

单结管二阶电路中的周期迭加现象

徐 云

(贵 州 工 学 院)

1985 年 1 月 25 日收到

提 要

本文介绍了发生在单结管二阶电路中的周期迭加现象,并在相平面图和频谱图上观察了周期迭加现象的产生过程。

一、引 言

近年来,国内外对非线性系统的倍周期分岔和混沌运动的研究报道日益增多。作者曾报道了发生在单结管二阶电路中的倍周期分岔和混沌现象^[1],本文将介绍另一种有趣的现象——周期迭加现象。

二、环面锁频到周期迭加过程

单结管二阶电路如图 1 所示,其中 R_2 是非线性电阻,它是二端单结管, R_3 和 E 构成直流偏置电路,实验选取参数为: $L = 30\text{mH}$, $C = 0.01\mu\text{F}$, $R_1 = 125\Omega$; $R_3 = 18\text{k}\Omega$,

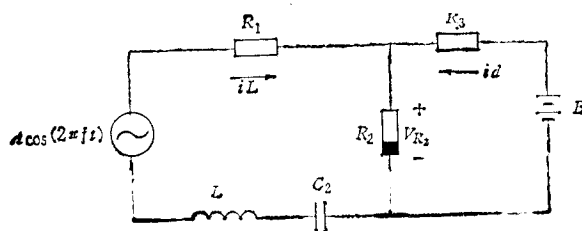


图 1

$E = 30\text{V}$. 描述电路的微分方程如下:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L + g(i_L) + u_C &= A \cos 2\pi f t, \\ C \frac{du_C}{dt} &= i, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $g(i_L) = V_{R_2} \approx a_0 + a_1 i_L + a_2 i_L^2 + a_3 i_L^3$ 是单结管的 $v-i$ 特性表达式.

实验选 A 和 f 为控制参量, 观察 u_C-i_L 的相轨迹和 i_L 的功率谱随控制参数变化的情形.

固定信号源频率 $f = 14.7\text{kHz}$. $A = 0$ 时, 电路状态是自振的, 相轨迹是一个光滑的极限环, 频谱图上仅在自振频率 f_0 及 nf_0 处出现尖峰 ($n = 1, 2, 3, \dots$).

A 从 0 增加到 0.14V , 相图上的环边逐渐加宽, 形成一个环面. 频谱图在 f_0 和 f 处出现两道较高的尖峰, 在 f_0 与 f 的和频, 差频及倍频处, 也有峰值较底的尖峰. 若此时 f_0/f 是无理数, 电路的运动状态就是准周期运动.

A 由 0.14V 增加到 0.24V , 相图上的环面失稳, 环面中露出四圈空隙, 右下部向内折成一个小环, 这个小环是不稳定的, 频谱图在 $f/5$ 处出现尖峰, 并伴随着较高的背景噪声.

当 A 增加到 0.27V 时, 相图上的随机轨线充满整个环内, 频谱图上出现连续的谱线, 在频率 f 处还有尖峰, 电路状态出现混沌运动.

$A = 0.31\text{V}$ 时, 相轨迹形成内折的双环, 频谱图在 $f/2$ 及 $nf/2$ 处, 出现尖峰. 电路状态由自振频率 f_0 锁到 f 的 2 分频上.

当 A 继续增大, 相轨迹的变化过程是这样的: 内圈小圆环的周长逐渐扩大, 当接近外圈时, 又从第二道环的下部生出一个环, 形成三环, 这道小环的周长逐渐增大, 当接近第二道环时, 又从第三道环内的下部萌发出第四道环……. 这一过程进行到第七, 八圈时, 各道几何尺寸不一的环向最外层挤去. 同时相轨迹对 A 的变化十分敏感, 很快就进入混沌状态, 各道环间的界线被随机轨道填满, 这些随机轨道不断地从内圆产生, 经过外圆, 又终止于内圆. 频谱图上出现尖峰谱线是与相轨迹对应的: 相图上出现 2 道环, 频谱图就在 $nf/2$ 处出现尖峰谱线; 3 道环时, 在 $nf/3$ 处出现尖峰谱线……. 当相轨迹劈裂到第五道环时, 频谱图上出现背景噪声. 随着劈裂的环数增加, 背景噪声幅度不断上升, 直到将所有的峰谷填平, 这时的谱线是连续的. 电路状态出现混沌. 稳定的周期迭加序列的基本周期是按 $1/f$ 的倍数, 依下面的规律排列的:

$$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{混沌} \longrightarrow 1.$$

在频谱图上, 新产生的周期对应的峰值是随周期的增长而减小. 当原有的周期轨道失稳, 而新的周期轨道尚未稳定时, 总要产生阵发性混沌或高周期现象, 作为两种不同周期迭代的过渡.

