

弯晶的沟道效应

罗诗裕 邵明珠

(重庆交通学院)

1985年3月17日收到

提 要

本文引入正弦平方势,将弯晶中的粒子运动方程化为常力矩作用下的摆方程,并用非线性力学方法,详细讨论了系统的相平面特征,分析了相平面上奇点分布和相对运动对系统稳定性的影响,从系统的临界状态出发导出了动力学允许的临界参数和可能偏转的最大能量;此外,还考察了小振幅近似下的粒子运动行为,发现该系统具有软弹簧特征,用 Jacobian 椭圆函数和第一类全椭圆积分严格求解了运动方程和振动周期,导出了低能带电粒子在弯晶中的空间分布和动量分布。

一、引 言

近二十年来,人们对沟道效应进行了大量的研究,并在固体物理、表面物理和原子核物理等领域中得到了广泛的应用。近年来,人们又发现了粒子在弯晶中的沟道效应,并对此发生极大兴趣。苏、美科学家小组的实验表明,利用 Si 单晶(110)面沟道可将能量为 9.3 GeV 的质子束偏转 1.5° , 无明显的退道损失, CERN 的实验又完成了对能量为 12 GeV 的质子束的偏转,进一步证实了利用弯晶来控制束流的可能性。

一般说来,弯晶的退道效应与晶体缺陷,晶格热振动和电子多重散射等因素有关,关于这一点与直单晶完全一样;不同的是,弯晶的退道效应还与晶体弯曲程度(即曲率)有关。事实上,在弯晶中运动的粒子除在平衡轨道附近振动外,还将沿弯晶的平衡轨道作常曲率的圆周运动,在离心力作用下,沟道粒子也可能退道。实验用的晶体常由两部分组成,其中一部分是直的,另一部分是弯的,两者平滑连接,严格准直的束流先通过直沟道,再进入弯沟道。人们关心的是,在直沟道中运动的粒子进入弯晶后,由于离心力的作用,有多少粒子退道,还有多少粒子仍保留在弯晶沟道中,人们把前者称为退道粒子,后者称为再道粒子,并用退道系数 λ 来描写。退道系数的定义是,退道粒子数与原来的沟道粒子数之比,当粒子全部退道时 $\lambda = 1$, 部分粒子退道时 $\lambda < 1$ 。

实验表明,随着粒子动量(或晶体曲率)的增加,退道效应也随之增加,由离心力和向心力平衡条件

$$Pv\kappa = V'(x_c), \quad (1)$$

可导出弯晶可能偏转的最大临界能量。(1)式中的 P 为粒子动量, v 为粒子速度, κ 为晶

体曲率, $V'(x_c) = \left. \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right|_{x=x_c}$, $V(x)$ 为粒子-晶体相互作用势, x_c 为动力学允许的临界距离。

本文引入正弦平方势解析地描述了粒子在弯晶中的退道行为, 导出了粒子的临界能量以及在弯晶中的空间分布和动量分布。

二、理 论

1. 运动方程

粒子在曲率为 κ 的沟道中的运动方程可表示为^[1]

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{1}{Pv} V'(x) = \kappa \quad (2)$$

其中 x 为粒子偏离沟道中心线的距离, z 为沿中心线的长度; 当 $\kappa = 0$ 时, 方程 (2) 化为直沟道中的运动方程, 曲率 κ 可正可负, 不失一般性假定它恒为正值。常用的粒子-晶体相互作用势有 Lindhard 势和 Moliere 势, 文献 [2] 曾对这两种势作过详细讨论, 并引入如下形式的正弦平方势

$$V(X) = KW_s(X) \quad (3)$$

来描写沟道粒子的运动行为, 其中

$$W_s(X) = \beta \sin^2 \alpha X \quad (4)$$

为归一化的正弦平方势,

$$X = 2x/d_p, \quad K = \pi Z_1 Z_2 e^2 N d_p^2, \quad (5)$$

d_p 为晶面间距, Z_1, Z_2 为入射粒子和晶体的原子序数, e 为电子电荷, N 为晶体原子密度, α 和 β 为势参数。

令 $s = 2z/d_p$, 方程 (2) 化为

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \omega_0^2 (\sin \xi - Q_r) = 0, \quad (6)$$

其中

$$\xi = 2\alpha X, \quad \omega_0^2 = \frac{\alpha\beta K}{Pv}, \quad Q_r = \frac{Pv\kappa d_p}{2\alpha\beta K}. \quad (7)$$

