

非均匀磁场磁镜粒子约束的 Monte-Carlo 模拟

王 龙

(中国科学院物理研究所)

1985 年 12 月 25 日收到

提 要

本文在碰撞区和无碰撞区之间的过渡区,就 LAMEX 和抛物线轮廓两种空间变化磁场磁镜,用 Monte-Carlo 模拟研究了粒子约束问题.在过渡区,粒子约束时间高于其它两区公式的外推值,并与磁镜成正比关系.这一模拟还用自治解的方法得到了密度轮廓,并研究了这一轮廓和等离子体参数的关系.

一、引 言

本文采用 Monte-Carlo 模拟来研究磁镜中的粒子约束.这一研究的必要性出于以下考虑.

简单磁镜中的粒子约束时间可写为^[1]

$$\tau_p = \tau_{ii} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{R+1}{R} \ln(2R+2) \left(\frac{e\phi}{kT} \right) \exp\left(\frac{e\phi}{kT} \right) / \left(1 + \frac{kT}{2e\phi} \right), \quad (1)$$

其中 τ_{ii} 为离子-离子碰撞 90° 偏转时间, R 为磁镜比, ϕ 为静电位, T 为离子温度.

但(1)式是在磁镜内部为均匀磁场,即所谓方位阱,以及离子的平均自由程比装置大得多这两个条件下,仅考虑粒子在速度空间的扩散而得到的.实际上,必须考虑对这两个条件的偏离.

首先,任何实际磁镜的内部磁场都是非均匀的,方位阱仅是近似.还存在 LAMEX^[2] 这样的磁镜,离方位阱模型相差甚远.在这样的磁镜中,粒子在速度空间的扩散与空间坐标相关.

其次,无碰撞区的条件也可能不被满足.这一方面由于一些磁镜的离子温度较低,平均自由程可与装置线度相比较.另外,象 LAMEX 那样的表面磁场磁镜装置,有可能作到较大的磁镜比.当磁镜比很大,损失锥角很小时,粒子在一个往返运动周期内,由于碰撞积累的俯仰角的变化可能大于损失锥角.或者说,在粒子两次到达终端之间的时间里,可能“跳过”损失锥而不致逸出装置,因而不能简单地运用向损失锥内扩散的概念.

当磁镜比很大时,损失锥角

$$\theta \sim \sin \theta = 1/\sqrt{R}. \quad (2)$$

如果粒子从这一终端运动到另一终端时的角度偏离相当于损失锥角,那么

$$\left(\theta/\frac{\pi}{2}\right)^2 \sim 1/\left(\frac{\pi^2}{4} R\right) = L/\lambda_{ii}, \quad (3)$$

其中 L 为装置长度, λ_{ii} 为离子-离子碰撞 90° 偏转平均自由程. 因此, 当 $\lambda_{ii} \leq RL$ 时粒子运动将不满足无碰撞条件. 因而可认为, 在碰撞区和无碰撞区间存在着一个过渡区, 它由下式规定:

$$1 < \lambda_{ii}/L < R. \quad (4)$$

由 (4) 式可看出, 磁镜比越大, 过渡区范围越大.

在碰撞很频繁的极限情况, 可用公式^[1]

$$\tau_p = \frac{\sqrt{\pi} RL}{V_i} \exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right), \quad (5)$$

V_i 为离子热速度.

由于在过渡区难于用其它方法解粒子约束问题, 文献 [1] 首先采用 Monte-Carlo 模拟来研究过渡区的粒子约束问题. 但该文主要考虑方位阱情形, 虽然也研究了空间变化磁场的串联磁镜, 但其静电位, 也就是密度分布, 是给定的.

本文针对 LAMEX 及抛物轮廓两种磁场轮廓研究空间变化磁场磁镜在过渡区的粒子约束. 这一工作与文献 [1] 的主要区别是: 由于事先不知道密度轮廓, 必须先设定一初始密度轮廓, 然后反复运用这一程序, 以达到自洽解.

二、物理模型

所采用的物理模型可概括为如下几点:

1. 在绝热近似假设下, 当不受到碰撞时, 离子运动的磁矩守恒

$$\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 / B = \frac{1}{2} m v_{\perp 0}^2 / B_0, \quad (6)$$

其中 $v_{\perp}$ 为垂直方向速度, B 为磁场, 带下标 0 的量为磁镜中心的量. 此外, 粒子还遵循能量守恒定律

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2e\phi}{m}, \quad (7)$$

其中电位取值为 $\phi_0 = 0$, 其它处一般为负.

