

格点规范场理论中 Wilson 圈变量的 Schwinger-Dyson 方程和普适性问题*

何翔皓 先鼎昌

(中国科学院高能物理研究所)

1984 年 5 月 24 日收到

提 要

本文引入了相当广泛的几类 Wilson 作用量,推导了与这些作用量相应的 Wilson 圈变量的 Schwinger-Dyson 方程,并证明在连续极限下,这些方程有着相同的形式,从而说明这些作用量是等价的.

一、引 言

具有定域规范不变性的性质,有同一连续极限的格点上的纯规范场作用量的形式是不唯一的^[1-6]. 一个自然的问题是,这些不同形式的作用量给出的是不是同一种物理. 如果是,那么,只须拿那种形式最简单、最便于分析和计算的作用量进行物理量的计算和讨论即可. 如果不是,那么原因何在? 哪一种形式的作用量接近于真实物理?

一种检验的方法是讨论这些不同形式的作用量的 Schwinger-Dyson 方程^[7],并且,考察它们在连续极限下是否给出同一结果.

在本文中,我们尽可能地将目前广泛被采用的各种纯规范场的作用量^[1-6]包括在几个一般形式的格点作用量中,推导出 Wilson 圈变量在这些普遍形式的作用量下的 Schwinger-Dyson 方程,并分别就 $SU(N)$ 群和 $U(N)$ 群两种情况进行讨论.

二、格点规范场理论中的 Schwinger-Dyson 方程

设格点纯规范场的作用量为 $S(U_l)$, U_l 表示定义在键 l 上的场量,它是群 $G(SU(N)$ 群或 $U(N)$ 群)的群元. 则配分函数定义为

$$Z = \int [dU_l] e^{-S(U_l)}, \quad (1)$$

式中 $[dU_l] \equiv \prod_l dU_l \equiv \prod_{n,\mu} dU_\mu(n)$. 可观察量 $F(U)$ 的平均值为

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z} \int [dU_l] F e^{-S}. \quad (2)$$

* 部分得到中国科学院科学基金资助.

由于对于每一键上的场量 U_l 来说,积分是在整个群 G 上进行的,而且群积分是测度不变的. 所以,对某一 U_l 进行群上的变动(附录 A)时,积分值不变. 于是有

$$\delta_\alpha Z = 0, \quad (3)$$

$$\delta_\alpha \langle F \rangle = 0. \quad (4)$$

将(4)式明显地写出来,就是

$$\frac{1}{Z} \int [dU] \{ \delta_\alpha F - F \delta_\alpha S \} e^{-S} = 0 \quad (5a)$$

或者

$$\langle \delta_\alpha F \rangle - \langle F \delta_\alpha S \rangle = 0. \quad (5b)$$

将 $\delta_\alpha \langle F \rangle$ 对同一场量 U_l 再作一次群上的变分,得

$$\langle \delta_\alpha \delta_\alpha F \rangle - 2 \langle \delta_\alpha F \delta_\alpha S \rangle - \langle F (\delta_\alpha \delta_\alpha S - \delta_\alpha S \delta_\alpha S) \rangle = 0. \quad (6)$$

(6) 式在计算中是不方便的^[7], 我们将它进一步化简. 我们知道平均值 $\langle F \delta_\alpha S \rangle$ 当场量 U_l 在群上变动时也是不变的,即

$$\delta_\alpha \langle F \delta_\alpha S \rangle = \langle \delta_\alpha F \delta_\alpha S \rangle + \langle F (\delta_\alpha \delta_\alpha S - \delta_\alpha S \delta_\alpha S) \rangle = 0. \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式中,得格点规范理论中力学量 F 满足的 Schwinger-Dyson 方程为

$$\langle \delta_\alpha \delta_\alpha F \rangle - \langle \delta_\alpha F \delta_\alpha S \rangle = 0. \quad (8)$$

方程(8)是普遍的,它对任何形式的作用量 S 和任何形式的力学量 F 都适用. (8) 式是我们以下讨论的出发点.

