

液晶孤子实验中指向角的时空分布

舒昌清 徐刚 林磊

(中国科学院物理研究所)

1984年1月4日收到

提 要

本文指出,从液晶透射的偏振光(单色光和白光)干涉条纹时空分布可以得到多种可能的液晶指向角时空分布. 考虑具体物理条件(如指向切流孤子方程,非线性波局域速度随时间变化等)可以消除上述不确定性. 文中对向列相切流液晶孤子情形做了详细讨论. 数值计算结果与有关实验^[4,5]的比较表明,如果指向切流孤子方程(一维)^[2,3]是该实验的合理描述,那么,文献[5]中指向角空间分布曲线是与该实验^[4,5]观察到白光下三条黑线速度方向相同这一事实相抵触的. 本文给出了与上述实验比较一致的指向角分布.

一、引 言

均匀切流向列相液晶中孤子的存在及其性质,讨论始于文献[1, 2]. 文献[2, 3]不仅做了理论处理,还进一步对有关实验^[4,5]做了讨论和计算. 实验^[4,5]得到的是单色光强或白光光强的空间分布随时间的改变. 理论描述^[2,3]用到的主要物理量是液晶指向角 $\theta(x, t)$. 可是从光强分布并不能得到唯一的 $\theta(x, t)$ (见第二节). 因此解决下面的问题是重要的: 在许多可能的 $\theta(x, t)$ 中,如何挑出对应于实验过程的合理的 $\theta(x, t)$. 这一点,在多孤子情形下尤为突出.

我们在文献[2, 3]的基础上就多孤子现象进一步讨论了上述问题. 分析和使用计算机计算的结果表明,在假定本文方程(7)有效的前提下,文献[5]图13的 $\theta(x, t)-x$ (t 固定)曲线与该实验观察到的白光下三条黑线速度方向相同这一事实相抵触. 本文给出了与上述实验比较一致的指向角分布.

二、指向角分布与光强分布

在实验^[4,5]装置下,出射单色光强 $I(x, t)$ 与 $\theta(x, t)$ 有如下关系^[3]:

$$I = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \delta\right) \sin 2\varphi, \quad (1)$$

其中

$$\delta = \int_0^a n_0 [(1 - \alpha \sin^2 \theta)^{-1/2} - 1] dy, \quad (2)$$

式中 I_0 为入射光强; λ_0 为光在真空中的波长; φ 为偏振片偏振方向与液晶中寻常光振动方向的夹角; n_o, n_e 分别为液晶中寻常光和非常光的折射率; d 为液晶盒厚度; $\alpha \equiv 1 - n_o^2/n_e^2$; y 为液晶盒厚度方向. 若 θ 与 y 无关, (2) 式可简化为

$$\delta = n_o d_0 [(1 - \alpha \sin^2 \theta)^{-1/2} - 1], \quad (3)$$

式中 d_0 为有效盒厚 (在文献 [2] 图 4 中, d_0 等于 $2d$). 对向列相液晶, 有 $n_e > n_o$, 即 $1 > \alpha > 0$, 于是 (2) 式给出 $\delta > 0$. 记

$$\delta/\lambda_0 \equiv |k|. \quad (4)$$

由 (3), (4) 式不难得到 $\theta(x, t)$ 与 $k = k(x, t)$ 的关系

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{|k| \lambda_0}{n_o d_0} + 1 \right)^{-2} \right] \equiv \Delta(x, t). \quad (5)$$

显然, 黑纹 ($I = 0$) 对应于

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5')$$

由 (5) 式可以看出: 在 t 固定的情况下, 与一条 $\theta(x)$ - x 曲线对应的是一确定的 $k(x)$. 而一确定的 $k(x)$ 却有多值的 $\theta(x)$ 与之对应. 在 x 固定情况下, $\theta(t)$ 与 $k(t)$ 的对应关系也是如此. 以下仅讨论 t 固定情形, 但所得结果对 x 固定情形也同样适用.

