

一类延时系统的动力学行为研究

赵 勇¹⁾ 霍 裕 平

(中国科学院等离子体物理研究所)

1985年5月18日收到

提 要

本文利用稳定性分析方法得到了一维延时系统定态稳定的充要条件。为研究系统的分岔和混沌行为,在长延时极限下对延时的倒数 T_R^{-1} 作渐近展开,得到的零级近似就是通常的一维映象,而 T_R^{-1} 的一级效应使系统运动的周期延长。更为有趣的现象是由更高级项带来的, T_R^{-1} 项导致系统在每个分岔点出现滞迴过程(某种双稳现象);而 T_R^{-1} 项影响了系统的倍周期分岔行为:即分岔前后的周期之比并不是严格的二倍。高级效应还表明,在混沌带的合并点存在着不稳定窗口,并由此带来一些锁模现象。

一、引 言

在能够表现出分岔和混沌行为的动力学系统中,一类延时微分方程系统逐渐引起了人们的注意^[1-3]。作为这类系统的物理背景主要有光学双稳态系统^[2]、声电混合系统^[3]以及神经生物学和生态学^[4]。这种延时微分系统仅比一维映象多了一个微分项,与一维映象的联系甚为密切。由于这个系统的时间演化行为由差分过程和微分过程所共同制约,因此有可能带来动力学上的新现象。Ikeda^[2], Gibbs^[5]等人关于典型的一维延时系统——光学双稳态系统的研究结果已经初步展示出:一维延时系统比一维映象具有更为复杂丰富的动力学性质。然而他们的工作仅仅限于对特定系统在极其有限参数范围内的数值模拟和实验观测,并没有揭示出一维延时微分系统中更普遍、更独特的性质,因此进一步探求这个系统中的共性和特征将对认识光学湍流、声学湍流以及更广泛地深入研究混沌、分岔行为具有一定的意义。

本文正是本着这个目的利用稳定性分析方法和微扰方法对一维延时微分系统的动力学行为作了较为系统的分析。研究结果表明,系统定态的稳定性密切依赖于延时的长短以及定态失稳系数(本文定义的一个物理参量)的大小;在长延时极限下用延时的倒数 T_R^{-1} 作渐近展开,得到的各阶都有明确的物理意义,其高级效应带来了不同于一维映象的新结果。

1) 现为中国科学技术大学博士生。

二、极限延时下的行为

出现在上述各文献中的方程都可以归结为如下的形式:

$$\tau \frac{d}{dt} \phi(t) + \phi(t) = \mu f[\phi(t - t_R)]. \quad (1)$$

其中 τ 是系统内部的特征响应时间, t_R 是延迟时间, μ 是非负的分岔参数, ϕ 是非负的系统状态函数, $f(\phi)$ 则是能表现出倍周期分岔和混沌行为的单峰或多峰映象中的非线性函数, 这里令其为非负的.

系统 (1) 式有两个特征时间 τ 和 t_R , 在一定条件下, 这两个特征时间的差别可以导致完全不同的后果. 特别典型的是两种极限延时下的退化情形.

1. 极长延时情形

方程 (1) 经过标度变换 $t \rightarrow t/t_R$,

$$T_R^{-1} \frac{d}{dt} \phi(t) + \phi(t) = \mu f[\phi(t - 1)] \quad (2)$$

其中 $T_R = t_R/\tau$.

当取极长延时 $T_R \rightarrow \infty$ 时, 则 (2) 式退化为

$$\phi(t) = \mu f[\phi(t - 1)], \quad (3)$$

这正是一维映象. 按照我们对 $f(\phi)$ 的定义以及由一维映象的性质^[6], 可知这是一个耗散性动力学系统, 具有倍周期分岔和混沌行为等等. 可见极长延时下系统 (1) 式成为一个典型的耗散性系统.

2. 极短延时情形

方程 (1) 经过标度变换 $t \rightarrow t/\tau$,

$$\frac{d}{dt} \phi(t) + \phi(t) = \mu f[\phi(t - T_R)]. \quad (4)$$

取极短延时极限 $T_R \rightarrow 0$, (4) 式退化为

$$\frac{d}{dt} \phi(t) + \phi(t) = \mu f[\phi(t)]. \quad (5)$$

这是一阶自治非线性常微分方程. 我们知道, 这种系统是完全的确定论系统, 不可能出现动力学随机性.