三、推广的 Wilson 作用量 I 及 Wilson 圈变量的 Schwinger-Dyson 方程

1. 推广的 Wilson 作用量 I

具有定域规范不变性的推广的 Wilson 作用量的一种形式为

$$S = \sum_{l=1}^M \beta_l \sum_p \{ (2\text{Tr}1)^l - [\text{Tr}(U_p + U_p^\dagger)]^l \}, \quad (9)$$

式中 $\beta_l (l = 1, 2, \dots, M)$ 为耦合常数, $\sum_p$ 表示对所有元格求和,

$$U_p = U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(n)$$

(见图 1), $U_\mu(n)$ 是定义在键 (n, μ) 上的场量,它在规范群 G 中取值. 1 为单位矩阵.

我们看到,作用量(9)式在定域规范变换

$$U'_\mu(n) = S(n) U_\mu(n) S^\dagger(n + \mu) \quad s \in G \quad (10)$$

下,保持形式不变.

在连续极限 $a \rightarrow 0$ 下,若作用量(9)式过渡到连续的杨-Mills 纯规范场的表达式,则耦合系数 β_l 必须满足一定的关系. 先讨论 β_l 满足的约束条件.

将群 G 按以下方式参数化:

$$U_\mu(n) = \exp[iB_\mu(n)] = \exp[ia g A_\mu(n)], \quad (11)$$

式中 $A_\mu(n) = \lambda^i A_\mu^i(n)$, λ^i 为规范群 G 的生成元, $A_\mu^i(n)$ 为规范场量. 将 $B_\mu(n + \hat{\nu})$ 等在 n 点展开成泰勒级数, 注意到 B_μ 的非对易性质, 应用 Baker-Hausdorff 公式, 可得

$$U_\nu(n) = 1 + ia^2 g F_{\mu\nu}(n) + \frac{1}{2} (ia^2 g F_{\mu\nu}(n))^2 + o(a^6 g^3),$$

$$U_\nu^+(n) = 1 - ia^2 g F_{\mu\nu}(n) + \frac{1}{2} (-ia^2 g F_{\mu\nu}(n))^2 + o(a^6 g^3), \quad (12)$$

式中

$$F_{\mu\nu}(n) = \partial_\mu A_\nu(n) - \partial_\nu A_\mu(n) + ig[A_\mu(n), A_\nu(n)]. \quad (13)$$

将(12)式代入(9)式, 可得

$$S = \sum_{l=1}^M \beta_l \sum_n \{l(2\text{Tr}1)^{l-1} a^4 g^2 \text{Tr} F_{\mu\nu}^2(n) + o(a^6 g^3)\}. \quad (14)$$

在极限 $a \rightarrow 0$ 下, (14)式变成

$$S = \sum_{l=1}^M \beta_l l (2\text{Tr}1)^{l-1} g^2 \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2(x). \quad (15)$$

我们看到, 作用量(9)式在连续极限下回到经典杨-Mills 场的必要条件为

$$4g^2 \sum_{l=1}^M \beta_l l (2\text{Tr}1)^{l-1} = 1. \quad (16)$$

满足约束条件(16)式的 β_l 有许多种, 例如: 1) 取 $M = 1$, $\beta_1 = 1/4g^2$, 这就是 Wilson 作用量的情形;

2) 取 $M = \infty$, $\beta_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!} \cdot \frac{1}{4g^2 f^{(1)}(2\text{Tr}1)}$, 这时, (9)式可以写成为

$$S = \sum_p \{f(2\text{Tr}1) - f(\text{Tr} U_p + \text{Tr} U_p^+)\} / 4g^2 f^{(1)}(2\text{Tr}1), \quad (17)$$

式中 $f(x)$ 为在 $x = 0$ 处有任意阶导数, 在 $2\text{Tr}1$ 处一阶导数不等于 0 的任意函数, $f^{(l)}(x)$ 表示 $f(x)$ 对 x 求 l 阶导数;

3) M 为大于 1 的正整数, 最近有些人开始讨论这类作用量的相结构^[8].

