

液 ^4He - ^3He 混合膜“面超流特性”的理论探讨

王 诚 泰

(清华大学物理系)

于 录

(中国科学院理论物理研究所)

1985年9月6日收到

提 要

本文对液 ^4He - ^3He 混合膜的面超流特性提出了理论模型,推导出含 ^3He 后涡线对之间的相互作用位能.在此基础上推导出静递推关系式与动力学介电常数.从理论上计算出扭摆的周期变化 $2\Delta P/P$ 与功率耗散 Q^{-1} 在转变温度 T_c 附近的变化,并与McQueeney等人的实验结果作了比较.

一、引 言

近年来,人们对液 ^4He - ^3He 混合膜的“面超流特性”发生了很大的兴趣,从实验上作了定量研究. ^4He - ^3He 混合膜在液 ^3He 与 ^4He 层之间.因基片对 ^4He 原子的范氏吸引力比对 ^3He 原子的吸引力强,所以在基片表面上吸附了很薄的一层 ^4He ,在 ^4He 层上面是液 ^4He - ^3He 的混合层,混合层上面是液体 ^3He ,构成了“三明治”.

对于 ^4He - ^3He 混合膜的准二维系统,已经进行了大量实验^[1]与理论^[2]研究,但是从理论上做出定量分析的结果还较少. McQueeney 等人^[3]从实验上测量了混合膜的面超流特性,他们在较宽的温度与浓度范围内,定量地测量了低覆盖层纯 ^4He 膜与混合膜的面超流特性.低覆盖层指的是膜平均厚度小于1个原子层(1原子层 $\approx 3.6 \text{ \AA}$). 他们的实验结果表明,在转变温度 T_c 小于500mK的范围,Kosterlitz-Thouless^[4](简称K-T)理论仍然成立,但加入 ^3He 后,混合膜在 $T < T_c$ 区域的面超流特性与纯 ^4He 膜有所不同.

本文对混合膜在 T_c 附近的面超流特性作了探讨,提出了理论模型,推导出含 ^3He 后涡线之间的相互作用位能,并利用此位能推导出静递推关系式,得到了在转变温度 T_c 处超流面密度 $\sigma_s(T_c)$ 与 T_c 的比值为

$$\frac{\sigma_s(T_c)}{T_c} = \frac{m^2}{\hbar^2} - k_B \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\pi}, \quad (1)$$

式中 ε 为与包含 ^3He 有关的常量, m 为 ^4He 原子的质量. 我们从理论上推导出动力学介电常数 $\varepsilon(\omega)$,根据Ambegaokar, Halperin, Nelson 和 Siggia(以下简称AHNS^[5]),理论中频移 $2\Delta P/P$ 与功率耗散 Q^{-1} 和 $\varepsilon(\omega)$ 的关系,适当选择参量计算了不同厚度的混

合膜在 T_c 附近的频移与耗散的特性, 并与 McQueeney 等人的实验结果作了比较.

二、一对涡线之间的有效相互作用

对三维 ^3He - ^4He 混合液中的涡线, 人们已作了很多研究^[6]. 有人从理论上预言^[7], 在涡核附近会形成 ^3He 原子的富集. 这一预言已为离子俘获实验证实^[6]. 基于这一事实, 我们假定在准二维的 ^4He - ^3He 混合膜中, ^3He 原子也富集在涡核附近. 设涡核的半径为 r_0 , 在涡核附近半径为 a ($a > r_0$) 的范围内, 液氦平均密度较低, a 的具体数值不影响后面计算.

根据 AHNS^[5] 理论, 一对涡线之间的相互作用可以用等价的电荷相互作用来代替, 电量 q 与裸超流面密度 σ_s^0 之间的对应关系为

$$2q' = 2\pi\sigma_s^0 \cdot \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2. \quad (2)$$

用电学语言表述, 我们设想的模型是: 有两个介电常数为 ϵ , 半径为 a 的圆盘, 置于介电常数为 1 的均匀介质中, 电荷 q_+ 与 q_- 分别位于两圆盘的中心, 它们之间的距离是 r . 电荷之间相互作用的位能为

$$U_0(r) = q_- \cdot \varphi(r), \quad (3)$$

$\varphi(r)$ 是电荷 q_+ 在 q_- 处产生的电位. 问题归结为计算 $\varphi(r)$, 我们设 $r \gg a$, 利用电像法并考虑介质盘的极化电荷, 取到二次成像, 可求得 $\varphi(r)$ 的近似解为

$$\varphi(r) = -2q_+ \left[\frac{2}{\epsilon + 1} \ln r - \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right)^2 \cdot \frac{a^4}{r^4} \right]. \quad (4)$$