从上面的分析可以看出, 两种极限延时情形对应着两种性质完全不同的典型的动力学系统. 一般延时情形下, 系统受着两种制约: 一种是以差分形式(来源于延时的存在)表现出的耗散性; 另一种是以微分形式表现出的可积性.

三、稳定性分析

1. 定态失稳系数

在对系统 (3) 式的稳定性描写中, 我们引入失稳系数的概念. 如果视 μ 为输入强度,

ϕ_s 为定态输出, 则定态失稳系数定义为: 定态输出下的差分增益与其相应的微分增益的比值, 即

$$I_s = \frac{\phi_s / \mu}{\frac{d\phi_s}{d\mu}} \quad (6)$$

对系统 (3) 式, 其定态满足的方程为

$$\phi_s = \mu f(\phi_s), \quad (7)$$

这样可以把失稳系数 I_s 表示成

$$I_s = 1 - \mu f'[\phi_s], \quad (8)$$

其中 $f'[\phi_s] = \frac{\delta}{\delta\phi} f[\phi]|_{\phi=\phi_s}$.

为了处理问题方便, 我们从形式上将定态失稳系数推广到一般状态. 定义 μ 输入时, 系统的失稳系数为

$$I(\mu) = 1 - \mu \frac{\delta}{\delta\phi} f[\phi]. \quad (9)$$

当 $\phi = \phi_s$ 时, $I(\mu)$ 便回到 I_s .

首先利用定态失稳系数来描写 (3) 式的稳定性. 根据不动点理论, 其定态 ϕ_s 的失稳条件为

$$|\mu f'(\phi_s)| \geq 1, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} I_s \geq 2, \text{ 或} \\ I_s \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

从 I_s 的定义式 (6) 知, $I_s < 0$ 意味着 $\frac{d\phi_s}{d\mu} < 0$, 这是非物理态. $I_s = 0$ 则意味着 $\frac{d\phi_s}{d\mu} \rightarrow \infty$ (这里不讨论平庸定态 $\phi_s \equiv 0$), 这表明在 $I_s = 0$ 的点将发生定态跃变. 可见在一定条件下, 系统 (1) 式有可能出现定态突变, 光学双稳态就是一例.

对于具有物理意义的定态 $I_s > 0$, 当 $0 < I_s < 2$ 时, 定态是线性稳定的; 当 $I_s \geq 2$ 后, 定态开始失稳并随 I_s 的增大而逐渐远离定态. 从这个意义上说, I_s 相当于非平衡性的一种量度, 它与分岔参数的关系可以是单调的, 也可以是非单调的 (由 $f(\phi)$ 的具体形式决定). 当 $I_s - \mu$ 关系非单调时, I_s 在 $\tilde{\mu}$, $\tilde{\phi}_s$ 处取极大值, 即

$$I_{sm} = 1 - \tilde{\mu} f'[\tilde{\phi}_s]. \quad (11)$$

$\tilde{\mu}$, $\tilde{\phi}_s$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{\mu} = f'(\tilde{\phi}_s) / \{f'^2(\tilde{\phi}_s) - f''(\tilde{\phi}_s)f(\tilde{\phi}_s)\} \\ \tilde{\phi}_s = \tilde{\mu} f(\tilde{\phi}_s) \\ [f''(\tilde{\phi}_s)/f(\tilde{\phi}_s)] + [f'''(\tilde{\phi}_s)/f'(\tilde{\phi}_s)] - 2[f''(\tilde{\phi}_s)/f(\tilde{\phi}_s)]^2 > 0. \end{cases} \quad (12)$$

2. 线性稳定性分析

系统 (1) 式在小涨落下的线性化方程为

$$\tau \frac{d}{dt} \Delta\phi(t) + \Delta\phi(t) = \mu f'[\phi_s] \Delta\phi(t - t_R), \quad (13)$$

其中 $\Delta\phi(t)$ 是对定态 ϕ_i 的小涨落。取 $\Delta\phi(t) \sim e^{\xi t}$ 得到关于 ξ 的特征方程为

$$(\tau\xi + 1)e^{I_R\xi} = \mu'_i(\phi_i). \quad (14)$$

令 $\xi = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, 且记 $\bar{\xi} = \tau\xi = \bar{\alpha} \pm i\bar{\beta}$, 经过适当整理并利用 (8) 式, 得

$$\begin{cases} -T_R\bar{\beta} \operatorname{ctg} \bar{\beta}T_R = (1 + \bar{\alpha})T_R \\ \sin \bar{\beta}T_R / \bar{\beta}T_R = e^{T_R\bar{\alpha}} / [T_R(I_i - 1)], \end{cases} \quad (15)$$