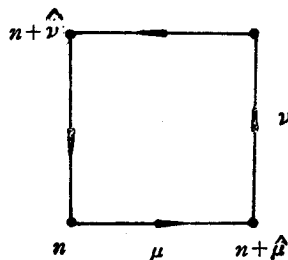


图 1

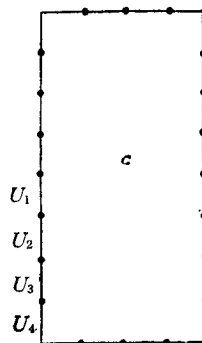


图 2

2. Wilson 圈变量在推广的 Wilson 作用量 I 下的 Schwinger-Dyson 方程

在(8)式中,取 S 为表达式(9), F 为 Wilson 圈变量 $W(c)$, 其回路见图 2, 表达式为

$$W(c) = \text{Tr} \left(\prod_{i \in c} U_i \right), \quad (18)$$

则

$$\delta_a F = i\varepsilon \text{Tr} \left(\lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right), \quad (19a)$$

$$\delta_a \delta_a F = (i\varepsilon)^2 \text{Tr} \left(\lambda^a \lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right), \quad (19b)$$

$$\delta_a S = -i\varepsilon \sum_{l=1}^M \sum_p \beta_{il} [\text{Tr}(U_p + U_p^+)]^{l-1} \text{Tr}(\lambda^a (U_p - U_p^+)), \quad (19c)$$

式中 $\sum_p$ 表示对与变分键相联的 $2(d-1)$ 个元格求和. 将(19)式代入(8)式中,得

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Tr} \left(\lambda^a \lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right) \right\rangle &= - \sum_{l=1}^M \beta_{il} \sum_p \left\langle \text{Tr} \left(\lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right) \right. \\ &\quad \times \left. [\text{Tr}(U_p + U_p^+)]^{l-1} \text{Tr}[\lambda^a (U_p - U_p^+)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

对 $U(N)$ 群,利用 $U(N)$ 群表示的生成元性质

$$\sum_a \lambda_{ab}^a \lambda_{ij}^a = \delta_{aj} \delta_{bi}, \quad \sum_a (\lambda^a \lambda^a)_{ab} = N \delta_{ab}, \quad (21)$$

将(20)式对 a 求和后,可得

$$N \langle W(c) \rangle = - \sum_{l=1}^M \beta_{il} \sum_p \left\langle [\text{Tr}(U_p + U_p^+)]^{l-1} \text{Tr} \left[\prod_{i \in c} U_i (U_p - U_p^+) \right] \right\rangle. \quad (22)$$

我们看到,在 a 有限时,格点上的 Schwinger-Dyson 方程的形式是依赖于作用量的形式的. 但在 a 很小时,我们可以应用(12)式,将(22)式写成

$$\begin{aligned} N \langle W(c) \rangle &= - \sum_{l=1}^M \beta_{il} (2\text{Tr} \mathbf{1})^{l-1} \sum_p \left\langle (1 + o(a^4 g^2))^{l-1} \text{Tr} \left[\left(\prod_{i \in c} U_i \right) (2a^2 g_i F_{\mu\nu}) \right] \right\rangle \\ &= - \sum_{l=1}^M \beta_{il} (2\text{Tr} \mathbf{1})^{l-1} \sum_p 2a^2 g_i \left\langle \text{Tr} \left[\left(\prod_{i \in c} U_i \right) F_{\mu\nu} \right] \right\rangle + o(a^4 g^2). \end{aligned} \quad (23)$$

应用关系式(16),(23)可以写成

$$N \langle W(c) \rangle = - \frac{i}{2g} a^2 \sum_p \left\langle \text{Tr} \left[\left(\prod_{i \in c} U_i \right) F_{\mu\nu} \right] \right\rangle + o(a^4 g^2). \quad (24)$$

从数值计算和理论分析知道, $a \rightarrow 0$ 时, $g \rightarrow 0$. 由此可以看到, Wilson 圈的 Schwinger-Dyson 方程在 a 很小时不依赖于 β_i 的选择.

在规范群为 $SU(N)$ 群时,利用 $SU(N)$ 群的生成元性质

$$\begin{aligned}\sum_a \lambda_{ab}^a \lambda_{ij}^a &= \delta_{ai} \delta_{bj} - \frac{1}{N} \delta_{ab} \delta_{ij}, \\ \sum_a (\lambda^a \lambda^a)_{ab} &= N \delta_{ab} - \frac{1}{N} \delta_{ab},\end{aligned}\quad (25)$$

