

双稳激光器的不稳定性本质研究

王守武 王启明 林世鸣¹⁾

(中国科学院半导体研究所)

1985年11月27日收到

提 要

本文从非线性方程稳定性理论出发,给出了双稳激光器速率方程的稳定性三条件,指出了其中两个条件分别是产生双稳和自脉动的不稳定性条件,证明了双稳与光功率曲线出现负斜率的区域相对应,这时小信号分析方程有单调上升解,自脉动则与无稳定解的区域相对应,这时小信号分析方程有振荡上升解.另外两者都属于“三次”非线性现象,但是要在 g 达到一定的非线性时才可能产生自脉动.

一、引 言

自从双接触型激光器作为双稳器件的设想提出以来^[1],在实验上曾经观察到自脉动和双稳现象,并因此引起了对自脉动和双稳机理的研究,提出了多种导致自脉动和双稳产生的机制^{[2-6],2)},但很少有论及它们之间的区别和联系,本文则从非线性方程的稳定性理论出发统一地讨论这个问题.

二、双稳激光器速率方程稳定性三条件

双稳激光器的结构可参阅文献[7],它的速率方程可写为

$$\frac{dN_1}{dt} = P_1 - R(N_1) - \frac{c}{n_{\text{eff}}} g(N_1) \cdot S, \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = P_2 - R(N_2) - \frac{c}{n_{\text{eff}}} g(N_2) \cdot S, \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = \left\{ \frac{c}{n_{\text{eff}}} [\gamma_1 g(N_1) + \gamma_2 g(N_2)] - \frac{1}{\tau_p} \right\} S + \beta [\gamma_1 R(N_1) + \gamma_2 R(N_2)]. \quad (3)$$

这是一个非线性方程组,我们将按第一近似法讨论其稳定性问题^[8].为此设 $N_1 = N_{10} + \Delta N_1$, $N_2 = N_{20} + \Delta N_2$, $S = S_0 + \Delta S$, 其中 N_{10} , N_{20} , S_0 为稳态值,将上式代入方程(1)–(3)并忽略二阶项则有

$$\Delta \dot{N}_1 = -v_1 \Delta N_1 - v_2 \Delta S, \quad (4)$$

$$\Delta \dot{N}_2 = -v_3 \Delta N_2 - v_4 \Delta S, \quad (5)$$

1) 本所博士研究生.

2) 黄熙,私人通信.

$$\Delta \dot{S} = \nu_1 \Delta N_1 + \nu_6 \Delta N_2 + \nu_7 \Delta S, \quad (6)$$

式中

$$\nu_1 = \dot{R}(N_{10}) + \frac{c}{n_{\text{eff}}} \dot{g}(N_{10}) \cdot S_0, \quad (7)$$

$$\nu_2 = \frac{c}{n_{\text{eff}}} g(N_{10}), \quad (8)$$

$$\nu_3 = \dot{R}(N_{20}) + \frac{c}{n_{\text{eff}}} \dot{g}(N_{20}) \cdot S_0, \quad (9)$$

$$\nu_4 = \frac{c}{n_{\text{eff}}} g(N_{20}), \quad (10)$$

$$\nu_5 = \frac{c}{n_{\text{eff}}} \gamma_1 \dot{g}(N_{10}) S_0 + \beta \gamma_1 \dot{R}(N_{10}), \quad (11)$$

$$\nu_6 = \frac{c}{n_{\text{eff}}} \gamma_2 \dot{g}(N_{20}) S_0 + \beta \gamma_2 \dot{R}(N_{20}), \quad (12)$$

$$\nu_7 = \frac{c}{n_{\text{eff}}} [\gamma_1 g(N_{10}) + \gamma_2 g(N_{20})] - \frac{1}{\tau_P}. \quad (13)$$

由方程组 (4)–(6) 消元可得

$$\Delta \ddot{S} + \omega_1 \Delta \dot{S} + \omega_2 \Delta \dot{S} + \omega_3 \Delta S = 0, \quad (14)$$