其中 $T_R = t_R/\tau$. 如果系统继续离开定态, 那么一定有 $\bar{\alpha} \geq 0$, 从而得到

$$T_R\bar{\beta} \operatorname{ctg} T_R\bar{\beta} \geq T_R \geq 0, \quad (16a)$$

$$\sin T_R\bar{\beta} / T_R\bar{\beta} \geq 1/[T_R(I_i - 1)] \geq 0. \quad (16b)$$

由此得到 $T_R\bar{\beta}$ 的取值范围是

$$\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \leq T_R\bar{\beta}_n \leq (2n + 1)\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (17)$$

可见一般情形下瞬态行为是一个多模振荡, $n = 0, 1, 2, \dots$ 分别对应各阶振荡模式, 第 n 个模的振荡周期 T_n 为

$$2t_R/(2n + 1) \leq T_n \leq 4t_R/(4n + 1). \quad (18)$$

由此得到各阶模起振的条件为

$$I_i^{(n)} \geq 1 + 1/|\cos T_R\bar{\beta}_n| \geq 2. \quad (19)$$

这里得到的阈条件与 (10) 式相一致。

当满足基本的阈条件后, 能否激发出持续振荡与模的阶数 n 、延时 T_R 以及 I_i 都有关。对于给定的 $I_i > 2$, T_R 每超过一个定值 $T_R^{(n)}$ 时都将有一对模式被激发。 $T_R^{(n)}$ 为

$$T_R^{(n)} = \left[(2n + 1)\pi - \arccos \left(\frac{1}{I_i - 1} \right) \right] / \left[I_i \left(1 - \frac{2}{I_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots.$$

$T_R^{(n)}-I_i$ 关系如图 1 所示。从图 1 中可以看出各阶模失稳对 T_R, I_i 的要求。对固定

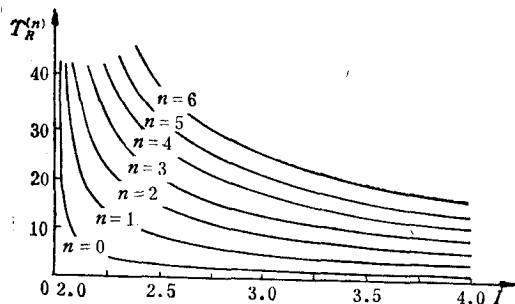


图 1

$n = 0, 1, 2, \dots$ 分别对应各阶模式

的 T_R, I_i 值, n 小的模失稳在先。能被激发的最高阶模可以从 (20) 式中求得。当失稳模式足够多时, 可以近似得到最高失稳模阶数 n_M 与 T_R, I_i 的关系为

$$n_M = (I_i - 1)T_R/2\pi - \frac{1}{4}.$$

从这个结果中可以看出, n_M 基本上是随 T_R, I_i 线性增加的。当系统存在最大值 (或极大值) I_{iM} 时, 在相当宽的参数范围内 n_M 仅仅由延时决定。光学

双稳系统中在反常锁模^[1]区中出现的高阶模式对 T_R 的依赖关系^[1]实质上是第一双稳区中 n_M 与 T_R 的关系。

前面我们看到, 一般延时下是多模振荡, 但极限延时下的振荡行为却有其个性。首先看极长延时情形。

当 $T_R \rightarrow \infty$ 时, 各阶模式的振荡周期为

$$T_n = 2t_R / (2n + 1) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

基模的振荡周期为 $T_0 = 2t_R$. 此时各阶模的起振条件均为 $I_s > 2$. 这种所有无穷多个模式同时被激发的结论与能量要求不符合. 实际上, 由于

$$\frac{d}{d(T_R \beta_n)} e^{T_R \beta_n} \sim -T_R, \quad (22)$$

即各阶模式激发的速率随模数增高以 T_R 的一次方下降, 当 $T_R \rightarrow \infty$ 时, 除基模外, 其他模式自行退化, 系统自动锁模到基模上. 这个结论与 (3) 式的数值模拟是相一致的.

在极短延时下, $T_R \rightarrow 0$, 各阶模式的振荡周期为

$$T_n = 4t_R / (4n + 1) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

各阶模式的起振条件为

$$I_s^{(n)} \geq 1 + \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi / T_R \rightarrow \infty (T_R \rightarrow 0). \quad (24)$$

这表明短延时下要激发出振荡模是很困难的, 它要求有足够大的 I_s 值.