如果对于所有 s 都恒有 $|\xi| < \xi_c \left(= 2\alpha X_c = \frac{4\alpha x_c}{d_p} \right)$, 则称这个粒子为再道粒子, 如果对于某个 s , 使得 $|\xi| > \xi_c$, 则称这个粒子为退道粒子, 而 ξ_c 称为无量纲的临界距离。文献 [1] 从物理上考虑, 由条件 $V(x_c) = \varepsilon_{\perp c}$ 导出了临界参数 x_c , 这里 $\varepsilon_{\perp c}$ 是物理上允许的最大横向能量, 不足的是这个量不是从运动方程导出, 从而影响了理论本身的完整性, 我们试图从动力学考虑出发, 根据系统的稳定性分析导出这个临界参数。

2. 系统的相平面特征

平衡轨道 根据平衡轨道的定义 $\frac{d^2\xi}{ds^2} = 0$, 由方程 (6) 可导出平衡轨道为

$$\xi_s = \sin^{-1} Q, \quad (8)$$

和

$$\xi_u = \pi - \xi_s, \quad (9)$$

其中 ξ_s 为稳定奇点, ξ_u 为不稳定奇点. 将 (8) 式代入 (6) 式, 完成一次积分可得系统的积分曲线

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 - \frac{2Q_0}{\cos \xi_s} (\cos \xi + \xi \sin \xi_s) = c, \quad (10)$$

其中

$$Q_0 = \omega_0^2 \cos \xi_s, \quad (11)$$

c 为积分常数, 由系统的初值决定. 令初值 $\xi(0) = \xi_i$, $\frac{d\xi(0)}{ds} = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)_i$, 方程 (10) 化为

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 - \left(\frac{d\xi}{ds}\right)_i^2 - \frac{2Q_0}{\cos \xi_s} (\cos \xi + \xi \sin \xi_s - \cos \xi_i - \xi_i \sin \xi_s) = 0. \quad (12)$$

对于不同的初值, 方程 (12) 给出了相平面上簇积分曲线. 我们感兴趣的是系统的分界线, 因为它包围的相面积大小决定了系统的稳定性.

分界线 注意到与分界线相对应的初值为 $\xi_i = \pi - \xi_s$, $\left(\frac{d\xi}{ds}\right)_i = 0$, 代入方程 (12)

可得分界线方程

$$\frac{1}{Q_0} \frac{d\xi}{ds} = F = \pm \left[\frac{2}{\cos \xi_s} (\cos \xi + \xi \sin \xi_s + \cos \xi_s - (\pi - \xi_s) \sin \xi_s) \right]^{1/2}. \quad (13)$$

图 1 和图 2 给出了系统的相平面特征, 其中图 1 给出了 $\xi_s = 0$ 和 $\xi_s = \frac{\pi}{6}$ 时的积分曲线,

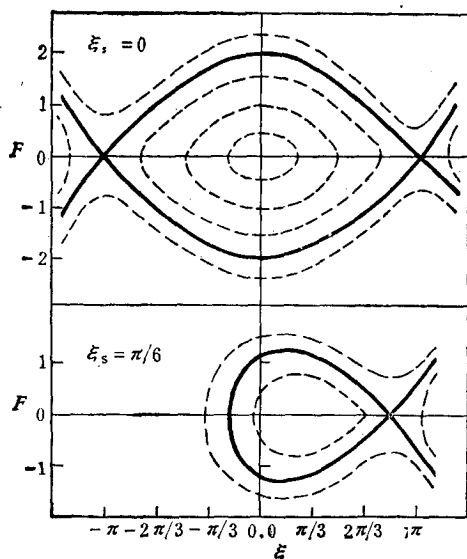


图 1

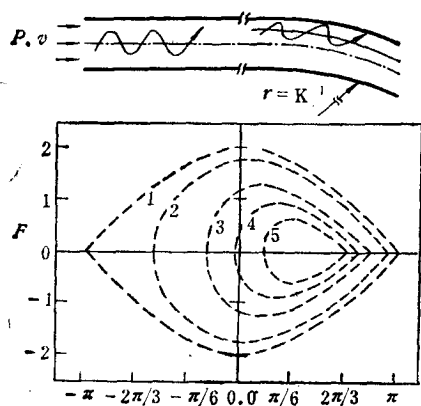


图 2

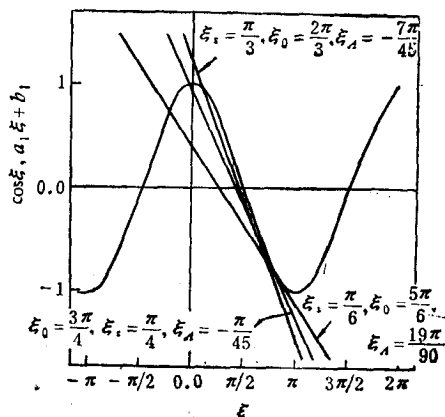


图 3

图 2 给出了不同平衡轨道时的分界线。

令 $F = 0$, 可得分界线的零点方程为

$$\cos \xi + \cos \xi_s + [\xi - (\pi - \xi_s)] \sin \xi_s = 0. \quad (14)$$

由此可求得一个零点为 $\xi_0 = \pi - \xi_s$, 它正好是系统的一个不稳定奇点; 另一个零点可由作图法给出, 如图 3 所示。图 3 给出了不同平衡轨道情况下, 函数 F 的两个零点。