式中

$$\omega_1 = \nu_1 + \nu_3 - \nu_7, \quad (15)$$

$$\omega_2 = \nu_1 \nu_3 + \nu_5 \nu_2 + \nu_6 \nu_4 - \nu_1 \nu_7 - \nu_3 \nu_7, \quad (16)$$

$$\omega_3 = \nu_3 \nu_5 \nu_2 + \nu_1 \nu_6 \nu_4 - \nu_3 \nu_7 \nu_1. \quad (17)$$

根据 Rowth-Horwitz 判据, (14) 式的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1 & 1 & 0 \\ \omega_3 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{vmatrix}$$

的所有主子式都大于零是它稳定的充分必要条件, 因此有

$$\text{稳定性第一条: } W_1 = \omega_1 > 0, \quad (18)$$

$$\text{稳定性第二条: } W_2 = \omega_1 \omega_2 - \omega_3 > 0, \quad (19)$$

$$\text{稳定性第三条: } W_3 = \omega_3 > 0. \quad (20)$$

如果将 $\nu_1 - \nu_7$ 的表式代入 (18) 式, 经整理后稳定性第一条条件可以写为

$$\begin{aligned} W_1 = & \dot{R}(N_{10}) + \frac{c}{n_{\text{eff}}} \dot{g}(N_{10}) \cdot S_0 + \dot{R}(N_{20}) + \frac{c}{n_{\text{eff}}} \dot{g}(N_{20}) \cdot S_0 \\ & + \frac{\beta}{S_0} [\gamma_1 R(N_{10}) + \gamma_2 R(N_{20})]. \end{aligned} \quad (21)$$

对于一般双稳激光器上式右边所有的项都为正值, 所以 W_1 恒大于零, 即第一稳定性条件始终满足。

三、稳定性第三条件是双稳条件

上述结果适用于一般的 R 和 g 的函数形式, 考虑到自脉动的产生与增益区和吸收区的 $g(N)$ 的斜率比关系很大, 为讨论方便, 下面取如下的 $g(N)$ 的表达式:

$$g(N) = \begin{cases} a_1 N - b_1 & (\text{当 } N > N_0 \text{ 时}); \\ a_2 N + (a_1 - a_2)N_0 - b_1 & (\text{当 } N < N_0 \text{ 时}). \end{cases}$$

这里取定 $a_1 = 1.35 \times 10^{-16} \text{cm}^2$, $b_1 = 150 \text{cm}^{-1}$, $N_0 = 1.4 \times 10^{18} \text{cm}^{-3}$, 通过取不同的 a_2 值达到改变增益区和吸收区的 $g(N)$ 斜率的比值的目的.

取 $R(N) = BN^2$, $P_1 = 0$, 按文¹⁾中取定各参数值, 由 (19), (20) 式可算得第二不稳定段和第三不稳定支, 并标在光功率曲线图 1 上. 我们已证明光功率曲线的斜率 $\frac{dS_0}{dP_1}$

$\frac{v_5 v_3 [7]}{W_3}$, 由于 v_5 和 v_3 恒为正值, 因此当光功率曲线进入第三不稳定支后斜率由正变负, 这就导致在 P_1 的一定范围内对应于同一个 P_1 值 S_0 有三个解, 其中两个是稳定解, 一个是不稳定解, 即使得双稳现象出现. 由于稳态方程解的连续性, 要产生两个稳定解这第三个不稳定解是必须存在的, 因此双稳现象从本质上来说是速率方程不稳定性的一种反映. 由于稳定性第三条件与双稳的产生直接相关, 所以可以把它称为双稳条件.