3. 全局稳定性分析

这里我们利用 Liapounoff 稳定性理论对 $T_R < 1$ 的情形作全局稳定性分析. 定义函数

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (\phi^2 - \phi_i^2) - \mu \int_{\phi_i}^{\phi} f(\phi) d\phi. \quad (25)$$

不难证明, 当 $I_s > 0$ 时, V 是 ϕ 的正定函数, 并且, 利用 T_R 作小参数展开, 可以得到

$$\begin{aligned} -dV/dt &= \{-\phi + \mu f[\phi]\} d\phi/dt \\ &= \{\phi(t) - \mu f[\phi(t)]\}^2 + \mu \frac{\delta}{\delta \phi} f[\phi] T_R \frac{dV}{dt} + o(T_R^2) \end{aligned}$$

保留到 T_R 的一次项.

$$-dV/dt = \{\phi(t) - \mu f[\phi(t)]\}^2 / \left\{1 + T_R \mu \frac{\delta}{\delta \phi} f[\phi(t)]\right\}. \quad (26)$$

如果 $T_R < 1/|I(\mu) - 1| < 1$ 满足时, 则 $\frac{dV}{dt} < 0$, 即当 $I_s > 0$ 且

$$T_R < 1/|I(\mu) - 1| < 1$$

满足时, $V(\phi)$ 是系统 (1) 式的一个 Liapounoff 函数. 又由于系统在 $I_s > 0$, 且 $T_R < T_R^{(0)}$ 时是线性稳定的, 由 Liapounoff 全局稳定性定理^[8]可知, 当下列条件满足后, 系统 (1) 式是全局稳定的.

$$\begin{cases} I_s > 0 \\ T_R < T_{Rm} = \min\{T_R^{(0)}, 1/|I(\mu) - 1|\} < 1. \end{cases} \quad (27)$$

四、长延时下的分岔、混沌行为

长延时 $T_R \gg 1$ 情形下, 将 (2) 式化成

$$T_R^{-1} \frac{d}{dt} \phi(t) + \phi(t) = e^{-\frac{t}{T_R}} f[\phi(t)]. \quad (28)$$

其中 $e^{-\frac{d}{dt}}$ 是推迟算子. 如果视 T_R^{-1} 为小量, 则一级近似下有

$$1 + T_R^{-1} \frac{d}{dt} \simeq e^{T_R^{-1} \frac{d}{dt}}.$$

这样可把 (28) 式化为

$$\phi(t) = e^{-(T_R^{-1}+1) \frac{d}{dt}} f[\phi(t)] = f[\phi(t - (1 + T_R^{-1}))]. \quad (29)$$

这是一个以 $t_R + \tau$ 为延时的一维映象. 它可以出现的各种倍周期为 $T^{(N)} = 2^{N+1}(t_R + \tau)$, 与零级近似 (3) 式相比 (零级近似的延时为 t_R , 能出现的各种倍周期为 $2^{N+1}t_R$, $N = 0, 1, 2, \dots$ 是分岔次数), 延时增长 3τ , 相应的各周期增长了 $2^{N+1}\tau$, $N = 0, 1, 2, \dots$. 这表明一级效应使系统的运动周期延长了. 这个结果与稳定性分析的结果 (18) 式是相一致的: 除极长延时下基模的周期为 $T_0 = 2t_R$ 外, 一般情形要大于这个结果.

为了考虑 T_R^{-1} 的高阶贡献, 令变换

$$t \rightarrow t - T_R^{-1} + \frac{1}{3} \omega^2 T_R^{-3}. \quad (30)$$

代入 (2) 式并将等式左边按 T_R^{-1} 的幂次展开

$$\begin{aligned} \phi(t) - \frac{1}{2} T_R^{-2} \ddot{\phi}(t) + \frac{1}{3} T_R^{-3} [\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \dot{\phi}(t)] + o(T_R^{-4}) \\ = \mu f \left[\phi \left(t - 1 - T_R^{-1} + \frac{1}{3} \omega^2 T_R^{-3} \right) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

其中 ω 为待定参数.

