; J. Villain, *J. de. Phys.*, **36** (1975), 581.
- [6] 李文铸、董绍静,物理学报, **33**(1984), 1459.
- [7] 李文铸、董绍静,物理学报, **34**(1985), 663.
- [8] N. Metropolis *et al.*, *J. Chem. Phys.* **21** (1953), 1087.

MONTE CARLO SIMULATIONS OF $SU(2)$ LATTICE GAUGE THEORY WITH THE NEW ACTIONS BY USING THE DISCRETE SUBGROUP

LI WEN-ZHU ZHANG JIAN-BO DONG SHAO-JING

(Department of Physics, Zhejiang University)

ABSTRACT

Monte Carlo simulations of the $SU(2)$ lattice gauge theory with SIN action and EXP action are performed by using the icosahedral subgroup. We obtain that the first order phase transition points due to the nature of discrete subgroup are $\beta'_c \approx 9.2 \pm 0.2$ and $\beta'_c = 6.8 \pm 0.2$ respectively. The plaquette energy and specific heat of present case are in good agreement with that of the $SU(2)$ group. Therefor, we verify that for two kinds of actions mentioned above, using discrete subgroup instead of $SU(2)$ group is reasonable and provides the foundation for further calculations by means of the icosahedral subgroup.