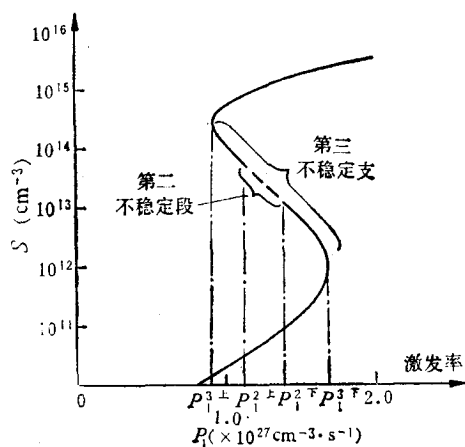


图 1

四、稳定性第二条件是自脉动条件

由于稳定性第二条件并不与光功率曲线的斜率直接相关, 因而第二不稳定段(即光功率曲线上不满足第二稳定性条件的部分)既可能落在负斜率区内, 又可能落在正斜率区内(见图 1), 这就对器件特性产生了与第三稳定性条件不同的影响.

计算表明, 光功率曲线上第二不稳定段所处的位置与 a_2 的取值(即吸收区 g 的斜

1) 黄熙, 私人通信.

率)以及 P_2 的数值(即吸收区的电注入)有极大的关系,因此下面我们按照 a_2 的不同取值范围,在 P_2 - P_1 图上作出 P_1^{3F} 线, $P_1^{3\pm}$ 线, $P_1^{2\pm}$ 线(P_1^{3F} 和 $P_1^{3\pm}$ 分别对应于光功率曲线上第三不稳定支的下,上端点, $P_1^{2\pm}$ 是第二不稳定段的上端点,由于第二不稳定段的下端点一般处于第三不稳定支内,对器件的性能无特殊影响,所以不再画出),同时辅以光功率曲线图和瞬态特性图,突出指出稳定性第二条件与器件特性的关系。

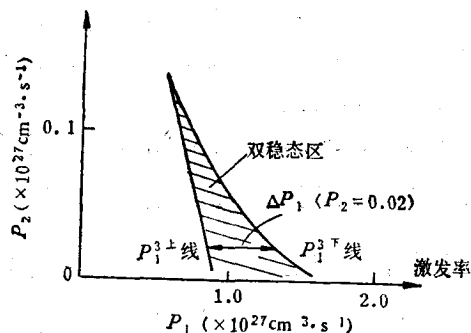


图2 $a_2 = 2.35 \times 10^{-16} \text{cm}^2$ 的 P_2 - P_1 图

(1) 当 $a_2 < 2.5 \times 10^{-16} \text{cm}^2$ 时,光功率曲线上所有的点都满足第二稳定性条件,所以在图2中只能画出 $P_1^{2\pm}$ 线和 P_1^{3F} 线,而且 $P_1^{2\pm}$ 和 P_1^{3F} 线之间的水平距离即是相应于不同 P_2 取值的双稳区宽度 ΔP_1 ,这是具有正常双稳态特性的情况, $P_1^{2\pm}$ 线和 P_1^{3F} 线之间的阴影部分即为双稳区。由图还可看出,随着 P_2 的增加 ΔP_1 逐渐减小,当 P_2 达到一定值之后不再具有双稳现象存在。

(2) 当 $2.5 \times 10^{-16} \text{cm}^2 < a_2 < 4.0 \times 10^{-16} \text{cm}^2$ 时,光功率曲线上有一部分点不满足第二稳定性条件,但是两 endpoints 的位置与 P_2 的大小有关系,图3(a)给的是相应于 $a_2 = 3.5 \times 10^{-16} \text{cm}^2$ 时的 P_2 - P_1 图,由图3(a)可见,当 $P_2 < 0.06$ 时,由于第二不稳定段(如图3(b)中右边的相应于 $P_2 = 0.04$ 的光功率曲线上虚线所示的部分)完全落入第三不稳定支内,