固定幅值 A , 变化频率 f , 电路状态也会产生同样的变化过程. 唯一相异的是: 随频率 f 的减少, 电路状态由环面经锁频而发生周期迭加过程.

三、由稳定焦点到周期迭加序列

对图 1 所示的电路, 保持其元件参数 L, C, R_1 的值不变, 改变单结管的偏置条件为: $E = 3.8\text{V}$, $R_3 = 700\Omega$. 这时, 当 $A = 0$ 时, 非线性电阻 R_2 两端的电压 V_{R_2} 的值不唯一, 因此电路的数学模型就不能简单地写成方程(1)的形式, 而应为

$$\begin{aligned}
 L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L + g(i_L + i) + u_C &= A \cos 2\pi f t, \\
 C \frac{du_C}{dt} &= i, \quad g(i_L + i) = E - R_2 i.
 \end{aligned} \quad (2)$$

实验同样是选周期信号源的幅值 A 和频率 f 作为控制参量。固定 $f = 9\text{kHz}$, 变化 A 。

$A = 0$, u_C-i_L 相轨迹是一个点, 频谱图上没有尖峰谱线和背景噪声。 A 由 0 增大至 0.2V , 这个点形成一个极限环, 周长也逐渐增大。频谱图上仅在 f 处出现尖峰谱线, 峰值随 A 的增大而增长。当 $A = 0.24\text{V}$, 相轨迹上的极限环失稳, 跳变的出现非稳定的双环, $A = 0.27\text{V}$ 时, 双环轨道稳定, 频谱图在 $nf/2$ 处出现尖峰谱线。此后, 随 A 的增加, 电路

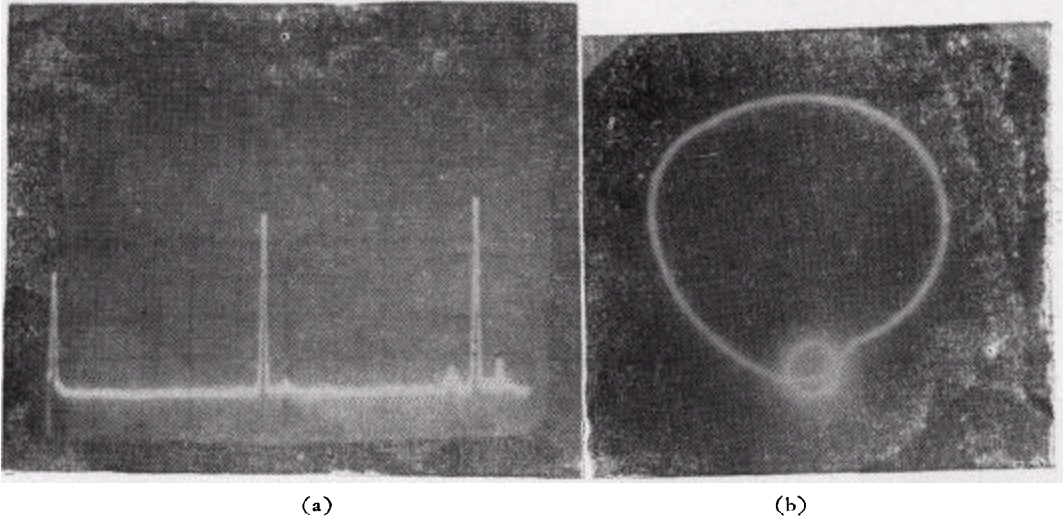


图 2 2 周期的频谱图和相平面图 ($A = 0.27\text{V}$) (a) 频谱图 X 轴为 1kHz/格 , Y 轴为 -10dB/格 ;
(b) 相轨迹图 X 轴为 u_C , Y 轴为 i_L , $u_C/i_L = 1.2\text{V/mA}$