从 t 固定的单色光强分布实验照片可以得到各级黑纹 ($I = 0$) 的空间位置 x_i . 主黑纹对应于 $k = 0, I = 0$. 注意到白光光强实验照片上的黑纹正是主黑纹^[3], 因此同时拍摄单色光和白光干涉条纹, 见图 1(a), (b) (在我们以压强激发孤子¹⁾的实验中已经实现), 就可定出各黑纹对应的干涉级 $k(x_i)$. 一条主黑纹连同邻近的黑纹 (一组黑纹) 在 k - x 平面内将给出一组点 (以下只考虑各黑纹组中含一条以上黑纹情况, 即 $k_m = \max |k|$, $k_m \geq 1$). m 条主黑纹 (即有 m 组黑纹) 在 k - x 平面内给出一个 $k(x_i)$ 点列 (含 m 组点) (见图 1(c)). 后者在 θ - x 平面内有对应点列, 但不唯一. 设实际物理过程中 θ 是 x 的连续函数. 注意到每一黑纹组在 θ - x 平面上对应的全部点列为 $l\pi \pm \theta_i(x_i)$. 不失一般性, 可设 $\theta_i(x_i)$ 随 x_i 单调增加. 当 $m = 1$ 时, 由 $\theta \rightarrow l\pi + \theta$ 变换下的不变性, “不同的”点列只有两个 (例如 $\theta_i(x_i), \pi - \theta_i(x_i)$). 另外可以证明: 相邻两黑纹组毗邻的两黑纹所对应的 θ 之差必不大于 $\pi/2$ (否则两黑纹必不毗邻). 应用数学归纳法, 即可证明: 如果系

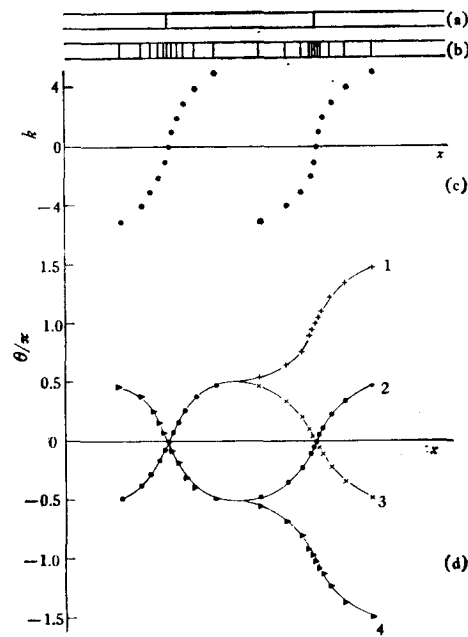


图 1

(a) 白光干涉条纹; (b) 相应的单色光干涉条纹; (c) 相应的点列 $k(x_i)$, (d) 相应的点列 $\theta(x_i)$ 和曲线 θ - x

1) 舒昌清、诸国楨、林磊, 待发表.

统在变换 $\theta \rightarrow l\pi + \theta$ (l 为整数) 下不变, 那么当有 m 条主黑纹时, 其对应的 $k(x_i)$ 点列在 $\theta-x$ 平面上可得到 2^m 个不同的点列(例如如图 1(d) 中的 1, 2, 3, 4. 此时 $m = 2$). 与非整数 k 对应的 θ 可依上述点列做合理的插值. 最后可得到 $\theta-x$ 曲线. 值得注意的是, 在单色光强照片上, 各级黑纹随 x 分布不均匀. 在 $|k| = 0$ 附近, 黑纹较密. $|k|$ 较大时则稀疏. 相邻两黑纹组毗邻的两黑纹通常相距较远. 对这区间内的 θ 进行插值要谨慎. 因为这两条黑纹之间不再有任何黑纹, 这区间上 θ 的改变不会太大. 一般说来, 这段 $\theta-x$ 曲线会因具体插值方法不同而有明显差别.

三、指向角的孤子方程

由液晶流体动力学的 Ericksen-Leslie 方程^[6,7], 可以得到切流下向列相液晶的指向方程(二维)

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} = k \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right) - \gamma_1 \frac{d\theta}{dt} + \frac{s}{2} (\gamma_1 - \gamma_2 \cos 2\theta) = 0, \quad (6)$$

上式中 $\theta = \theta(x, y, t)$; $s \equiv \frac{\partial v}{\partial y} = s(y)$, $v = v(y)$; M 为单位体积的转动惯量. 假设 $k_1 = k_2 = k_3 = k$, 即 k 为单一常数近似下的 Frank 弹性常数. γ_1, γ_2 为粘滞系数.