将(20)式对 α 求和后,同样可得

$$\begin{aligned}&\left(N - \frac{1}{N}\right) \langle W(c) \rangle \\&= -\left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{l=1}^M \beta_l l \sum_p' \left\langle [\text{Tr}(U_p + U_p^+)]^{l-i} \right. \\&\quad \times \left. \left[\text{Tr} \left(\prod_{i \in c} U_i \right) (U_p - U_p^+) \right] \right\rangle.\end{aligned}\quad (26)$$

在 a 很小时,(26)式可以写成为

$$\begin{aligned}&\left(N - \frac{1}{N}\right) \langle W(c) \rangle \\&= -\left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{i}{2g} a^2 \sum_p' \left\langle \text{Tr} \left[\left(\prod_{i \in c} U_i \right) F_{uv} \right] \right\rangle + o(a^4 g^2).\end{aligned}\quad (27)$$

同样得到 Wilson 圈的 Schwinger-Dyson 方程不依赖于 β_l 的选择的结论.

在取连续极限时, $g = g(a)$. (24)和(27)式的左端不一定等于 0. 其具体数值须计算后才知道.

四、推广的 Wilson 作用量 II 及 Wilson 圈变量的 Schwinger-Dyson 方程

1. 推广的 Wilson 作用量 II

具有定域规范不变性的推广的 Wilson 作用量的另一种可能形式为

$$S = \sum_{l=1}^M \beta_l \sum_p \{2(\text{Tr } 1)^l - [(\text{Tr } U_p)^l + (\text{Tr } U_p^+)^l]\}.\quad (28)$$

在连续极限 $a \rightarrow 0$ 下,利用(12)式,(28)式可以写成为

$$S = \sum_{l=1}^M \beta_l \sum_n \{l(\text{Tr } 1)^{l-1} a^4 g^2 \text{Tr } F_{\mu\nu}^2 + 2l(l-1)a^4 g^2 (\text{Tr } F_{\mu\nu})^2 + o(a^6 g^3)\}.\quad (29)$$

我们看到,若取

$$4g^2 \sum_{l=1}^M \beta_l l (\text{Tr } 1)^{l-1} = 1,\quad (30)$$

$$\text{Tr } F_{\mu\nu} = 0,\quad (31)$$

则在 $a \rightarrow 0$ 时,(29)式回到杨-Mills 场的连续形式. 我们知道,在 $SU(N)$ 群情形,(31)式是成立的,但 $U(N)$ 群则不然,所以 (28) 式是 $SU(N)$ 群的杨-Mills 纯规范场的一种格

点方案.

满足(30)式的 β_l 的选择方案也有无穷多种,例如:

1) $M = 1$, Wilson 作用量;

2) $M = 2$, 加伴随表示的作用量;

3) $M = \infty$, $\beta_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!} \cdot \frac{1}{4g^2 f^{(1)}(\text{Tr} \mathbf{1})}$, $f(x)$ 为在 $x = 0$ 处有任意阶导数, 在

$\text{Tr} \mathbf{1}$ 处一阶导数不等于 0 的任意标量函数. 这时(28)式可以写成为

$$S = \sum_p \{2f(\text{Tr} \mathbf{1}) - (f(\text{Tr} U_p) + \text{h.c.})\} / 4g^2 f^{(1)}(\text{Tr} \mathbf{1}).$$

2. Wilson 圈变量在推广的 Wilson 作用量 II 下的 Schwinger-Dyson 方程

在(8)式中,取 S 的表达式为(28)式,取 F 为 Wilson 圈变量 $W(c)$, 则

$$\delta_a F = i\varepsilon \text{Tr} \left(\lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right), \quad (32a)$$

$$\delta_a \delta_a F = (i\varepsilon)^2 \text{Tr} \left(\lambda^a \lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right), \quad (32b)$$

$$\delta_a S = -i\varepsilon \sum_{l=1}^M \beta_l l \sum_p' [(\text{Tr} U_p)^{l-1} \text{Tr} (\lambda^a U_p) - (\text{Tr} U_p^+)^{l-1} \text{Tr} (\lambda^a U_p^+)], \quad (32c)$$

式中 $\sum_p'$ 表示对与变分键相联的 $2(d-1)$ 个元格求和. 将(32)式代入(8)式后, 可得

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Tr} \left(\lambda^a \lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right) \right\rangle &= - \sum_{l=1}^M \beta_l l \sum_p' \left\{ \left\langle (\text{Tr} U_p)^{l-1} \text{Tr} \left(\lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right) \text{Tr} (\lambda^a U_p) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \left\langle (\text{Tr} U_p^+)^{l-1} \text{Tr} \left(\lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right) \text{Tr} (\lambda^a U_p^+) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