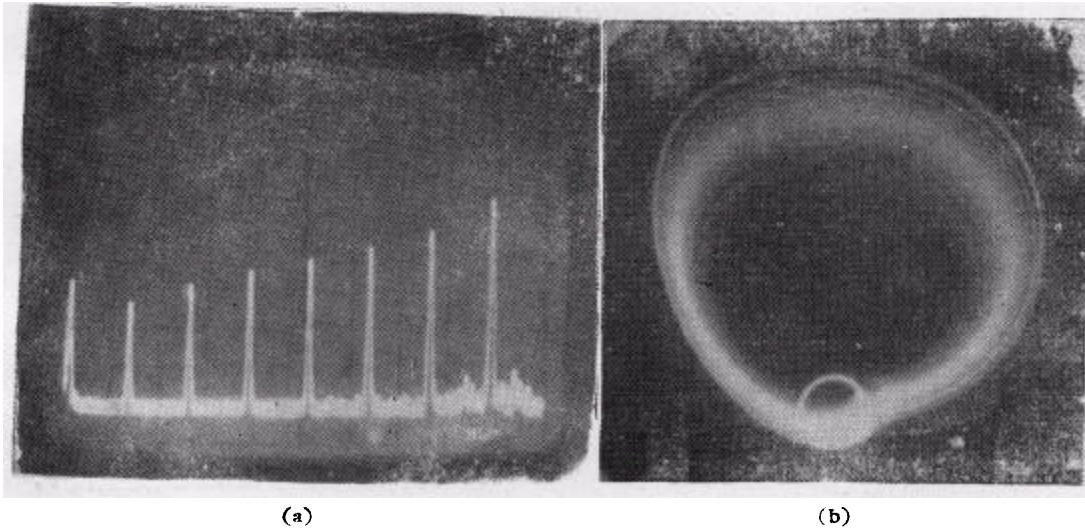


图 3 7 周期的频谱图和相平面图 ($A = 0.65\text{V}$) (a) 频谱图 X 轴为 1kHz/格 , Y 轴为 -10dB/格 ;
(b) 相轨迹图 X 轴为 u_C , Y 轴为 i_L , $u_C/i_L = 1.2\text{V/mA}$

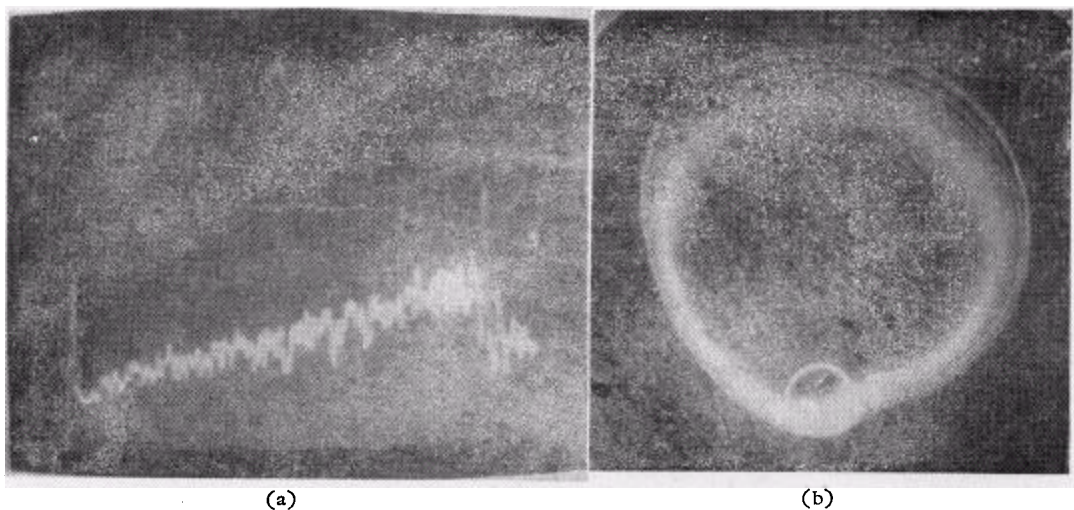


图 4 混沌时的频谱图和相平面图($A = 0.73V$) (a) 频谱图 X 轴为 $1kHz/格$, Y 轴为 $-10dB/格$;
(b) 相轨迹图 X 轴为 u_C , Y 轴为 i_L , $u_C/i_L = 1.2V/mA$