如果 $\phi(t)$ 处于周期态, 最简单的情形取为以 ω 为频率的平面波. 这样在保留到 T_R^{-3} 项时有

$$\phi(t) = \mu'(\omega, T_R^{-1}) f[\phi(t - t'_R(\omega, T_R^{-1}))]. \quad (32)$$

μ' , t'_R 定义为有效分岔参数和有效延时

$$\begin{cases} \mu'(\omega, T_R^{-1}) = \mu / [1 + \omega^2 T_R^{-2} / 2] \\ t'_R(\omega, T_R^{-1}) = t_R + \tau \left(1 - \frac{1}{3} \omega^2 T_R^{-2} \right). \end{cases} \quad (33)$$

这样把系统 (2) 式在一般长延时情形化成了一维映象的形式, 从而可以利用一维映象的知识来讨论微分项的高阶影响.

1. 分岔点跃变、滞迴现象

对于形式为

$$\phi(t) = \mu f[\phi(t - t_R)]$$

的一维映象, 它可以出现的各种倍周期为

$$T^{(N)} = 2^{N+1} t_R \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

N 是分岔次数. 对于 $T^{(N)}$ 表征的周期态, 相应的分岔参数 $\mu^{(N)}$ 具有两个临界值: 一个是经过分岔进入 $T^{(N+1)}$ 状态的临界值 $\mu_+^{(N)}$, 另一个是经过合并进入 $T^{(N-1)}$ 状态的临界值 $\mu_-^{(N)}$, 并且分岔临界值大于合并临界值, 即 $\mu_+^{(N)} > \mu_-^{(N)}$. 由于一维映象在分岔点的状态变化是连续的 (如图 2(a) 所示), 因此满足

$$\mu_+^{(N-1)} = \mu_-^{(N)}, \mu_+^{(N)} = \mu_-^{(N+1)}, \quad (34)$$

即 $T^{(N)}$ 状态的分岔点与 $T^{(N+1)}$ 状态的合并点重合, 且

$$T^{(N+1)}/T^{(N)} \equiv 2,$$

即严格的倍周期分岔.

对 (1) 式表征的系统, 以上结果则不然. 首先考虑 T_R^{-2} 带来的效应. 对 (33) 式保留到 T_R^{-2} 项

$$\phi(t) = \frac{\mu}{1 + \frac{1}{2}\omega^2 T_R^{-2}} f[\phi(t - (t_R + \tau))]. \quad (35)$$

这是以 $2(t_R + \tau)$ 为基本周期的一维映象, 可以出现的各种倍周期为

$$2^{N+1}(t_R + \tau), N = 0, 1, 2, \dots$$

是分岔次数, 于是 $\omega^{(N)} = 2\pi/[2^{N+1}(t_R + \tau)]$, 有效分岔参数

$$\mu'^{(N)} = \mu^{(N)} / \{1 + \pi^2/[2^{2N+1}(T_R + 1)^2]\}. \quad (36)$$

(35) 式的一维映象形式要求 $\mu'^{(N)}$ 满足 (34) 式, 即

$$\mu_+^{(N)} / \left[1 + \frac{\pi^2}{2^{2N+1}(T_R + 1)^2}\right] = \mu_-^{(N+1)} / \left[1 + \frac{\pi^2}{2^{2N+3}(T_R + 1)^2}\right].$$

于是得到原系统的分岔参数 μ 满足方程

$$\mu_+^{(N)} - \mu_-^{(N+1)} = \frac{3\pi^2 \mu_-^{(N+1)}}{2^{N+1}(T_R + 1)^2} > 0. \quad (37)$$

这说明对延时系统, $T^{(N)}$ 状态的分岔点与 $T^{(N+1)}$ 状态的合并点并不重合, 并且 $T^{(N+1)}$ 的合并点超前于 $T^{(N)}$ 的分岔点 ($\mu_-^{(N+1)} < \mu_+^{(N)}$), 于是形成了如下的局面:

相对于一维映象的分岔过程 (图 2(a)), 延时系统中微分项的影响在 T_R^{-2} 阶项表现为: 当由低周期向高周期过渡时, 进入到高周期的状态已经超过了高周期的合并点, 出现不连续的跃变 (如图 2(b)); 当由高周期向低周期过渡时, 进入到低周期的状态还不到低周期的分岔点, 出现另一种不连续跃变 (如图 2(c)), 并且这两种跃变的临界值 $\mu_+^{(N)}$ 和