利用 $SU(N)$ 群表示生成元性质(25)式,(33)式可以写成为

$$\begin{aligned} &\left(N - \frac{1}{N} \right) \langle W(c) \rangle \\ &= - \left(1 - \frac{1}{N} \right) \sum_{l=1}^M \beta_l l \sum_p' \left\{ \left\langle (\text{Tr} U_p)^{l-1} \text{Tr} \left(U_p \prod_{i \in c} U_i \right) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \left\langle (\text{Tr} U_p^+)^{l-1} \text{Tr} \left(U_p^+ \prod_{i \in c} U_i \right) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

将(34)式中的 U_p 按 a 的幂次展开后, 可得

$$\begin{aligned} &\left(N - \frac{1}{N} \right) \langle W(c) \rangle \\ &= - \left(1 - \frac{1}{N} \right) \frac{i}{2g} a^2 \sum_p' \left\langle \text{Tr} \prod_{i \in c} U_i F_{\mu\nu} \right\rangle + o(a^4 g^2). \end{aligned} \quad (35)$$

由此看到,(35)与(27)式的右端领头项的形式是一样的. 可以认为,就 Schwinger-Dyson 方

程而言,作用量(9)式和作用量(28)式,无论 β_l 怎样选取,都给出同一种物理。

五、推广的 Manton 作用量^[3]及 Wilson 圈变量的 Schwinger-Dyson 方程

1. 推广的 Manton 作用量

具有定域规范不变性的推广的 Manton 作用量的一种形式可以写成为

$$S = \sum_{l=1}^M \beta_l \sum_p \{2\text{Tr } 1 - [\text{Tr}(U_p^l) + \text{h. c.}]\}. \quad (36)$$

(36)式在定域规范变换下的不变性是明显的。

在连续极限 $a \rightarrow 0$ 下,应用(12)式,(36)式可以写成为

$$S = - \sum_{l=1}^M \beta_l \sum_n \{\text{Tr} (ia^2 g_l F_{\mu\nu}(n))^2 + o(a^6 g^3)\}. \quad (37)$$

不难看出,若条件

$$4g^2 \sum_{l=1}^M \beta_l l^2 = 1 \quad (38)$$

成立,则在 $a \rightarrow 0$ 下,(37)式回到连续杨-Mills 场的连续形式。

满足(38)式的选择方案可以有无穷多种,例如:

1) $M = 1$, $\beta_1 = 1/4g^2$, 这是 Wilson 作用量情形;

2) $M = \infty$, β_l 的选择使矩阵函数 $f(U_p) = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l U_p^l$ 有定义。这时

$$S = \frac{1}{4g^2} \sum_p \{2 \text{Tr } f(1) - \text{Tr}[f(U_p) + f(U_p^*)]\}. \quad (39)$$

Manton 作用量^[3](参见附录 B) 是(39)式在 $f(U_p) = f(U_p^*) = \frac{1}{2} (\ln U_p)^2$ 时的特例。

2. Wilson 圈变量在推广的 Manton 作用量下的 Schwinger-Dyson 方程

在(8)式中,取 S 为表达式(36), F 为 Wilson 圈 $W(c)$, 则

$$\delta_a F = i\varepsilon \text{Tr} \left(\lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right), \quad (40a)$$

$$\delta_a \delta_a F = (i\varepsilon)^2 \text{Tr} \left(\lambda^a \lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right), \quad (40b)$$

$$\delta_a S = -i\varepsilon \sum_{l=1}^M \beta_l \sum_p' \text{Tr} (l \lambda^a U_p^l + \text{h. c.}), \quad (40c)$$

式中 $\sum_p'$ 表示对与变分键相联的 $2(d-1)$ 个元格求和。将(40)式代入(8)式,可得

$$\left\langle \text{Tr} \left(\lambda^a \lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right) \right\rangle = - \sum_{l=1}^M \beta_{il} \sum_p' \left\langle \text{Tr} \left(\lambda^a \prod_{i \in c} U_i \right) \text{Tr} [\lambda^a (U_p^l - U_p^{+l})] \right\rangle. \quad (41)$$