在均匀切流 ($s = \text{常数}$) 假定下, 相应的一维方程为

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} = k \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \gamma_1 \frac{d\theta}{dt} + \frac{s}{2} (\gamma_1 - \gamma_2 \cos 2\theta). \quad (7)$$

此即文献 [2] 中 (1) 式. 记

$$\pi/4 < \theta_0 \equiv \frac{1}{2} \cos^{-1} (\gamma_1 / |\gamma_2|) < \pi/2,$$

则 $\theta = \theta_0$ 为方程 (7) 的均匀定态解.

在液晶盒中做均匀切流运动的向列相液晶, 其与指向有关的流体动力学性质由 (7) 式决定. 为了理解这一类实验中(单色、白光)光强分布等性质, 应同时考虑 (5) 和 (7) 式. 这里指出, 在变换

$$\theta \rightarrow \theta + l\pi \quad (8)$$

及变换

$$(\theta, s) \rightarrow (-\theta, -s) \quad (9)$$

下方程 (7) 不变.

文献 [1—3] 对 (7) 式下单孤子解的存在、稳定性和分类, 多孤子解的存在、分类和性质已有叙述, 这里不再赘述. (7) 式的无量纲方程^[2,3]为

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{d\theta}{dT} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \bar{M} \frac{d^2\theta}{dT^2}, \quad (7a)$$

其中 $U = r\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta$, $\bar{M} = M / (\tau\gamma_1)$, $X = x/\lambda$, $T = t/\tau$, $\lambda \equiv (2k / |\gamma_2|s)^{1/2}$, $\tau \equiv 2\gamma/s$, $r = \gamma_1 / |\gamma_2|$.

四、对实验的分析

下面以实验为例,具体讨论如何由(5),(7)式得到合理的 $\theta(x, t)$ 。

文献[5]图13是根据该文图12(b)算出的 $\theta-x$ 关系。如前所述,由文献[5]图12(b)的黑纹位置并不能简单算出 $\theta-x$ 曲线。因为如何决定主黑纹,如何消除 $\theta-I$ 不是一一对应带来的不确定性,对相邻两黑纹组之间的一段 $\theta-x$ 曲线如何插值,以及如何合理选取有效盒厚 d_0 等问题还有待解决。上述问题,文献[5]未予说明。第一、三问题,本文第二节已经回答。第四个问题,留待第五节中叙述。以下讨论第二个问题。

假设文献[5]绘制图13中所用的主黑纹位置,其余各级黑纹的干涉级、位置均无误。并假设该文对 d_0 的选取也是适当的。由第二节的分析,考虑(5)式,与文献[5]图12(b)相应的 $\theta(x, t)-x$ (t 固定)曲线应有 $2^3 = 8$ 条。由于(9)式,上述曲线条数还要减半。即除文献[5]图13外,还有三条(图2)。从图2不难看出,这四条 $\theta-x$ 曲线中只有一条(图2曲线4)是单调的。将这四条 $\theta-x$ 曲线作为初值,在边条件

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\pm l_0} = 0$$

($2l_0$ 为液晶盒长度)下,分别对方程(7)求解 $\theta(x, t)$ 。按照文献[5],实验中液晶流速 v 大小为 $0.02-0.2\text{cm/s}$ 时,主黑线运动速度 c 相应为 $2-19\text{cm/s}$ 。即 v 比相应的 c 小两个数量级。此时可近似地有(见文献[3])

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial x} \approx \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (10)$$

以下数字计算中,取 $M = 0$, $s = 50\text{s}^{-1}$, $\gamma_1 = 0.77\text{P}$, $\gamma_2 = -0.8\text{P}$, $k = 10^{-6}\text{dyn}$ 。计