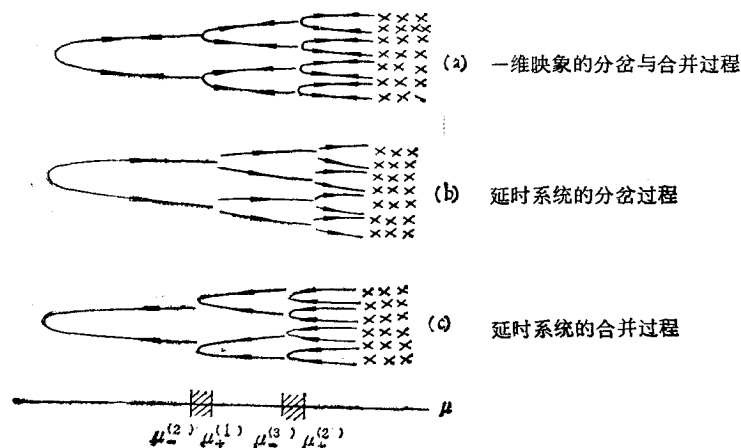


图 2

阴影区为双稳区

$\mu_-^{(N+1)}$ 都大于相应的一维映象的临界值

$$\mu_+^{(N)} > \mu_-^{(N+1)} > \mu_+^{(N)}. \quad (38)$$

这种不连续的分岔行为类似于一种滞迴过程,在每个分岔点的正、反过程并不重合;

当 μ 值处于 $\mu_-^{(N+1)}$ 与 $\mu_+^{(N)}$ 之间时,由过程的初条件不同系统可以呈现出 $T^{(N)}$ 或 $T^{(N+1)}$ 两种不同的状态(双稳现象,如图 3).

由于差值 $\mu_+^{(N)} - \mu_-^{(N+1)}$ 随

$$T_R \rightarrow \infty$$

时消失,因此图 3 中的双稳区将随 T_R 增大而变窄并左移(临界参数 $\mu_+^{(N)}$, $\mu_-^{(N+1)}$ 随 $T_R \rightarrow \infty$ 而减小),直到 $T_R \rightarrow \infty$ 时与一维映象的分岔过程重合(见图 3 中的点线).

另一方面,差值 $\mu_+^{(N)} - \mu_-^{(N+1)}$

随 N 增大而变小,因此双稳区分

岔次数增加变窄,在 $\mu^{(\infty)}$ 这一点, $\mu^{(\infty)} = \mu^{(\infty)}$, 即与一维映象重合,双稳区宽度变为零.可见收敛常数在 $N \rightarrow \infty$ 时与一维映象的结果一致.

2. “准倍”周期分岔现象

取 (33) 式到 T_R^{-3} 项为止. T_R^{-3} 项仅仅影响了延时 t_R' :

$$t_R' = t_R + \tau \left(1 - \frac{1}{3} \omega^2 T_R^{-2} \right).$$

这时系统可以出现的各种倍周期为

$$T^{(N)} = 2^{N+1} t_R' = 2^{N+1} \left[t_R + \tau \left(1 - \frac{1}{3} \omega^2 T_R^{-2} \right) \right],$$

相应的频率为

$$\omega^{(N)} = \frac{2\pi}{T^{(N)}} = \frac{\pi}{2^N \left[t_R + \tau \left(1 - \frac{1}{3} \omega^{(N)^2} T_R^{-2} \right) \right]},$$

近似求得

$$\omega^{(N)} = \frac{\pi}{2^N \left\{ t_R + \tau \left[1 - \frac{\pi^2}{3 \cdot 2^N (T_R + 1)^2} \right] \right\}}. \quad (39)$$

在第 N 个分岔点,分岔前后状态的周期之比为

$$T^{(N+1)}/T^{(N)} = \frac{\omega^{(N)}}{\omega^{(N+1)}} \approx 2 + \frac{\pi^2}{2^{2N+1} (T_R + 1)^3}. \quad (40)$$