3. 系统的稳定性

系统的稳定性由分界线所包围的相面积决定, 相面积越大, 稳定性越好。从图 2 可以看出, 随着平衡轨道 ξ_s 的增加, 分界线包围的相面积缩小, 当 $\xi_s = 0$ (对应直单晶) 时, 相面积最大, 当 $\xi_s = \pi/2$ 时 (图 3 中未画出), 相面积为零, 相应的状态称为临界状态; 相面积的这种变化, 既反映了沟道弯曲对粒子运动稳定性的影响, 又反映了粒子能量对运动稳定性的影响。令 $\xi_s = \pi/2$, 由 (7) 和 (8) 式可导出系统的临界能量

$$(P\nu)_c = \frac{2\alpha\beta K}{\kappa d_p} \quad (15)$$

或临界参数

$$(P\kappa)_c = \frac{2\alpha\beta K}{\nu d_p}. \quad (16)$$

另一方面, 系统的稳定性还可从相平面上奇点分布及其相对运动来讨论。当 $\kappa = 0$ 时, 系统有两个奇点 ξ_i 和 ξ_u , 均位于 ξ 轴上, 它们之间的距离 $\Delta\xi = \pi - 2\xi_s$ 。随着 ξ_s 增加 $\Delta\xi$ 变小, 当 $\xi_s = \pi/2$ 时, $\Delta\xi = 0$; 两个奇点在 ξ 轴上相遇, 系统的稳定区消失, 相应的状态正是上面分析的临界状态。

引入临界距离 ξ_c , 其定义为

$$\xi_c = \Delta\xi = \pi - 2\xi_s. \quad (17)$$

上式表明, 对于给定的平衡轨道 (或粒子能量, 晶体曲率), 动力学允许的临界距离 ξ_c 是完全确定的, 当初值 $\xi_i < \xi_c$ 时, 系统是稳定的; 当 $\xi_i > \xi_c$ 时, 系统是不稳定的; 当 $\xi_i = \xi_c$ 时, 系统处于临界状态。

4. 退道系数

设相空间的态密度为 σ , 与直沟道和弯沟道相对应的相面积分别为 S_0 和 S , 则退道系数 λ 定义为

$$\lambda = \int_{\Delta S}^1 \sigma d\xi dF / \int_{S_0} \sigma d\xi dF, \quad (18)$$

其中 $\Delta S = S_0 - S$, 且可表示为

$$\Delta S = 2 \left[\int_{-\pi}^{\pi} F_0(\xi) d\xi - \int_{\xi_A}^{\xi_0} F(\xi) d\xi \right], \quad (19)$$

ξ_0 和 ξ_A 为函数 F 的两个零点, $F_0(\xi)$ 表示 $\xi_s = 0$ 时的 $F(\xi)$ 。

三、小振幅近似下的粒子运动行为

1. 相平面特征

令 $\zeta = \xi - \xi_s$, 在小振幅近似下有

$$\sin \xi = \sin(\zeta + \xi_s) = \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3!}\right) \cos \xi_s + \left(1 - \frac{\zeta^2}{2!}\right) \sin \xi_s. \quad (20)$$

如平衡轨道 ξ_s 也比较小(实际上常常是这样), 由 (20) 式可将运动方程 (6) 化为

$$\frac{d^2 \zeta}{ds^2} + a\zeta + b\zeta^3 = 0, \quad (21)$$

其中

$$a = \omega_0^2, \quad b = \frac{-\omega_0^2}{6}. \quad (22)$$

因为系数 $a > 0$, $b < 0$, 方程 (21) 描写的是具有软特性的质量弹系统.