对于 $U(N)$ 群, 利用 $U(N)$ 群表示的生成元性质(21)式可以将(41)式写成为

$$N \langle W(c) \rangle = - \sum_{l=1}^M \beta_{il} \sum_p' \left\langle \text{Tr} \left[\prod_{i \in c} U_i (U_p^l - U_p^{+l}) \right] \right\rangle. \quad (42)$$

由此看到, 对不同的 β_l 的选择, Wilson 圈变量的 Schwinger-Dyson 方程的形式会不一样。但对 a 很小的情形, 把 U_p 按 a 的幂次展开, 即得

$$N \langle W(c) \rangle = - \frac{i}{2g} a^2 \sum_p' \left\langle \text{Tr} \left(\prod_{i \in c} U_i F_{\mu\nu} \right) \right\rangle + o(a^4 g^2). \quad (43)$$

(43)与(24)式右端领头项是一样的。

对 $SU(N)$ 群, 利用 $SU(N)$ 群表示生成元的性质(25)式, 可以将(41)式写成为

$$\begin{aligned} \left(N - \frac{1}{N} \right) \langle W(c) \rangle &= - \sum_{l=1}^M \beta_{il} \sum_p' \left(1 - \frac{1}{N} \right) \\ &\times \left\langle \text{Tr} \left[\prod_{i \in c} U_i (U_p^l - U_p^{+l}) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

在 a 很小时, 把 U_p 按 a 的幂次展开时, 得到

$$\begin{aligned} \left(N - \frac{1}{N} \right) \langle W(c) \rangle &= - \frac{i}{2g} a^2 \left(1 - \frac{1}{N} \right) \\ &\times \sum_p' \left\langle \text{Tr} \left[\prod_{i \in c} U_i F_{\mu\nu} \right] \right\rangle + o(a^4 g^2). \end{aligned} \quad (45)$$

由(45), (35)和(27)式可以看到, 在 a 很小时, Wilson 圈变量的 Schwinger-Dyson 方程与 β_l 选择无关, 且有相同的形式。

六、结 论

(9), (28), (36)式给出的是很一般的作用量形式。我们可以说, 就 Schwinger-Dyson 方程而言, 所有这些作用量在连续极限下给出的都是同一物理。进一步讨论这些形式上很不同的作用量给出的质量谱是很有意义的。

感谢吴丹迪, 陈天嵩同志的讨论。

附 录 A

群 上 的 变 分

由于群积分

$$F = \int_G dU f(U) \quad (\text{A} \cdot 1)$$

是测度不变的,有性质

$$\int_G dU f(U) = \int_G dU f(U_0 U) = \int_G dU f(U U_0), \quad (\text{A} \cdot 2)$$

式中 U_0 为群 G 的一个固定群元. $f(U)$ 为标量函数. 令群元 U 的群参数为 A^i , 则 $f(U)$ 为 A^i 的多元函数.

选 U_0 为群 G 中的某个单参数子群的群元

$$U_0 = e^{i\lambda^a \varepsilon} = 1 + i\lambda^a \varepsilon + o(\varepsilon^2), \quad (\text{A} \cdot 3)$$

式中 λ^a 为群 G 的某个生成元(李代数的某个基矢量), ε 为无穷小参量. 定义群元变分为

$$\delta U = \mathfrak{M}(U_0 U - U) = i\varepsilon \lambda^a U, \quad (\text{A} \cdot 4)$$

式中 $\mathfrak{M}(A)$ 表示无穷小量 A 的主部. 群的标量函数 $f(U)$ 的变分可以定义为

$$\delta_a f(U) = \mathfrak{M}[f(U_0 U) - f(U)]. \quad (\text{A} \cdot 5)$$

可以验证,群上的变分有类似于普通泛函变分的性质,例如,对于群上的两个标量函数 f 及 g 和两个表示矩阵 A 及 B , 有

$$\begin{aligned} \delta_a(f \cdot g) &= \delta_a f \cdot g + f \cdot \delta_a g, \\ \delta_a f(g) &= -\frac{df}{dg} \cdot \delta_a g, \\ \delta_a(A \cdot B) &= \delta A \cdot B + A \cdot \delta B. \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 6)$$

对于具有左右测度不变性质的群积分 (A·1) 式,有

$$\begin{aligned} \delta_a F &= \mathfrak{M} \left[\int_G dU f(U_0 U) - \int_G dU f(U) \right] \\ &= \int_G dU \delta_a f(U) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

以上公式是正文中第二节用以推导出力学量的 Schwinger-Dyson 方程的出发点.