2. 仅考虑离子的引导中心在轴向的一维运动, 不考虑径向扩散.
3. 电子分量的影响归结为静电位的作用. 这一电位与密度的关系为

$$\phi \sim \ln(n/n_0), \quad (8)$$

n 为等离子体密度, 电位最大值可取^[2]

$$\phi_{\max} = -\frac{kT_e}{e} \left(\frac{3}{2} \ln \frac{T_i}{T_e} + \frac{1}{2} \ln \frac{m_i}{m_e} \right), \quad (9)$$

其中下标 i, e 分别表示离子与电子分量.

4. 电子温度与离子温度可能不同, 但它们在装置中是空间均匀的. 仅考虑离子与离子间的碰撞, 其碰撞参数仍使用 Spitzer 在麦氏分布下得到的数值^[3].
5. 考虑稳态情形, 即所有参数不随时间变化.

三、计算方法

由于本文所采用的模型,有可能引入下列无量纲量:

磁镜比	R
比	λ_{ii}/L
比	T_e/T_i

并把装置长度 L , 离子热速度 v_{th} , 离子以热速度通过装置的时间 L/v_{th} 分别作为长度、速度、时间的单位, 用中心磁场及平均密度作为磁场及密度的单位。这样, 就把所有公式及计算结果无量纲化了。只需给定上述三个无量纲量以及磁场轮廓, 就相当于给定了装置参数。

此外尚需给定初始密度轮廓。这一轮廓是任意的, 不影响最后的自洽解, 但选择适当的初始密度轮廓会更快达到自洽。

初始密度轮廓有两种作用。首先, 它决定场粒子的分布, 以决定局部的碰撞参数。其次, 它决定试探粒子的初始位置分布, 即在一个试探粒子损失后, 又以正比于这一初始密度和截面的乘积的几率在装置内产生新的试探粒子。

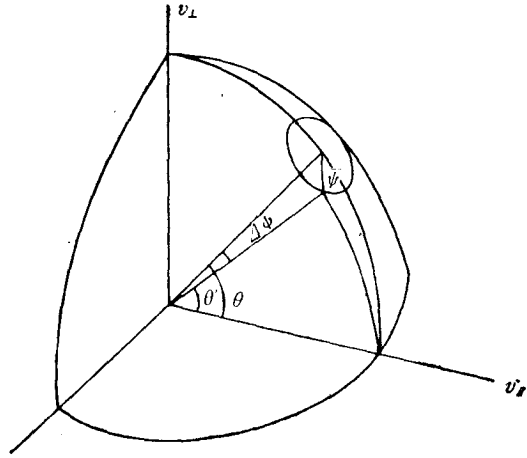


图1 速度空间坐标

还需对时间和空间进行分割。本文所描述的计算基于对时间的分割。这就是说, 逐次考虑粒子经过一段固定的短时间 Δt 后运动状态的改变。其中, 磁场和电位空间变化的作用以及碰撞是分别考虑的, 而认为总的变化是二者分别作用结果的线性迭加。此外, 对空间即轴坐标也作相应的分割, 目的是计算试探粒子运动对其密度轮廓的贡献。对于速度空间也可作同样的处理。

当每一试探粒子的产生位置决定以后, 便可以新的随机数按照麦氏分布来决定粒子的初始速度和俯仰角。然后, 便以上述原则, 模拟粒子的运动。在很短的时间 Δt 内, 粒子的轨道运动可作线性近似, 但在迴转点附近需作特殊处理。而粒子在此短时间内所遭受的碰撞, 可认为集中在一点处理。因碰撞而产生的角度偏离为

$$\Delta\phi = \sqrt{-2 \ln c_1 \langle (\Delta\phi)^2 \rangle} \Delta t, \quad (10)$$

速度变化为

$$\Delta v = \langle \Delta v_{||} \rangle \Delta t + \sqrt{3 \langle (\Delta v_{||})^2 \rangle \Delta t (2c_2 - 1)}, \quad (11)$$

其中 c_1 、 c_2 为均匀分布于 $(0, 1]$ 区间的两个随机数。Spitzer 系数 $\langle (\Delta\phi)^2 \rangle$, $\langle \Delta v_{||} \rangle$, $\langle (\Delta v_{||})^2 \rangle$ 可由局部密度和粒子速度决定^[3]。在(11)式中, 作了矩形函数近似。

