

# 相干三能级 J-C 模型的解析解

李孝申<sup>1)</sup> 彭跃南

(江西师范大学物理系)

1985 年 1 月 24 日收到

## 提 要

研究了初始处于共上能级的三能级原子与两个初始相干辐射场的相互作用,得到了原子能级算符及光子数平均值的解析近似解,给出衰变、恢复期及初振荡周期,并和计算机数值计算结果进行了比较,两者符合较好.

## 一、引 言

文献 [1] 和 [2] 曾分别提出了共上能级三能级和  $N$  能级 Jaynes-Cummings (简称为 J-C) 模型. 文献 [1] 研究了初始处于下能级的原子其能级算符及光子数的平均值均以二重级数形式表出,分析上述物理量随时间的演变规律不得不求助于计算机的数值求和. 关于一重级数的求和问题曾出现在二能级 J-C 模型中,该问题已被 Eberly 等人<sup>[3]</sup>用鞍点近似法解决. 本文中将研究初始于共上能级的三能级原子与两相干辐射场的相互作用,利用泊松分布的性质及二元泰勒级数展开方法,得到其中二重级数的解析近似式,从而清楚、方便地分析了系统的量子效应.

## 二、近似解析解

这里采用与文献 [1] 相同的三能级原子模型,使用的符号也与该文完全相同. 当原子初始处于共上能级  $|a\rangle$  时,总密度算符为

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_F(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

考虑辐射场模 1 和模 2 分别处于相干态  $|\alpha\rangle$  和  $|\beta\rangle$  (分别具有平均光子数  $\bar{n}_1$  和  $\bar{n}_2$ ), 用文献 [1] 的方法与步骤便可求得原子能级算符的系综平均值为

$$\langle \hat{S}_1(t) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2} \cos(2\sqrt{\mu}t) P(n_1, n_2), \quad (2)$$

$$\langle \hat{S}_3(t) \rangle = \frac{1}{2} \lambda_1^2 \sum_{n_1, n_2} (n_1 + 1) [1 - \cos(2\sqrt{\mu}t)] P(n_1, n_2) / \mu, \quad (3)$$

<sup>1)</sup> 现在南京大学物理系.

$$\langle \hat{S}_0(t) \rangle = 1 - \langle \hat{S}_1(t) \rangle - \langle \hat{S}_2(t) \rangle, \quad (4)$$

其中

$$\mu = \lambda_1^2(n_1 + 1) + \lambda_2^2(n_2 + 1), \quad (5)$$

二维泊松分布权重为

$$P(n_1, n_2) = \bar{n}_1^{n_1} \cdot \bar{n}_2^{n_2} \exp[-(\bar{n}_1 + \bar{n}_2)] / (n_1! n_2!). \quad (6)$$

当  $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \gg 1$  时, 泊松分布在  $(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$  处将形成很陡的峰<sup>[4]</sup>, (2)–(4)式中求和的贡献主要来自区域:  $\bar{n}_i + \sqrt{\bar{n}_i} > n_i > \bar{n}_i - \sqrt{\bar{n}_i}$  ( $i = 1, 2$ ). 因此, 类同于文献[4], (3)式中可取  $(n_1 + 1)/\mu \approx (\bar{n}_1 + 1)/\bar{\mu}$ , 这里

$$\bar{\mu} = \lambda_1^2(\bar{n}_1 + 1) + \lambda_2^2(\bar{n}_2 + 1). \quad (5')$$

同时, 可把  $\sqrt{\mu}$  围绕点  $(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$  作泰勒展开, 得

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} &= \sqrt{\bar{\mu}} + [\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1) + \lambda_2^2(n_2 - \bar{n}_2)] / (2\sqrt{\bar{\mu}}) + \cdots \\ &= \sqrt{\bar{\mu}} \{1 + [\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1) + \lambda_2^2(n_2 - \bar{n}_2)] / (2\bar{\mu}) + \cdots\}. \end{aligned} \quad (7)$$

注意到  $|n_i - \bar{n}_i| < \sqrt{\bar{n}_i}$ , 即  $|n_i - \bar{n}_i|/\bar{n}_i < 1/\sqrt{\bar{n}_i} \ll 1$  ( $i = 1, 2$ ), 因此在(7)式的大括号中仅保留至第二项已足够精确. 这样由(7)式便可求得

$$\begin{aligned} \cos(2\sqrt{\mu}t) &\approx \cos(2\sqrt{\bar{\mu}}t) \cdot \cos\{[\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1) + \lambda_2^2(n_2 - \bar{n}_2)]t/\sqrt{\bar{\mu}}\} \\ &\quad - \sin(2\sqrt{\bar{\mu}}t) \cdot \sin\{[\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1) + \lambda_2^2(n_2 - \bar{n}_2)]t/\sqrt{\bar{\mu}}\} \\ &\approx \cos(2\sqrt{\bar{\mu}}t) \cdot \cos\{[\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1) + \lambda_2^2(n_2 - \bar{n}_2)]t/\sqrt{\bar{\mu}}\}. \end{aligned} \quad (8)$$