上式的推导参见附录. Browne 和 Doniach 讨论涡线钉扎^[8]时曾进行过类似的分析, 但我们的讨论与他们的情形是很不相同的. 将(4)和(2)式代入(3)式, 并考虑小涡线对的屏蔽效应^[4], 则一对涡线之间相互作用能为

$$U_0(r) = 2\pi\sigma_s^0 \cdot \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{2}{\epsilon + 1} \cdot \int_a^r \frac{dr'}{\tilde{\epsilon}(r') \cdot r'} + 4 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right)^2 \cdot a^4 \cdot \int_a^r \frac{dr'}{\tilde{\epsilon}(r') \cdot r'^4} + A \right\}, \quad (5)$$

式中 $\tilde{\epsilon}(r)$ 为与距离 r 有关的待求的介电函数, A 为常量. 因为在 $r < a$ 中只存在一个涡线, 因此把 a 看作是有效的涡核半径, $2\pi\sigma_s^0 \cdot \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \cdot A$ 可看作是两涡核有效能量 E_c 的和.

三、静递推关系式与动力学介电常数

1. 静递推关系式^[4]

静介电常数 $\tilde{\epsilon}(r)$ 为

$$\tilde{\epsilon}(r) = \epsilon + 4\pi\chi(r), \quad (6)$$

$$\chi(r) = \int_a^r \alpha(r') \cdot n(r') \cdot 2\pi r' dr'. \quad (7)$$

极化率 $\alpha(r)$ 为

$$\alpha(r) = \pi \cdot K_0 \cdot r^2 / 2k_B T, \quad (8)$$

$$K_0 = \sigma_0^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2. \quad (9)$$

涡线对的数密度 $n(r)$ 为

$$n(r) = y_0^2 \cdot \exp(-U_0(r)/k_B T) / a^4, \quad (10)$$

$$y_0 = \exp(-E_c/k_B T). \quad (11)$$

将(8),(10)和(5)式代入(6)和(7)式,得到 K - T 递推关系的积分形式为

$$K^{-1}(l) = \varepsilon \cdot k_B \cdot T \cdot K_0^{-1} + 4\pi^3 \cdot \int_0^l y^2(l') dl', \quad (12)$$

$$y(l) = y_0 \cdot \exp \left[2l - \frac{2\pi}{\varepsilon + 1} \int_0^l K(l') dl' - 4\pi \cdot \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^2 \cdot \int_0^l e^{-4l'} \cdot K(l') dl' \right], \quad (13)$$

式中

$$l = \ln(r/a), \quad (14)$$

$$K^{-1}(l) = k_B T \cdot \varepsilon(l) / K_0. \quad (15)$$

对(12),(13)式两边微分,得到递推关系的微分形式为

$$\frac{dK^{-1}}{dl} = 4\pi^3 \cdot y^2(l), \quad (16)$$

$$\frac{dy(l)}{dl} = y(l) \left\{ 2 - \pi K(l) \left[\frac{2}{\varepsilon + 1} + 4 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^2 \cdot e^{-4l} \right] \right\}. \quad (17)$$

如果 $\varepsilon = 1$, 则上式过渡到纯 ^4He 膜的静递推关系式^[4]. 在 $l \rightarrow \infty$ 时, 我们得到固定点为

$$y_c = 0, \quad K_c = \frac{\varepsilon + 1}{\pi}. \quad (18)$$

根据重正化超流面密度的定义为

$$\sigma_s(T_c) = \sigma_s^0 / \varepsilon(r = \infty), \quad (19)$$

我们得到含 ^4He 后的普适关系为

$$\frac{\sigma_s(T_c)}{T_c} = \frac{m^2}{\hbar^2} k_B \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\pi}. \quad (20)$$

即(1)式. 如果 $\varepsilon = 1$, 上式即是纯 ^4He 的著名的 K - T 普适关系^[9], 这表明在我们的混合膜模型中 K - T 普适关系被修改, 用 $(\varepsilon + 1)$ 代替 2.