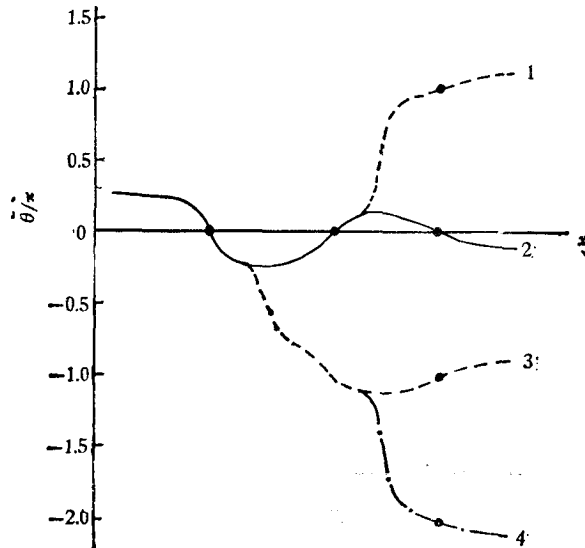
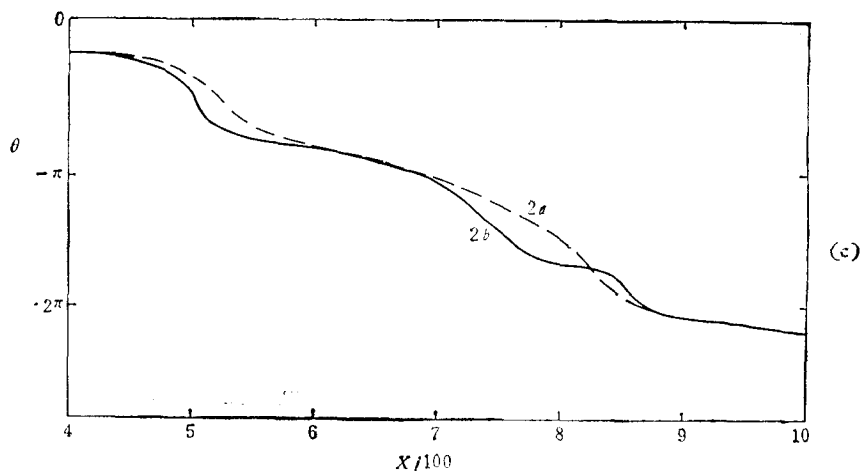
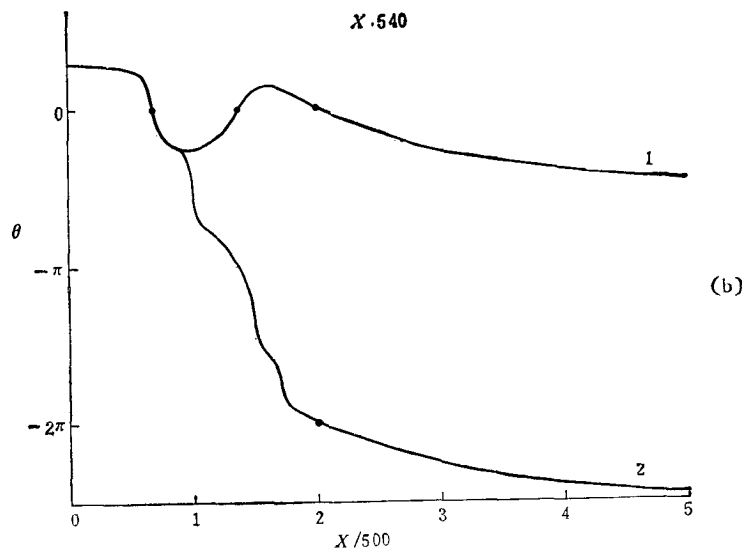
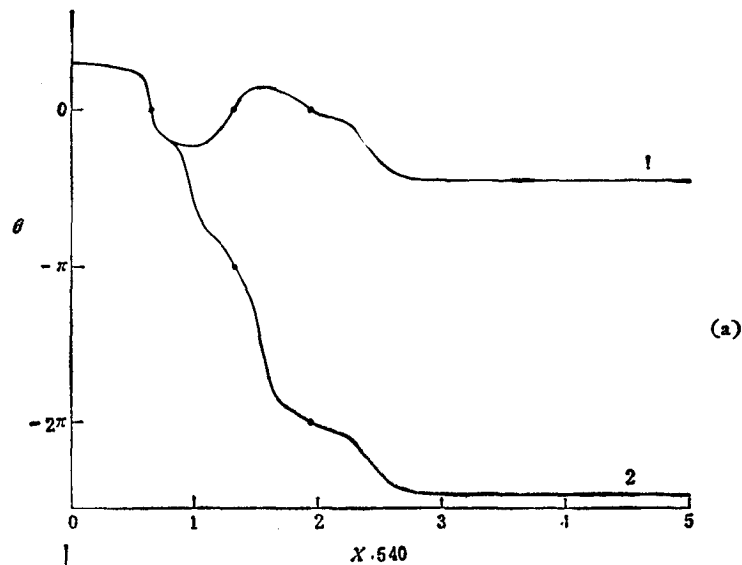
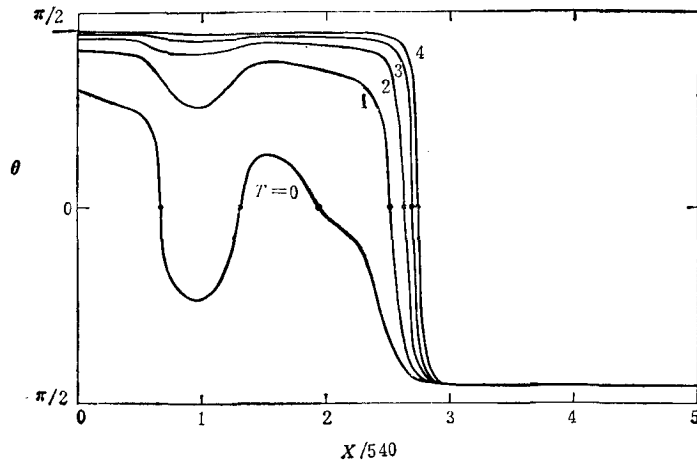
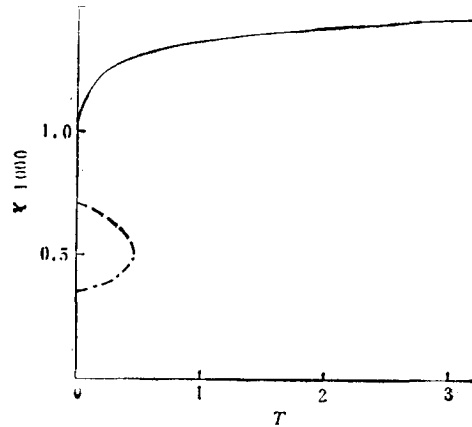