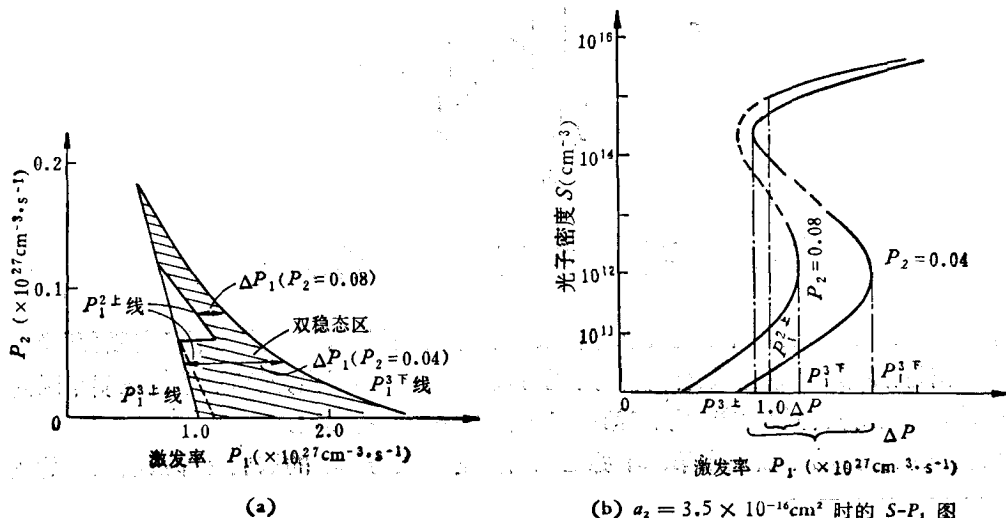
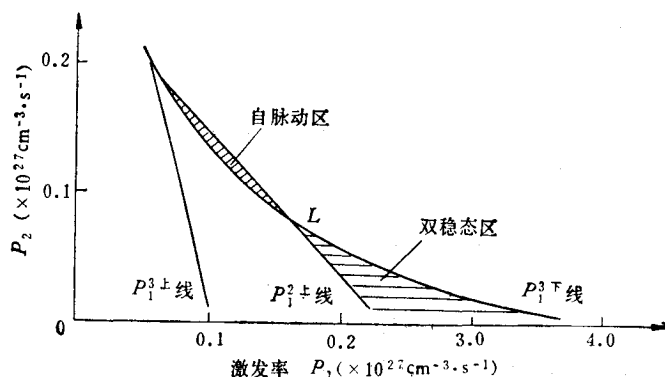