这表明 T_R^{-3} 项影响了倍周期分岔行为: 分岔前后的周期之比并不严格地等于二倍,而是如 (40) 式表示的那样,为 $2 + s^{(N)}$,

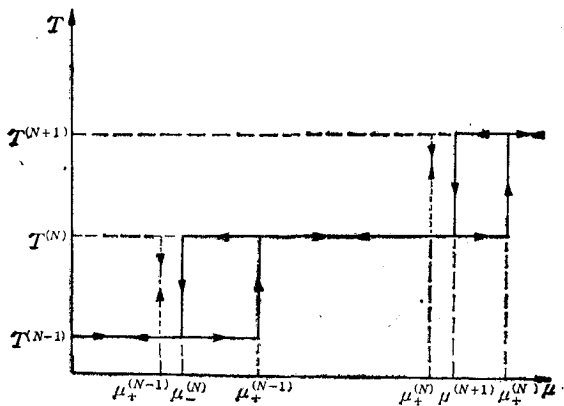


图 3 延时系统在分岔点出现的滞迴现象 点线代表一维映象在分岔点的可逆行为

$$\varepsilon^{(N)} = \frac{\pi^2}{2^{2N+1}(T_R + 1)^3}.$$

从而表现出“准倍”周期分岔行为. 由于 $\varepsilon^{(N)}$ 随 $N \rightarrow \infty$ (或 $T_R \rightarrow \infty$) 而趋于零, 因此这种“准倍”周期分岔行为随分岔次数增加而逐渐趋向倍周期分岔行为, 并随 T_R 增大而表现得越来越不明显.

3. 不稳定窗口与锁模现象

在一维映象的混沌带上的运动可以看成是具有某种准周期性的运动: 在带与带之间的运动是周期的, 在每个带内部的运动是无规的. 这也相当于一个振幅带有随机涨落的周期运动. 从这个观点出发, (32) 式也可以近似描写混沌带的合并过程.

一维映象中混沌带合并进行的方向与周期态分岔进行的方向相一致, 即随 μ 增大, 周期态是逐渐分岔而混沌带是逐步合并. 因此混沌带的两个临界值 $\mu_+^{(M)}$ (分岔临界值) 和 $\mu_-^{(M)}$ (合并临界值) 满足 $\mu_+^{(M)} < \mu_-^{(M)}$, 正好与周期态分岔的临界值相反. 其中 M 是周期为 $T^{(M)} = 2^{M+1}t_R$ 的混沌带的标志 (见图 4(a)).

一维映象在混沌带合并点的连续过渡要求

$$\mu_+^{(M-1)} = \mu_-^{(M)}, \quad \mu_+^{(M)} = \mu_-^{(M+1)}. \quad (41)$$

对延时系统, 因为有效分岔参数为

$$\mu'^{(M)} = \frac{\mu^{(M)}}{1 + \pi^2/2^{2M+1}(T_R + 1)^2} \quad M = 0, 1, 2, \dots.$$

根据 (41) 式, 可以得到

$$\mu_+^{(M-1)} - \mu_-^{(M)} = \frac{3\pi^2 \mu_-^{(M)}}{2^{2M+1}(T_R + 1)^2} > 0. \quad (42)$$

这表明在由 M 带合并为 $M-1$ 带的过程中, μ 的取值范围有一个“禁带”: 当 μ 满足

$$\mu_-^{(M)} < \mu < \mu_+^{(M-1)}$$

时, 系统对第 M 带而言已经超过了合并的临界点, 系统必须经过合并进入 $M-1$ 带的状态; 而相对 $M-1$ 带而言, 还没有满足进入 $M-1$ 带的基本条件: $\mu \geq \mu_+^{(M-1)}$, 因而拒绝

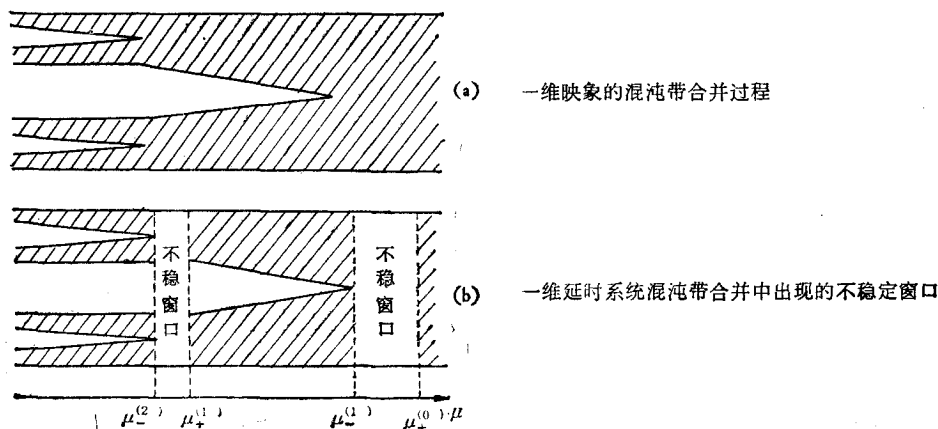


图 4

系统进入 $M-1$ 带的状态。这两种矛盾的结果说明了系统在“禁带”中是完全不稳定的，这就导致了在每个合并点出现了宽度为 $\mu_+^{(M-1)} - \mu_-^{(M)}$, $M = 0, 1, 2, \dots$ 的不稳定窗口(图 4(b)), 这些窗口将随 $T_R \rightarrow \infty$ 或 $M \rightarrow \infty$ 而逐渐消失。