图2 与文献[5]图12(b)相应的四条 $\theta(x, t)-x$ (t 固定)曲线 其中2为文献[5]图13所给; 4为单调变化曲线



(a) 1 为从文献 [5] 图 13 转绘出 ($X > 1200$ 为高斯型函数延拓); 2 为相应于 1 线的单调曲线
 (b) 1 为从文献 [5] 图 13 转绘出 ($X > 1200$ 为负指数型函数延拓); 2 为相应于 1 线的单调曲线
 (c) $400 < X < 1000$ 的局部放大 $2a$ 线为 (a) 中 2 线; $2b$ 线为 (b) 中 2 线

图 3 初始值 $\theta(X, 0)$

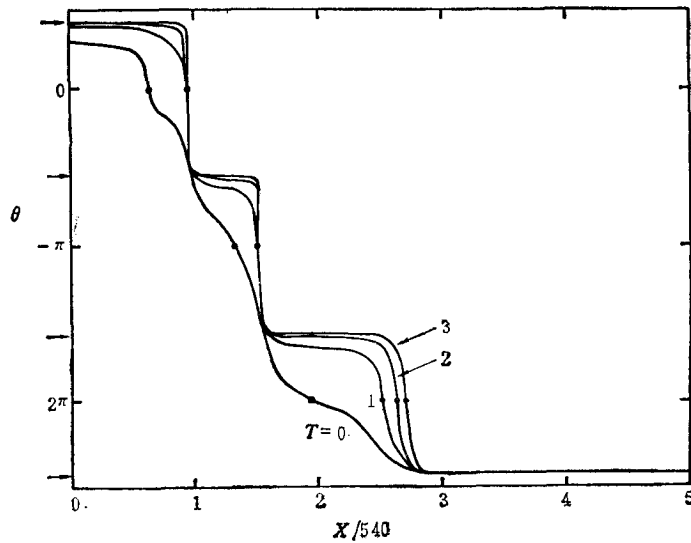
(a) 指向 $\theta(X, T)$, $T = 0, 1, 2, 3, 4$; $\theta(X, 0)$ 为图 3(a)1 线