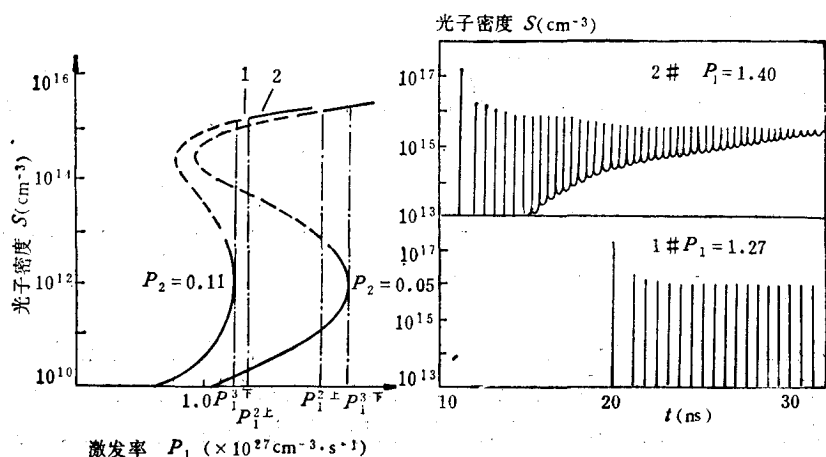
图3

因而这时器件仍表现为双稳特性,而且仍有 $\Delta P_1 = P_1^{3F} - P_1^{3L}$, 即仍然表现为正常双稳特性。但值得注意的是,当 $P_2 > 0.06$ 时,第二不稳定段的上端点 P_1^{3L} 已上延出第三不稳定支之外,只是因为这时 P_1^{3L} 仍然小于 P_1^{3F} , 器件仍表现为双稳特性,这个情况相应于图 3 (b) 右边的曲线 ($P_2 = 0.08$), 由于这时双稳区宽度 ΔP_1 变为 $P_1^{3F} - P_1^{3L}$, 其值比 $P_1^{3F} - P_1^{2L}$ 要小,因此说这时第二稳定性条件起到减小双稳区宽度的作用。

(3) 当 $a_2 > 4.0 \times 10^{-16} \text{cm}^2$ 时,第二不稳定段的上端点 P_1^{3L} 总是上延出第三不稳定支之外,当 P_2 较小时, P_1^{3L} 小于 P_1^{3F} , 这时器件仍表现为双稳特性,其双稳区宽度 $\Delta P_1 = P_1^{3F} - P_1^{3L}$, 由图 4(a) 可见,这时有 $(P_1^{3F} - P_1^{3L}) \ll (P_1^{3F} - P_1^{2L})$, 由此可见,当 g 函数非线性增大时,由于第二稳定性条件的影响,双稳激光器的双稳区宽度大为缩小。而且由图中可以看出随着 P_2 的增大,双稳区的宽度越来越窄,但要注意它并不是因为 P_1^{3L} 靠近 P_1^{3F} 引起的,而是因为 P_1^{2L} 越来越靠近 P_1^{3F} 的缘故。当 $P_2 = 0.075$ 时 (即图 4(a) 的 L 点处), $P_1^{2L} = P_1^{3F}$, 这是双稳临界条件的情况,这时在光功率特性上观察不到双稳特性,但可观察到光功率曲线的间断性。在 $P_2 = 0.075 - 0.19$ 范围内, $P_1^{2L} > P_1^{3F}$, 如图 4 (b) 中的 $P_2 = 0.11$ 线所示,在 $P_1^{3F} - P_1^{2L}$ 区域内稳态速率方程无稳定解,图 4(c) 中分别



(a) $a_2 = 4.5 \times 10^{-16} \text{cm}^2$ 时的 $P_2 - P_1$ 图



(b) $a_2 = 4.5 \times 10^{-16} \text{cm}^2$ 时的 $S - P_1$ 图

(c) 对应于 1, 2 点的瞬态过程图

图 4

给出对应于该区域内、外的 1 和 2 两点的瞬态解,很明显在这一区域内器件将产生自脉动,由此可见自脉动的产生与稳定性第二条件直接相关,所以在一定意义上可以称稳定性第二条件是自脉动条件。

五、双稳与自脉动的区别和联系

由图 4(b) 可以看出,当自脉动条件成立时,光功率曲线上的负斜率区仍然存在,只是被掩盖而反映不出来而已。当自发发射率 R 和增益系数 g 是电子密度的线性函数时,由于速率方程已退化为二次代数方程,不可能产生双稳态^[7],自脉动要求 g 的非线性程度更高,自然这时更不可能产生,因此说双稳和自脉动都是“三次”非线性现象。

从小信号方程解的一般形态的角度,可以进一步讨论双稳态和自脉动的区别和联系,为此设 $\Delta N_1 = A_1 e^{\lambda t}$, $\Delta N_2 = A_2 e^{\lambda t}$, $\Delta S = A_3 e^{\lambda t}$ 并代入小信号方程组 (4)–(6), 可得其特征方程为

$$\lambda^3 + \omega_1 \lambda^2 + \omega_2 \lambda + \omega_3 = 0, \quad (22)$$

式中 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 表式同前 (15)–(17) 式。

不失一般性我们可以把这个三次代数方程的根写成下列的形式: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b + ic$, $\lambda_3 = b - ic$. 对应这三个根的原小信号方程解的物理意义是 λ_1 对应的是单调衰减(或上升)解 Ae^{at} , λ_2 和 λ_3 对应的是振荡衰减(或上升)解 $Ae^{bt} \sin(ct)$ 和 $Ae^{bt} \cos(ct)$.