令 $\dot{\zeta} = \eta$, 由方程 (21) 可得

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = -\frac{a\zeta + b\zeta^3}{\eta}. \quad (23)$$

系统的奇点由方程

$$a\zeta + b\zeta^3 = 0, \quad (24a)$$

$$\eta = 0 \quad (24b)$$

给出, 由 (24a) 式可得

$$\zeta = 0, \quad \zeta = \pm \sqrt{a/(-b)}. \quad (25)$$

注意到 (24b) 式, 可求得系统的三个奇点 $(0, 0)$, $(\sqrt{a/(-b)}, 0)$ 和 $(-\sqrt{a/(-b)}, 0)$.

积分 (23) 式可得

$$\eta^2 + a\zeta^2 + \frac{b}{2}\zeta^4 = h, \quad (26)$$

其中 h 为积分常数, 由初值确定. 令 $b = -\rho^2$, 方程 (26) 化为

$$\eta^2 = h - a\zeta^2 + \frac{\rho^2}{2}\zeta^4. \quad (27)$$

稳定性要求方程 (27) 有实根, 即 $\eta^2 \geq 0$; 当 $\eta^2 = 0$ 时, 方程 (27) 的两个根为

$$\zeta_{1,2}^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2\rho^2 h}}{\rho^2}. \quad (28)$$

当 $\Delta = a^2 - 2\rho^2 h > 0$ 时, 无论 ζ 为何值, 方程 (27) 恒有实根, 对应于相平面上的一簇闭曲线; 当 $\Delta < 0$ 时, 位于下述区间:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 2\rho^2 h}}{\rho^2} < \zeta^2 < \frac{a + \sqrt{a^2 - 2\rho^2 h}}{\rho^2}$$

的 ζ^2 值, η 无实根; 当 $\Delta = 0$ 或 $h = a/2\rho^2$ 时, 系统处于临界状态, 相应的积分曲线对应于

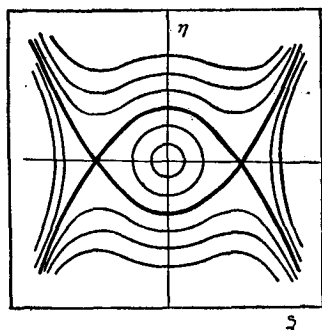


图4 不同平衡轨道时,系统的分界线

相平面上的分界线,如图 4 所示.

2. 方程的解和振动周期

采用标准方法,可将方程 (21) 的解严格地表示为

$$\zeta = \zeta_0 \operatorname{sn} \left(\sqrt{a + \frac{b\zeta_0^2}{2}} \cdot s \right), \quad (29)$$

其中

$$\zeta_0 = \xi_0 - \xi_s = 2\alpha(X_0 - X_s), \quad (30)$$

X_0 为无量纲的初始振幅, sn 为 Jacobian 椭圆函数. 粒子振动周期由

$$\tau = \frac{4}{\sqrt{a + \frac{b\zeta_0^2}{2}}} K(\kappa) \quad (31)$$

给出,其中

$$\kappa^2 = \frac{\rho^2 \zeta_0^2}{2a - \rho^2 \zeta_0^2} \quad (32)$$

为 Jacobian 椭圆函数的模,而

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2 \varphi}} \quad (33)$$

是第一类全椭圆积分.

3. 粒子的空间分布和动量分布

由文献[3],从 (29) 式出发可直接导出粒子的空间分布

$$\rho_x = \frac{\sqrt{a + 2b(X_0 - X_s)^2 \alpha^2}}{4b\alpha^2(X_0 - X_s)^2 \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u}, \quad (34)$$

其中

$$u = \sqrt{a + 2b\alpha^2(X_0 - X_s)} \cdot s, \quad (35)$$

cn 和 dn 为 Jacobian 椭圆函数, X 满足下列条件:

$$X(s, X_0) - X = 0. \quad (36)$$

由 (29) 式还可导出粒子的动量分布

$$\rho_\phi = \frac{-\varepsilon}{8b\alpha^2 \operatorname{sn} u [\operatorname{dn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u]}, \quad (37)$$

其中 $\phi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dX}{ds}$, $\varepsilon^2 = \frac{K}{E}$, E 为粒子能量. ϕ 满足条件

$$\phi(s, X_0) - \phi = 0. \quad (38)$$

四、结果和讨论

1. 临界参数

考察质子弯晶硅(110)面沟道中的运动行为. 选择与入射粒子有关的参数为 $Z_1=1$.