(b) 三主黑纹位置随时间的变化曲线

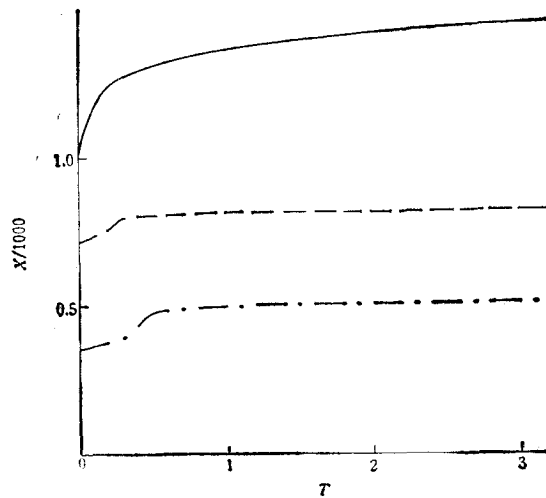
图 4

计算机数值计算结果可给出对应于 $\theta = 0$, $\theta = -\pi$, $\theta = -2\pi$ 处三条主黑纹的位置、速度随时间的改变. 将这些结果与文献 [5] 图 6、图 7 对比, 可将与实验不符的 $\theta-x$ 曲线筛去, 留下合理的.

图 3(a) 中 1 线在 $X < 1200$ 段内对应于文献 [5] 图 13 所示曲线, 为减少计算机工作量, 曲线在 X 方向上压缩为原图的 1/80. 由于文献 [5] 中图 13 所给 x 区间不够宽, 考虑实际物理过程及为了数值计算简便, 上述 1 线在 $X > 1200$ 一段是用高斯型曲线延拓而成的. 在这区间里, 当 X 增加时, θ 逐渐减小到 $-\theta_0$. 以此为初值, 对方程 (7) 求解, 数值计算后得到的 $\theta(X, T)$, $T = 1, 2, 3, 4$ 见图 4(a). 为便于对照, 图 4(a) 中已将初值 $\theta(X, T = 0)$ 绘上. 从图中可看出, 随着时间 T 增大, 曲线凹陷部分越来越小. 从整体上看, 曲线趋向单调. 其中三主黑纹位置 X 随时间 T 的变化见图 4(b). 可以看出, 中间的一条主黑纹与另两条主黑纹移动方向相反, 在 $T \approx 0.45$ 时, 有两条主黑纹合而为一, 随后消失, 整个曲线上只剩下一条主黑纹向 X 正向运动. 这一点, 与文献 [5] 所述“三条



(a) 指向 $\theta(X, T)$, $T = 0, 1, 2, 3, 4$; $\theta(X, 0)$ 为图 3(a) 2 线



(b) 三主黑纹位置随时间的变化曲线

图 5

黑线沿 x 正方向传播”的实验事实抵触。为考察图 3(a) 中 1 线 $X > 1200$ 段具体延拓方式对上述结果的影响, 用负指数型曲线取代高斯型曲线做延拓, 其相应初始波型 $\theta-X$ 见图 3(b) 1 线。波型的安排顾及在计算时间内, 波的陡直部分离边界较近, 以便了解边界的影响。在电子计算机上做数值计算, 所得的结果表明: 在这两种不同的延拓方式下, 此后主黑纹移动方向一致。且经过一段时间后, 三条主黑纹中两条消失, 只留下一条主黑纹, 这一结论也不改变。对另两条非单调变化的 $\theta-x$ 曲线, 情况也是一样, 即均与实验^[5]不符。这样与 $I(x)$ 对应的四种可能的 $\theta-x$ 曲线, 只剩下了单调变化的曲线(图 3(a) 中 2 线)。以它为初值得到的 $\theta(X, T)$ $T = 1, 2, 3, 4$ 曲线见图 5(a)。从图中可看到随

着 T 的增大, 在 $\theta = \theta_0, -\pi + \theta_0, -2\pi + \theta_0$ 处逐渐形成平台, 而三主黑纹附近逐渐变得陡峻. 主黑纹位置随时间变动情形见图 5(b). 该图表明三条主黑纹移动方向一致, 且越在后面的主黑纹速度越大, 不会出现主黑纹相遇消失的现象(从图 5(a) 平台出现亦可说明这一点). 为了考察具体延拓方式的影响, 还对与图 3(b) 1 线相应的单调曲线 2 做了类似考察. 从数值计算结果可以看出, 两种情况下三主黑纹的上述速度特征相同. 需要说明的是, 在 $X > 1200$ 段内, 图 3(a) 2 线和图 3(b) 2 线分别为图 3(a) 1 线和图 3(b) 1 线整体平移 -2π 得来. 在 $400 < X < 1000$ 段内, 图 3(a) 2 线和图 3(b) 2 线稍有差别, 其不同之处放大画于图 3(c) 中, 它们分别相应于该图中的 2a 线和 2b 线.