由三次代数方程的根与系数的关系得

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -(a + 2b), \\ \omega_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = 2ab + b^2 + c^2, \\ \omega_3 &= -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -a(b^2 + c^2). \end{aligned}$$

于是可以将稳定性三条件 (18)–(20) 式重写为下列的形式:

$$W_1 = \omega_1 = -(a + 2b) > 0, \quad (23)$$

$$W_2 = \omega_1 \omega_2 - \omega_3 = -2b[a(a + 2b) + b^2 + c^2] > 0, \quad (24)$$

$$W_3 = \omega_3 = -a(b^2 + c^2) > 0. \quad (25)$$

由于双稳的情况对应于 (25) 式不成立,即要求 $a > 0$, 也就是说光功率曲线上负斜率区中的解对应于小信号方程的单调上升解,显然这个解是不稳定的。这时 (24) 式的符号则不确定,这实际上反映第二不稳定段与第三不稳定支是否重迭的问题: 重迭部分 (24) 式不成立,不重迭部分 (24) 式成立。

由于自脉动的情况相应于 (24) 式不成立,在 (23), (25) 式成立下,它要求 $b > 0$, 也就是说自脉动对应于小信号方程必定有两个振荡上升解,很显然这时系统也是不稳定的。

总之,双稳激光器的双稳和自脉动现象的起因在于不稳定性,但它们相应的不稳定条件不同,双稳与光功率曲线出现负斜率的区域相对应,这时小信号分析方程有单调上升解,自脉动则与无稳定解的区域相对应,这时小信号分析方程有振荡上升解。另外两者都属于“三次”非线性现象,但是要在 g 达到一定的非线性时才可能产生自脉动。

参 考 文 献

- [1] G. J. Lasher, *Solid-State Electron.*, 7(1964), 707.
- [2] N. G. Basov, *IEEE J.*, QE-4 (1968), 855
- [3] T. P. Lee and R. H. R. Roldon, *IEEE J.*, QE-6 (1970), 339.
- [4] H. Kawaguchi, *IEEE Proc.*, 129 (1982), 141.
- [5] Ch. Harder, K. Y. Lau and A. Yariv, *IEEE J.*, QE-18 (1982), 1351.
- [6] 王启明, 通信学报, 6(1985), 65.
- [7] 王守武、王启明、林世鸣, 半导体学报, 待发表.
- [8] L. A. Lugiato, P. Mandel, S. T. Dembinski and A. Kossakowski, *Physical Review A*, 18 (1978), 238.

STUDY OF THE INSTABILITY OF BISTABLE
INJECTION LASERS

WANG SHOU-WU WANG QI-MING LIN SHI-MING

(Institute of Semiconductors, Academia Sinica)

ABSTRACT

The theory of instability for non-linear differential equations is applied to the rate equations of a bistable laser. It is found that there are three conditions have to be fulfilled in order to make the system stable. The first condition is automatically fulfilled for ordinary bistable lasers. The second and third conditions are related to self-pulsation and bistable characteristics of the laser respectively. It has been shown that if the third condition is not fulfilled in certain region, the linearized rate equation for small-signal will have a monotonously increasing solution in that region. This means that the light power output curve has a negative slope region, which would result in bistable character. On the other hand, if the second condition is not fulfilled, the linearized rate equation for small-signal will have enhanced oscillating solutions. This means that the laser will self-oscillate as long as the third condition is fulfilled in that region. Besides, it is also shown that both the self-pulsation and the bistable behaviours of the laser are closely related to the non-linearity of $g(N)$ function, which is the necessary condition for having a linearized rate equation of third order.