定义 $K^{-1}(l) = \frac{\pi}{\varepsilon + 1} \left(1 - \frac{x(l)}{2} \right)$, 则(16)和(17)式变为

$$\frac{dx(l)}{dl} = -2(\varepsilon + 1) \cdot (2\pi y)^2,$$

$$\frac{dy(l)}{dl} \simeq -y(l) \cdot x(l)/(1 - x(l)/2). \quad (21)$$

推导上式时,忽略了 e^{-4l} 的项. 进一步假设 $x(l)$ 很小,可得到线性化递推关系式为

$$\frac{dx(l)}{dl} = -2(\varepsilon + 1)(2\pi y)^2, \quad (22)$$

$$\frac{dy(l)}{dl} \simeq -y(l) \cdot x(l). \quad (23)$$

由上两式 dl 相等,得到

$$x^2 - 2(\varepsilon + 1)(2\pi y)^2 = -\frac{b^2}{4}t, \quad (24)$$

式中 b 为常数,约化温度 $t = 1 - T_c/T$.

在 $l \gg 1/x(l=0)$ 时,(22)与(23)式的解为

$$\left. \begin{aligned} x(l) &= \frac{x(T)}{2} \cdot \coth(x(T) \cdot l/2) \\ y(l) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2(\varepsilon + 1)}} \cdot \frac{x(T)}{2} \cdot \operatorname{csch}(x(T) \cdot l/2) \end{aligned} \right\} t < 0, \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} x(l) &= \frac{x(T)}{2} \cdot \cot(x(T) \cdot l/2) \\ y(l) &= \frac{x(T)}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{2(\varepsilon + 1)}} \cdot \csc(x(T) \cdot l/2) \end{aligned} \right\} t > 0, \quad (26)$$

式中 $x(T) = b\sqrt{|t|}$

2. 动力学介电常数

根据 AHNS^[5] 理论,在有限频率 ω 的交变外场作用下,氦层的频移 $2\Delta p/p$ 耗散 Q^{-1} 与动力学介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 的关系为

$$\frac{2\Delta p}{p} = \sigma_s^0 \cdot \frac{A}{M} \cdot \operatorname{Re}[\varepsilon^{-1}(\omega)], \quad (27)$$

$$Q^{-1} = \sigma_s^0 \cdot \frac{A}{M} \cdot \operatorname{Im}[-\varepsilon^{-1}(\omega)], \quad (28)$$

式中 A 为氦膜的面积, M 为振子的质量. 动力学介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b(\omega) + \varepsilon_f(\omega) + i\varepsilon', \quad (29)$$

束缚涡线对的贡献 $\varepsilon_b(\omega)$ 为

$$\varepsilon_b(\omega) = \varepsilon + \int_a^\infty g(r, \omega) \frac{d\tilde{\varepsilon}(r)}{dr} dr, \quad (30)$$

$g(r, \omega)$ 是距离为 r 的涡线对响应函数^[10],

$$g(r, \omega) = \left(1 - i \frac{\omega r^2}{14D}\right)^{-1}, \quad (31)$$

D 为扩散系数, ω 为基片振动频率. 利用(31)式得到^[10]

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \varepsilon_b(\omega) &= \varepsilon \left(r = \sqrt{\frac{14D}{\omega}} \right), \\ \operatorname{Im} \varepsilon_b(\omega) &= \frac{\pi}{4} \cdot \left[r \cdot \frac{d\varepsilon(r)}{dr} \right]_{r=\sqrt{\frac{14D}{\omega}}}.\end{aligned}\quad (32)$$

在 $T > T_c$ 时 (30) 式的积分上限用自由涡线之间的平均距离代替, 自由涡线的贡献 $\varepsilon_f(\omega)^{[10]}$ 为

$$\varepsilon_f(\omega) = i \cdot \frac{2\pi(\varepsilon + 1)}{7} \cdot F \cdot \frac{\sigma_s^0 \cdot T_c}{\sigma_s(T_c) \cdot T} \cdot \frac{14D}{a^2\omega} \cdot e^{-4\pi/b \sqrt{l_D}}, \quad (33)$$