综上所述, 由于实验^[5]中白光下三条黑线速度方向相同, 沿速度方向黑线速度依次增大. 而与此特征定性符合的指向角分布只是上述单调变化的 $\theta(x, t)-x$ (t 固定) 曲线. 假定方程 (7) 是对实验^[5]的合理描述, 那么文献 [5] 所给指向角分布图(文献 [5] 中图 13) 就与该实验给出的黑线速度特征不符.

五、讨 论

1. 由图 5(a) 知图 3(b) 2 线随时间增加, 逐渐变成台阶形. 其与平台对应的 θ 值基本不变. 三个陡直区段各自的局域速度不同, 形状改变渐小, 相互之间距离渐大, 在 X 充分大或充分小时, 曲线 $\theta(x)$ 分别趋于各自的 θ_b . θ_b 为使 (7a) 式中 U 取极大(大或小)值的点. 参照 sine-Gordon 方程多孤子解, 把 (7) 式的多孤子解理解为方程 (7) 的这样一个解, 当 $X = -\infty$ 时, $\theta(X, T)$ 从使 U 取极值的某一 θ_b 出发, 到 $X = \infty$ 时, $\theta(X, T)$ 为使 U 取极值的另一个 θ'_b . 则图 5(a) 所示 $\theta(X, T)$ 为方程 (7) 的一个多孤子解. 由平台相隔开的三个主黑纹区段可近似看成三个单孤子解.

2. 按照文献 [2] 图 4, 实验^[5]中的液晶盒内均匀切流区只是每层厚度为 $\frac{1}{2}(d - d_1)$ 的上下两层(总厚度为 $d - d_1$, d_1 为推动模片厚度), 因此 $d_0 \equiv d - d_1 < d$, 由于从文献 [5] 图 12(b) 做图 13, 需要用到有效盒厚 d_0 , 对 d_0 的不同选取将导致不同的 $\theta(x, t)-x$ (t 固定) 曲线.

3. 在文献 [4, 5] 中, 把实验观察到的传播黑线称为“指向波 (director wave)”. Ericksen^[8] 所讨论的“取向波 (orientational wave)” (在文献 [8] 中并未称为“指向波”) 是指质心没有运动的情况. 正如 Ericksen 所说(见文献 [5] 第 845 页注 1) 这种波的存在问题仍有待澄清. 假如把“指向波”定义为包括质心有所运动的情况(正如文献 [4, 5] 所做的), 那么, 这样的“指向波”就包括了液晶中一般的线性波^[9], 后者的存在则已有定论.

参 考 文 献

- [1] 林磊, 见 1981 年全国统计物理和凝聚态理论学术会议综述报告汇编, 华中工学院出版社, 1983 年.
- [2] Lin Lei (林磊), Shu Chang-qing (舒昌清) Shen Jue-lian (沈觉涟), P. M. Lam (林沛文), Huang Yun (黄 昀), *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 1335.
- [3] 林磊, 舒昌清, 物理学报, **33**(1984), 159.
- [4] Zhu Guo-zhen (诸国桢), *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 1332.

- [5] 诸国楨,倪惠,张文竹,物理学报, **32**(1983), 845.
[6] J. L. Ericksen, *Tran. Soc. Rheol.*, **5** (1961), 23.
[7] F. M., Leslie, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **28** (1968), 265.
[8] J. L. Ericksen, *Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.*, **11** (1968), 463.
[9] K. Miyano and J. B. Ketterson, in "Physical Acoustics", Vol. **14**, W. P. Mason and R. N. Thurston (eds.), Academic Press, (1979).

TEMPORAL AND SPATIAL DISTRIBUTION OF DIRECTOR ANGLES IN SOLITON EXPERIMENTS OF LIQUID CRYSTALS

SHU CHANG-QING XU GANG LIN LEI
(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

It is pointed out that more than one temporal and spatial distribution of director angles can be obtained from the interference patterns (varying in space and time) of transmitted polarized (monochromatic and white) light from liquid crystals. When specific physical conditions (e.g. the time variation of the local velocities of nonlinear waves described by shearing director equation of solitons) are taken into account, the above uncertainty can be removed. Detailed discussions on the case of solitons in shearing nematics are given. Numerical calculations show that the spatial distribution of director angles given in Ref. [5] is in contradiction to the directions of velocities of the three dark lines (under white light) observed experimentally^[4,5] if the one-dimensional shearing director equation of solitons^[2,3] is assumed. A distribution of director angles in better agreement with experiments^[4,5] is given.