上述过程中之所以可以略去正弦项是因为

$$\begin{aligned} &\sin\{[\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1) + \lambda_2^2(n_2 - \bar{n}_2)]t/\sqrt{\bar{\mu}}\} \\ &= \sin[\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1)t/\sqrt{\bar{\mu}}] \cdot \cos[\lambda_2^2(n_2 - \bar{n}_2)t/\sqrt{\bar{\mu}}] \\ &\quad + \cos[\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1)t/\sqrt{\bar{\mu}}] \cdot \sin[\lambda_2^2(n_2 - \bar{n}_2)t/\sqrt{\bar{\mu}}], \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\sin[\lambda_1^2(n_1 - \bar{n}_1)t/\sqrt{\bar{\mu}}]$  是  $n_1 - \bar{n}_1$  的奇函数, 对求和贡献为零.

把(8)式代入(2)–(4)式中便可求得解析式

$$\langle \hat{S}_1(t) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{\bar{\mu}}t) \cdot \cos\phi(t) \cdot \exp[-\phi(t)], \quad (10)$$

$$\langle \hat{S}_2(t) \rangle = [\lambda_1^2(\bar{n}_1 + 1)/(2\bar{\mu})] \{1 - \cos(2\sqrt{\bar{\mu}}t) \cdot \cos\phi(t) \cdot \exp[-\phi(t)]\}, \quad (11)$$

$$\langle \hat{S}_0(t) \rangle = [\lambda_2^2(\bar{n}_2 + 1)/(2\bar{\mu})] \{1 - \cos(2\sqrt{\bar{\mu}}t) \cdot \cos\phi(t) \cdot \exp[-\phi(t)]\}, \quad (12)$$

其中

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^2 [\bar{n}_i \sin(\lambda_i^2 t / \sqrt{\bar{\mu}}) - \lambda_i^2 \bar{n}_i t / \sqrt{\bar{\mu}}], \quad (13)$$

$$\phi(t) = 2 \sum_{i=1}^2 \bar{n}_i \sin^2(\lambda_i^2 t / 2\sqrt{\bar{\mu}}). \quad (14)$$

由(10)–(12)式可知,  $\langle \hat{S}_1(t) \rangle$  将围绕  $\frac{1}{2}$ ,  $\langle \hat{S}_2(t) \rangle$  将围绕  $\lambda_1^2(\bar{n}_1 + 1)/2\bar{\mu}$ ,  $\langle \hat{S}_0(t) \rangle$  围绕  $\lambda_2^2(\bar{n}_2 + 1)/2\bar{\mu}$  作振荡, 这些振荡表现为周期性的衰减和恢复. 为了便于讨论, 取  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , 则有

$$\phi(t) = (\bar{n}_1 + \bar{n}_2) [\sin(\lambda^2 t / \sqrt{\bar{\mu}}) - \lambda^2 t / \sqrt{\bar{\mu}}], \quad (13')$$

$$\phi(t) = 2(\bar{n}_1 + \bar{n}_2) \sin^2(\lambda^2 t / 2\sqrt{\bar{\mu}}) \quad (14')$$

因而初振荡周期  $t_0$ , 衰变期  $t_C$  和恢复期  $t_R$ <sup>[5]</sup> 分别为

$$t_0 \approx \pi / \sqrt{\bar{\mu}}, \quad t_C \approx \sqrt{2} / \lambda, \quad t_R \approx 2\pi \sqrt{\bar{\mu}} / \lambda^2. \quad (15)$$

由(15)式可知,  $\bar{n}_1$  或  $\bar{n}_2$  的增大将导致初振荡频率增高, 恢复期变长, 但不影响衰变期. 这些与文献[4]的数值结果相比具有相同的趋势.