与晶体有关的参数 $Z_2 = 14$, $d_p = 1.92\text{\AA}$, $N = 4.4 \times 10^{22}\text{cm}^{-3}$, 与正弦平方势有关的参数 $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0.20$, 由 (5) 式可得 $K = 115\text{eV}$, 由 (15) 式可导出粒子临界能量

$$(P\nu)_c = 3.76 \frac{1}{\kappa} (\text{GeV}). \quad (39)$$

上式表明, 晶体曲率 κ 越大, 粒子的临界能量越小, 当 $\kappa \rightarrow 0$ 时, 临界能量趋于无穷. 这表明在直沟道中离心效应不存在; 当 $\kappa = (38\text{cm})^{-1}$ 时, 临界能量 $(P\nu)_c = 143\text{GeV}$, 与文献 [1] 估计的一致. 当 $P\nu < (P\nu)_c$ 时, 退道系数 $\lambda < 1$, 当 $P\nu \geq (P\nu)_c$ 时, 退道系数 $\lambda = 1$.

由 (16) 式还可导出临界参数 $(P\kappa)_c = 0.125(\text{GeV} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-2})$, 由此可视具体情况折衷选择粒子动量和晶体曲率.

2. 退道系数

由 (20) 式, 可用计算机得到退道系数 λ . 假设相空间密度 σ 是均匀的, 则直接可从相面积导出退道系数, 比如当平衡轨道为 $\xi_s = \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 时, 退道系数 λ 分别为 0.25, 0.52, 0.66 和 0.78. 当 $\xi_s = 0$ 时, $\lambda = 1$, 当 $\xi_s = \frac{\pi}{2}$ 时, $\lambda = 0$.

3. 空间分布和动量分布

因为几乎所有沟道现象都与粒子的空间分布和动量分布有关, 有必要对此作一简单描述. 选择文献 [3] 中的一组参数, 且假设无发散的 He 离心束“平行”地进入 Si 单晶 (110) 面沟道, 并具有均匀的初始空间分布, 对于 $\delta = 200$, 图 5 和图 6 给出了直沟道和

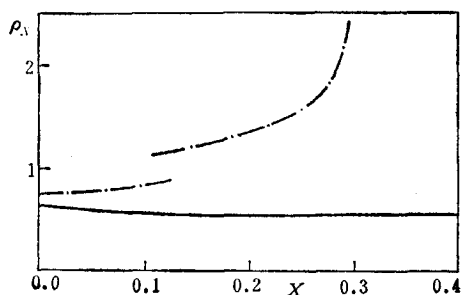


图 5

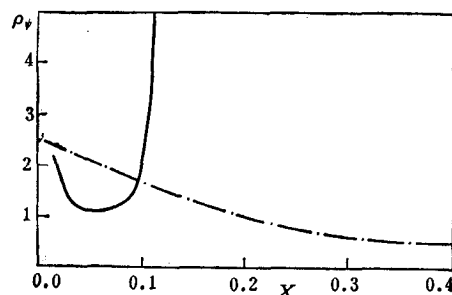


图 6

弯沟道中粒子的空间分布和动量分布(见 (34), (36), (37) 和 (38) 式), 图中实线为弯沟道, 虚线为直沟道. 这两个图表明, 由于晶体的弯曲效应, 明显地改变了这种分布状况.

值得注意的是, 对于弯晶, 粒子的横向位移是相对于平衡轨道 $\xi_s = \frac{\pi}{18}$ 来计算的.

我们曾用正弦平方势研究了带电粒子的沟道辐射^[4-6], 本文用这一相互作用描述了弯晶的沟道效应, 结果表明正弦平方势是一种比较符合物理实际又比较容易处理的粒子-晶体相互作用势.

参 考 文 献

- [1] J. A. Ellison, *Nucl. Phys.*, **B206** (1982), 205.
- [2] 罗诗裕、邵明珠, 中国激光, **11**(1984), 69.
- [3] 罗诗裕、邵明珠, 核技术, (3)(1983), 38.
- [4] 罗诗裕、刘曾荣、邵明珠, 半导体学报, **6** (1985), 82.
- [5] 罗诗裕、余超凡、邵明珠, 数学物理学报, 待发表.
- [6] 罗诗裕, 物理, **12**(1983), 6.

CHANNELING EFFECTS IN BENT CRYSTAL

LUO SHI-YU SHAO MING-ZHU
(Chongqing Jiaotong Institute, Sichuan)

ABSTRACT

In this paper, the sine-squared potential is introduced, and the motion equation of particle is reduced to a pendulum equation, with constant moment; the properties of the phase plane are described in detail by using the method in nonlinear mechanics, the effects of the singular point distribution and motion in phase plane on stability of the system are discussed, the critical parameters and maximum energy are deduced. Besides, the particle motion behaviours in the case of small amplitude approximation is analyzed. The results show that the system appears to exhibit soft-spring properties. The solution and the period are represented exactly by Jacobian elliptic function and the 1-st kind of complete elliptic integral. The space distribution and momentum distribution of particles are derived.