开始周期迭加过程。这过程,与前节所述的过程很一致,但分岔的周期要到第七周期时才开始产生背景噪声。

固定幅值 A , 改变频率 f , 就会产生由极限环到周期迭加的过程, 当然, 在这个过程中频率 f 的值是不断下降的。

图 2—4, 分别是周期迭加过程中, 2 周期、7 周期和混沌的频谱图和相轨迹的照片, $f = 9kHz$ 。

四、讨 论

实验充分证明, 对于图 1 所示的电路, 非线性器件单结管的偏置条件不同, 电路在周期信号源的激励下, 状态发生分岔和混沌的类型也不同。下面简单地讨论当信号源短路 ($A = 0$) 时, 在不同的偏置条件下电路的特点。

1. 偏置条件为: $R_3 = 33.8k\Omega$, $E = 30V$, 这时, 单结管的直流负载线是图 5 中的直

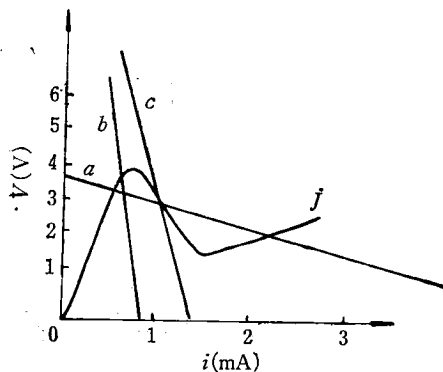


图 5 单结管的 $V-i$ 特性曲线及其直流偏置负载线

线 b , 它与单结管的 $V-i$ 曲线 j 只有一个交点, 相应平衡点附近的变分方程的特征根是一对有负实部的共轭复根, 电路的特点是单稳态。在正弦周期信号源的激励下, 电路状态经历的是由倍周期分岔到混沌的道路, 其中还有切分岔和阵发性混沌的过程。

2. 偏置条件为: $R_3 = 18k\Omega$, $E = 30V$ 时, 单结管的直流负载线是直线 c , 它与曲线 j 也只有一个交点, 如图 5 所示。对应的平衡点附近的变分方程的特

征根是一对有正实部的共轭复根,它满足于自激振荡的起始条件,在单结管的非线性作用下,电路状态能维持稳定的自激周期振荡. 在不同于自振频率的正弦周期信号源的激励下,电路状态由环面经切分岔和混沌,然后锁到激励源的有理频率上,开始经历周期迭加到混沌的道路.

3. 偏置条件为: $R_3 = 700\Omega$, $E = 3.8V$, 此时,单结管的直流负载线是图 5 中的直线 a ,它与单结管的 $V-i$ 特性曲线 J 有三个交点,即电路状态有三个平衡点,其中两个平衡点附近的变分方程各有一对含负实部的共轭复根,而另一个平衡点附近的变分方程有一对含正实部的共轭复根,这是不稳定的平衡点. 所以,电路的状态是双稳态. 在正弦周期信号源的激励下,电路状态经历由极限环到周期迭加的过程到达混沌,其中,还有切分岔和阵发性混沌.

在实验过程中,得到郝柏林教授的指点,在此表示深深的感谢.

参 考 文 献

- [1] 郝柏林,物理学进展, **3**(3)(1983),329.
- [2] Kunihiko. Kaneko, Progr. Theor. Phys., **68**(1982), 669.
- [3] Kunihiko. Kaneko, Progr. Theor. Phys., **69** (1983), 403.
- [4] 徐云,物理学报, **34**(1985),1080.

THE PERIOD-ADDING PHENOMENA IN THE UNIJUNCTION TRANSISTOR SECOND ORDER CIRCUIT

XU YUN

(Guizhou Institute of Engineering, Guiyang)

ABSTRACT

This paper introduces the period-adding phenomena which occur in the unijunction transistor second order circuit. We also studied the generating process of period-adding phenomena on the phase plane and spectrum diagram.