失稳后的系统将如何发展? 前面我们已经分析过, 一维映象是延时系统在 $T_R \rightarrow \infty$ 时的退化系统, 这种系统自动锁模在基模上。(32) 式的一维映象的形式决定了它描写的仅仅是延时系统中基模的运动。而实际系统(1)式在 T_R 不是无穷时将具有多个模式, 这些高阶模式或靠外源激发, 或由低阶模式失稳后演化而来。因此这里自然得到, 基模失稳后系统将跃到高阶模式上, 于是出现了 $T_0/3, T_0/5, T_0/7, \dots$ 的振荡 (T_0 是基模的振荡周期)。这就是 Gibbs^[9] 等人在光学双稳系统中观察到的锁模现象。于是可以把反常锁模现象的机制理解为: 各阶模式在分岔或合并过程中, 由于在混沌带的合并点出现不稳定窗口而跃迁到高阶模式。

众所周知, 系统的宏观行为是由被激发的模式所决定的, 而基模最先被激发, 因而延时系统的宏观行为一般是基模的行为, 高阶模式仅仅在上述的不稳定窗口中才有可能表现出, 并且高阶模式的激发还必须遵从(20)式给出的激发条件。

五、讨 论

用微扰法处理一维延时系统分岔行为的整个过程简洁清楚, 结果也与现有的实验事实基本一致。例如一级效应在文献[3]中已有所反映, 另外, 反常锁模现象也是对二级效应的佐证。然而本文所提出的一些其他的现象, 如周期分岔点的滞迴过程等还有待于实验的检验。

滞迴过程的出现可能来源于延时系统的非马可夫性。因为在适当条件下, 系统可以化成如下的形式:

$$\phi_{n+1} = \mu f[\phi_n] + g[\phi_{n-1}] + \dots + h(\phi_0). \quad (43)$$

这说明系统(1)式的时间演化行为与它的整个历史有关, 而滞迴现象也是一种记忆效应, 它也许就是延时系统的非马可夫性的具体表现。

注: 投稿后, 作者发现本文线性分析部分在陈历学等同志的文章中作过相似的处理(见光学学报, 5, (1985), 128)。他们的有关部分可以作为本文处理的一个特定系统。

参 考 文 献

- [1] K. Ikeda, K. Kondo and O. Akimodo, *Phys. Rev. Lett.*, 49(1982), 1467.
- [2] K. Ikeda, H. Daido and O. Akimodo, *Phys. Rev. Lett.*, 45(1980), 709.
- [3] M. Kitano, T. Yabuzaki and T. Ogawa, *Phys. Rev. Lett.*, 50(1983), 713.
- [4] 见文献[1]中引文[6], [7].
- [5] H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan and R. L. Shoemaker, *Phys. Rev. Lett.*, 46(1981), 474.
- [6] 郝柏林, 物理学进展, 3(1983), 330.
- [7] F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs and R. L. Shoemaker, *Phys. Rev.*, A25(1982), 2172.
- [8] 秦元勋、王慕秋、王联, 运动稳定性理论与应用, 科学出版社, (1981), 27 页.

DYNAMICAL BEHAVIOR OF A SYSTEM WITH DELAYED FEEDBACK

Zhao Yong Huo Yu-ping

(*Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei*)

ABSTRACT

In this paper, the necessary and sufficient conditions of a system with delayed feedback have been derived. In order to study the bifurcation and chaotic behavior, an asymptotic expansion of the solution in terms of the inverse delay time (T_R^{-1}) has been obtained. In long delay time limit, the first order effect in T_R^{-1} is to prolong period of the motion. More interesting phenomena are about the higher order terms. The T_R^{-2} terms lead to some hysteresis processes (some bistability) at each bifurcation point. And the third approximation in T_R^{-1} influences the period-doubling bifurcation, i.e. the ratio of the periods below and at the transition point is not exact two. It is also shown that, some instable windows appear at merging points of the chaotic bands and lead to some mode-locked phenomena.