F 是数量级为 1 的常数, (29) 式中 ε' 为剩余耗散, 产生的原因还不十分清楚. 理论中可选参量为

$$\frac{A}{M} \sigma_s(T_c), b, \frac{14D}{a^2\omega}, F, \varepsilon', T_c. \quad (34)$$

四、结果与讨论

引言中已指出, 文献[3]给出低覆盖层纯 ^4He 膜与混合膜的实验结果, 表明 K-T 理论仍然成立, 但仔细分析文献[3]的图 1 和图 2, 可以看出纯 ^4He 膜与混合膜存在差异. 从纯 ^4He 膜的图 1 上看到, 代表 K-T 普适关系的直线与频移 Δp 曲线相交的温度正是 Δp 陡度急剧变化的温度, 由此定义的 T_c 值低于耗散峰峰值的温度, 这与 AHNS^[5] 动力学理论的预言一致. 然而, 从混合膜的图 2 上看出, Δp 陡度急剧变化的温度低于 K-T 直线与 Δp 曲线相交的温度, 而这个相交的温度却与混合膜耗散峰峰值的温度相同. 我们认为这个差异由 (1) 式可给予解释, 因为 (1) 式表明了混合膜的 K-T 普适直线的斜率与纯 ^4He 膜的斜率不同, 对照文献[3]的图 1 与图 2 可知, 混合膜的 K-T 直线斜率应大于纯 ^4He 膜的直线斜率, 这就是说 $(\varepsilon + 1) > 2$, 但是由文献[3]的图 2 很难精确地定出 ε 的值, 我们粗估 $\varepsilon = 1.15$.

为了与实验曲线比较, 我们用上面推导出的公式计算周期变化和耗散对温度的依赖关系, 选用的参量值为

$$\frac{A}{M} \cdot \sigma_s(T_c)/T_c = 9.6 \times 10^{-6}, F = 1, b = 3,$$

$$\varepsilon = 1.15, \varepsilon' = 0.07, l_D = \ln\left(\frac{14D}{a^2\omega}\right) = 12,$$

各 T_c 值为 0.118, 0.164, 0.2, 0.242, 0.297, 0.339, 0.393 和 0.456K.

计算方法与文献[10]相同. 在 $T < T_c$ 时, 利用线性方程的解 (25) 式直接代入 (32), (27) 和 (28) 式进行计算. 在 $T > T_c$ 时, 要考虑自由涡线的贡献 (33) 式, 这时束缚涡线对 $\varepsilon_b(\omega)$ 的计算方法是: 如果 $l_D < l_0 = \pi/x(T)$, 利用线性方程解 (26) 式进行计算, 如果 $l_D > l_0$, 则以

$$x(l_0) = 0, y(l_0) = x(T)/4\pi \cdot \sqrt{2(\varepsilon + 1)}$$

为初始值, 数值求解非线性递推关系式 (21), 直到

$$l_D = \frac{1}{2} \ln(14D/a^2 \cdot \omega).$$

在 $l_D \geq 2\pi/x(T)$ 的温度区间, 令 $y(l) = 0$, $x(l)$ 保留温度为 $l \cdot x(T) = 2\pi$ 时的值. 作这种截断的物理原因是, 在温度高于 $l_D \cdot x(T^*) = 2\pi$ 所对应的特定温度 T^* 时, 具有 l_D 的束缚涡线对, 其涡线之间的距离已与自由涡线的平均距离相等, 这时再把涡线分成束缚或自由涡线已无意义.

本文图 1, 2 给出各 T_c 频移与耗散的理论曲线. 从图 2 中可清楚地看出, 耗散峰的高度和宽度与 T_c 成正比, 因理论结果只与相对参量 T/T_c 有关. 图 3 为 McQueeney 等人^[3]的实验曲线, 峰的高度大致与 T_c 成正比(最薄的几个膜, 峰的位置向低温方向移动, 偏离其它峰值连成的直线), 这与动力学理论预言一致, 但与纯 ^4He 膜低覆盖层的情形不