附 录 B

格点上的 Manton 作用量^[3]

元格上的场量 U_p 定义为(图 1)

$$U_p = U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(n), \quad (\text{B} \cdot 1)$$

因为 $U_\mu(n) \in U(N)$ 或 $SU(N)$, 所以 U_p 可以对角化

$$U_d = V_p U_p V_p^{-1} = \begin{bmatrix} e^{i\varphi_1(p)} & & & \\ & e^{i\varphi_2(p)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & e^{i\varphi_N(p)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B} \cdot 2)$$

Manton 作用量定义为

$$S = \sum_p \frac{1}{4g^2} \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(p). \quad (\text{B} \cdot 3)$$

我们可以将 (B·3) 式写成另一种形式. 定义 $N \times N$ 矩阵 X_i $i = 1, \dots, N$.

$$(X_i)_{mn} = \delta_{im} \delta_{in}. \quad (\text{B} \cdot 4)$$

显然有

$$X_i X_j = \delta_{ij} X_i, \quad (\text{B} \cdot 5)$$

$$\text{Tr } X_i = 1. \quad (\text{B} \cdot 6)$$

利用矩阵 X_i 的性质, (B·2) 式可以表示为

$$U_d = \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N \varphi_j(p) X_j \right\}. \quad (\text{B} \cdot 7)$$

而

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j^2(p) = \text{Tr} \left(\sum_{j=1}^N \varphi_j^2 X_j \right)$$

$$= \text{Tr} \left(\sum_{j=1}^N \varphi_j X_j \right)^2. \quad (\text{B} \cdot 8)$$

由 (B·7) 和 (B·8) 式可得

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j^2(p) = \text{Tr} (i \ln U_d)^2 = - \text{Tr} (\ln U_d)^2. \quad (\text{B} \cdot 9)$$

将 U_p 写成指数形式 $U_p = e^{iB(p)}$, 则

$$U_d = V_p e^{iB(p)} V_p^{-1} = e^{iV_p B(p) V_p^{-1}}. \quad (\text{B} \cdot 10)$$

将 (B·10) 式代入 (B·9) 式中, 得

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j^2(p) = - \text{Tr} (i V_p B(p) V_p^{-1})^2 = - \text{Tr} (i B(p))^2 = - \text{Tr} (\ln U_p)^2. \quad (\text{B} \cdot 11)$$

由此

$$S = - \sum_p \frac{1}{4g^2} \text{Tr} (\ln U_p)^2. \quad (\text{B} \cdot 12)$$

参 考 文 献

- [1] J. M. Drouffe, *Phys. Rev.*, D18 (1978), 1174.
- [2] P. Menotti and E. Onofri, *Nucl. Phys.*, B190 [FS3] (1981), 288.
- [3] N. S. Manton, *Phys. Lett.*, 96B (1980), 328.
- [4] C. B. Lang, Solomonsou and B. S. Skagerstam, *Nucl. Phys.*, B190 [FS3] (1981), 337.
- [5] S. B. Khokhlochev and Yu. M. Makeenko, *Phys. Lett.*, 101B (1981), 403.
- [6] G. Bhanot and M. Creutz, *Phys. Rev.*, D24 (1981), 3212.
- [7] R. C. Brower and M. Nauenberg, *Nucl. Phys.*, B180 [FS2] (1981), 221.
- [8] Dong Shao-jing and Li Wen-zhu, ZUP-305 (1983), Zhejiang University Preprint.

THE SCHWINGER-DYSON EQUATIONS OF THE WILSON LOOP VARIABLE IN THE LATTICE GAUGE FIELD THEORY AND THE PROBLEM OF UNIVERSALITY

HE XIANG-HAO XIAN DING-CHANG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Some categories of generalized Wilson actions are introduced and the Schwinger-Dyson equations corresponding to these actions are derived. It is shown that these equations have the same form as those in the continuum limit, thus showing that these generalized Wilson actions are equivalent.