同理可求得辐射场的平均光子数为<sup>[1]</sup>

$$\langle \hat{n}_1(t) \rangle = \bar{n}_1 + \langle \hat{S}_5(t) \rangle, \quad (16)$$

$$\langle \hat{n}_2(t) \rangle = \bar{n}_2 + \langle \hat{S}_9(t) \rangle. \quad (17)$$

上两式表明, 模 1 或模 2 在  $t > 0$  后由于原子经  $|a\rangle$  向  $|b_1\rangle$  或  $|b_2\rangle$  跃迁所作的受激发射而增强. 此外, 结合(11), (12), (16)和(17)式可知, 模 1 的初强度  $\bar{n}_1$  增大将导致  $\langle \hat{S}_5(t) \rangle$  曲线向上平移,  $\langle \hat{S}_9(t) \rangle$  曲线向下平移, 同时使  $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$  增大但  $\langle \hat{n}_2(t) \rangle$  减小. 反过来,  $\bar{n}_2$  增大却起着与上述相反的效果. 这些都反映了两种跃迁之间的竞争, 与文献[1]中的情况显然不同. 另外, 由于  $\langle \hat{S}_5(t) \rangle$  与  $\langle \hat{S}_9(t) \rangle$  有相同的振荡相位, 这说明这里不存在双光子跃迁, 而仅存在单光子受激辐射, 这也与文献[1]中的情况不同.

### 三、结 论

至此本文已讨论了起始于共上能级的三能级原子与双模辐射场的相互作用, 所得结论(受激单光子跃迁及竞争现象等)与文献[1]所报道的起始于下能级情况的不同. 更重要的是, 这里已用简单方法导出了在  $\bar{n}_1$  和  $\bar{n}_2$  远大于 1 情况下(这与实际相符)的解析式, 它们明晰地显示了系统的量子效应.

为了说明近似解析式与原式符合的程度, 我们不妨在  $\bar{n}_1$  和  $\bar{n}_2$  不很大的情况下, 对原式(2)和(3)及近似式(10)和(11)分别进行数值计算并绘出曲线加以比较, 见图 1. 图中(a), (b), (c)和(d)分别对应于(10), (2), (11)和(3)式, 其中已取  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . 从图 1 中可看出,

尽管平均初光子数不很大, 两者已有较好的符合. 这说明本文的近似方法既简便又合理. 此外, 用此近似方法我们还曾对文献[1]中的各式进行过处理, 所得的主要结论(衰变、恢复期及振荡周期的变化趋势)与该文中通过数值求和所得的相符, 尽管该文中所取的  $\bar{n}_1$  和

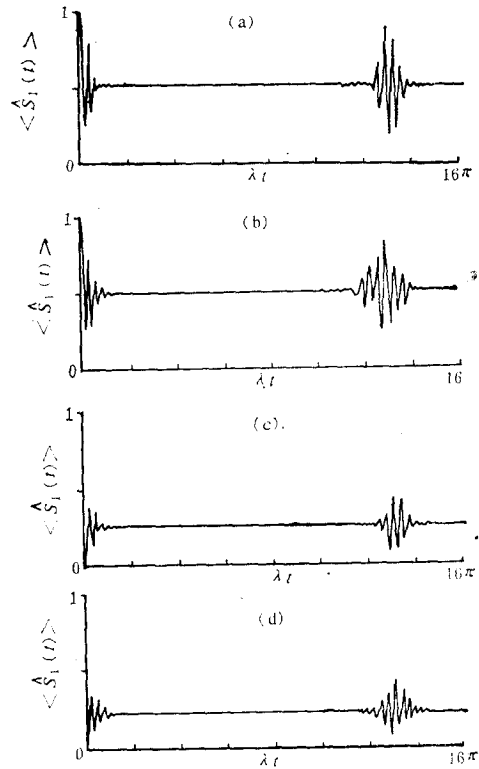


图 1 (a)~(d)  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 20$

$\bar{n}_2$  更小。这便进一步表明了本文的近似方法是有效的。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Xiao-shen Li, Nian-yu Bei, *Phys. Lett.*, **101A**(1984), 169.
- [ 2 ] Xiao-shen Li *et al.*, *Physica (A)*, (1985), to be published.
- [ 3 ] J. H. Eberly *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1323.
- [ 4 ] H-I. Yoo *et al.*, *J. Phys.*, **A14**(1981), 1383.
- [ 5 ] B. Buck, C. V. Sukumar, *Phys. Lett.*, **81A**(1981), 132.

## ANALYTIC SOLUTIONS FOR COHERENT THREE-LEVEL J-C MODEL

LI XIAO-SHEN    PENG YUE-NAN

(Department of Physics, Teachers University of Jiangxi, Nanchang)

### ABSTRACT

The interaction of a three-level atom initially in the common upper state with two initially coherent fields is investigated. Approximate analytic solutions for mean atomic level occupations and photon numbers are given, which exhibit collapse, revival and initial oscillation period explicitly. These are compared with the results of numerical calculation, they agree satisfactorily.