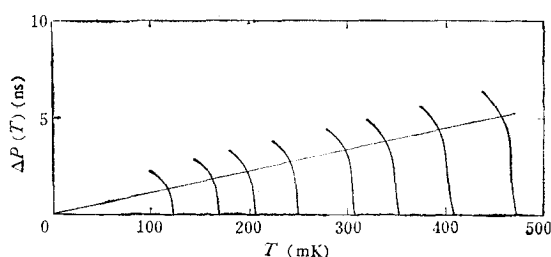


图 1

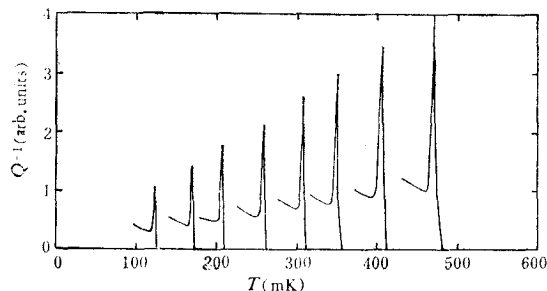


图 2

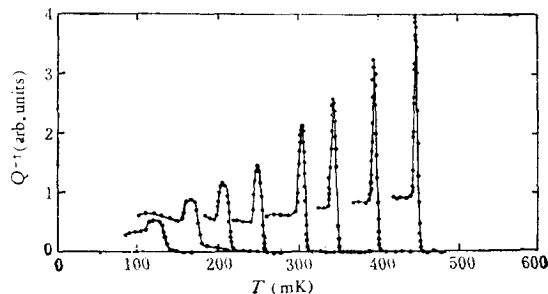


图 3

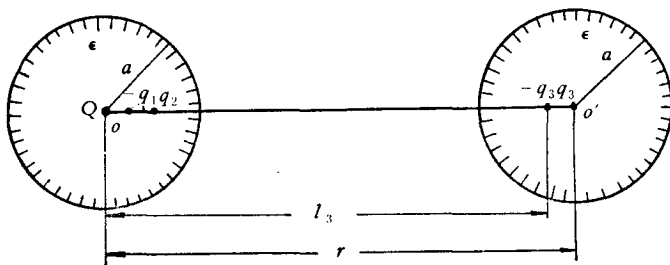
同. 文献[3]给出的纯 ^4He 膜耗散峰的高度与宽度随 T_c 呈不规则变化. 从某种意义上说, 混合膜比纯 ^4He 膜可能更好地用 K-T 理论描述, 这种似乎很奇怪的现象, 我们认为可以理解的, 因为混合膜中的涡线处于“三明治”的结构中, 而液体 ^3He 的存在会削弱基片不均匀效应的影响, 致使混合膜的行为与高覆盖层的纯 ^4He 膜的行为相近. 混合膜实验曲线中耗散峰宽度随 T_c 下降而变宽的现象与理论结果不同, 这可能是非普适参量 b 及 l_D 的影响. 数值计算表明耗散峰的高度对参量 b 与 l_D 的选择很不敏感, 但是峰宽与频移随着 b 与 l_D 的减小而增大, 我们并不试图去拟合每条实验曲线, 所以未逐条选择相应的 b 及 l_D 的值, 因它们的变化规律超出了本文的简单模型. 还存在另一种可能性, 就是低温下峰的展宽与频移是由于基片不均匀效应或非线性效应引起的. 此外, 我们还注意到, 混合膜中剩余耗散比纯 ^4He 膜的大, 这可能是由于“三明治”的结构比较容易导致涡线的钉扎所引起的.

也许有人认为, 我们的模型与 ^3He 溶解引起液氦有效质量均匀减少是一回事. 其实这并不相同. 文献[3]图 4 给出频移外推到零度 $\Delta p(0)$ 随 ^4He 覆盖层的变化直线, 纯 ^4He 膜与混合膜是两条陡度完全相同的平行直线, 该文作者指出稀释效应能导致陡度的明显改变, 但实验并未观察到, 所以有效质量均匀减少的设想是不对的. 我们的模型是 ^3He 富集在涡核附近, 所以不会影响 $\Delta p(0)$ 的直线陡度, 这点与实验结果一致. 但文献[3]图 4 给出混合膜出现超流的液 ^4He 层的最低厚度比纯 ^4He 膜要增加 $1/2$ 原子层厚度, 我们估计这可能是液体 ^3He 使基片上固态 ^4He 层厚度增加所引起的, 但这有待于进一步实验证实.

综上所述, 我们提出了一个在混合膜中 ^3He 原子在涡核附近富集的模型. 从理论上推导出含 ^3He 后修改的 K-T 普适关系与耗散峰高度随 T_c 变化的标度行为, 这些与实验结果相符合.

附 录

如附录图 1 所示, 电荷 q_+ 与 q_- 分别位于介电常数为 ϵ 、半径为 a 的圆盘中心 o 与 o' , oo' 的距离为 r , 求电荷 q_+ 在 q_- 处产生的电位 $\varphi(r)$. 利用电像法, 考虑介质盘的极化电荷, 通过多次成像可求得 $\varphi(r)$ 的严格解. 我们假设 $r \gg a$, 取到二次成像, 求得 $\varphi(r)$ 的近似解.



附录图 1

$$Q = q_+ + q_1 - q_2 + q_3$$

自由电荷 q_+ 使介质盘 o' 极化, 极化电荷对圆盘 o' 以外电位的贡献, 可以用像电荷 $\pm q_3$ 等效地代替, 而对圆盘

o' 内各点电位的贡献可用像电荷 q'_3 代替, 像电荷的位置如附录图 1 所示, 而 $-q_3$ 到圆盘中心 o' 的距离 $r - l_3 = a^2/r$, l_3 为 $-q_3$ 离自由电荷 q_+ 的距离,

$$q_3 = -q'_3 = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right) q_+.$$

而 q_3 与 $-q_3$ 对外的电场引起圆盘 o 中的介质极化, 这些极化电荷对圆盘 o 外面各点电位的作用可分别用 q_1 与 q_2 来等效地代替,

$$q_1 = q_2 = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)^2 q_+.$$

各个像电荷的位置如附录图 1 所示, $-q_1$ 到 o 点距离 $l_1 = a^2/r$, q_2 离 o 点距离 $l_2 = a^2/l_3 = a^2/(r - a^2/r)$.

考虑自由电荷 q_+ , 像电荷 $\pm q_1$, $\pm q_2$ 与 q'_3 在 o' 处产生的电位, 可以得到二次成像的 $\varphi(r)$ 近似解为

$$\varphi(r) = 2[-(q_+ + q_1 - q_2 + q'_3)\ln r - q_2\ln(r - l_2) + q_1\ln(r - l_1)]$$

$$= -2q_+ \left[\frac{2}{\varepsilon + 1} \ln r - \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)^2 \cdot \frac{a^4}{r^4} \right].$$

这就是正文中引用的(4)式.

参 考 文 献

- [1] 可参阅 J. P. Laheurte *et al.*, *Phys. Rev.*, B22 (1980), 4307; 及所引文献.
- [2] 可参阅 D. O. Edwards and W. F. Saam, in “Progress in Low Temperature Physics”, ed. by D. F. Brewer, N. H., Amsterdam, (1978), Vol. VIIb, P.283.
- [3] D. McQueeney, A. Agnolet and J. D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.*, 52 (1984), 1325.
- [4] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys.*, C6(1973), 1181.
- [5] V. Ambegaokar, B. I. Halperin, D. R. Nelson and E. D. Siggia, *Phys. Rev.*, B21 (1980), 1806.
- [6] W. I. Glaberson and R. J. Donnelly, in “Progress in Low Temperature Physics”, ed. by D. F. Brewer, N. H., Amsterdam, (1985), Vol. IX.
- [7] L. S. Rent and I. Z. Fisher, *J. Exper. Theor. Phys.*, 28(1969), 375.
- [8] D. A. Browne and S. Doniach, *Phys. Rev.*, B25 (1982), 136.
- [9] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.*, 39 (1977), 1201.
- [10] S. L. Teitel, Ph. D. Thesis, Cornell University, (1981).

ON THE THEORY OF SURFACE SUPERFLUIDITY IN ^4He - ^3He MIXTURE FILMS

WANG CHENG-TAI

(Department of Physics Tsinghua University, Beijing)

YU LU

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, a theoretical model describing the surface superfluidity in ^4He - ^3He mixture films is proposed to obtain an expression for the potential energy of vortex pairs in the presence of ^3He . The static recursion relations as well as the dynamical dielectric function are then derived using this form of potential energy. The period shift $2\Delta P/P$ and the dissipation Q^{-1} for the torsional oscillator near T_c are calculated theoretically and compared with the experimental results of McQueeney et al.