然后, 使用另一个随机数 c_3 来决定局部方位角 φ (见图1)。用 φ 及 $\Delta\phi$ 的数值按球面三角公式决定新的俯仰角 θ' 。

如上所述,当粒子在终端损失后,便在装置中产生新的粒子继续模拟过程。

对一定数量的粒子进行模拟以后,计算出平均的粒子约束时间和试探粒子密度轮廓,并把这一轮廓与初始密度轮廓相比较。如果两轮廓充分接近,便认为达到了自洽解。如果两轮廓相差较远,便根据新得到的试探粒子密度轮廓对原初始密度轮廓进行修正,如对二者作加权平均,作为新的初始密度轮廓,开始下一轮模拟过程。如此反复进行,直至实现自洽。

对于粒子在速度空间的分布,也可用同样方法同时得到自洽解。但除非碰撞很低的情形,一般采用麦氏分布(或除去损失锥)作为初始的试探粒子分布,就能得到很快达到自洽的解。

对于空间密度轮廓来说,这一粒子模拟过程是稳定的。例如,如果在空间某处由于计算的随机性形成密度涨落为正,那么,如果在下一轮模拟中以此结果为初始密度轮廓,则该处过高的场粒子密度趋于把试探粒子碰撞到其邻域,使得该处的试探粒子密度偏低,对

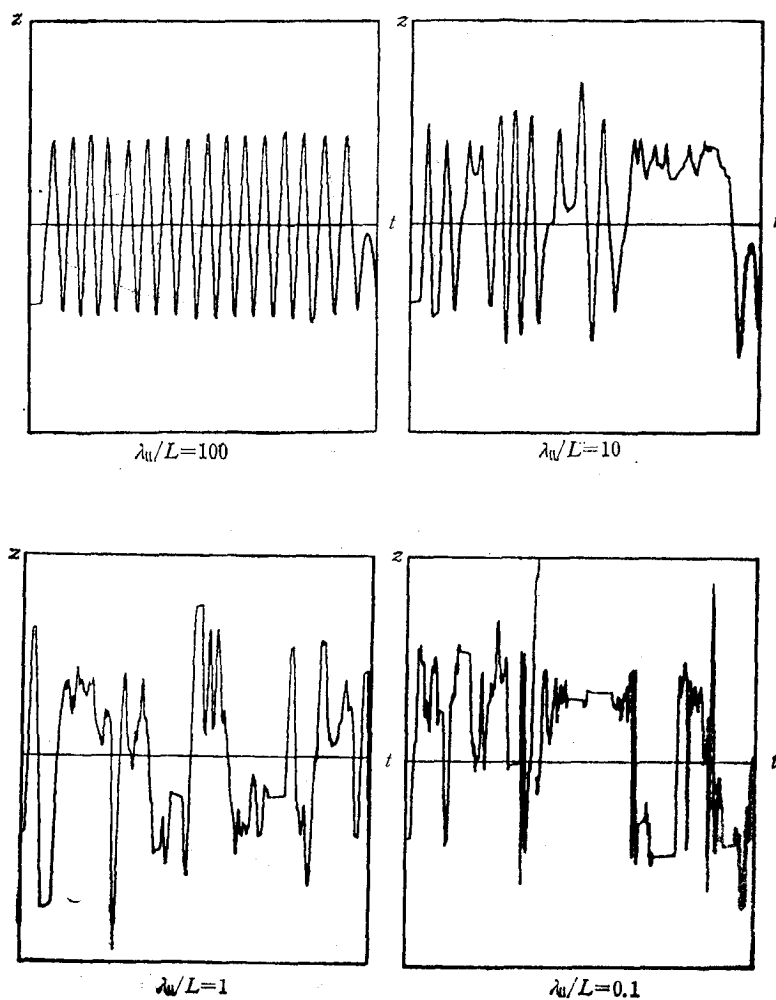


图 2

于速度空间分布的模拟来说,也未发现计算过程引入不稳定性。

四、数值结果

本文研究两种磁场轮廓。第一种是 LAMEx 型的,可表为

$$B(z) = \begin{cases} B_0 & |z| - z_m \\ B_0 R & z - z_m \end{cases}, \quad (12)$$

其中

$$z_m / \frac{L}{2} = 0.36 - 0.5$$

与磁镜比 R 有关。第二种是抛物轮廓,可表示为

$$B(z) = B_0 [1 + 4(R - 1)z^2/L^2]. \quad (13)$$

以上两式中 $z = -\frac{L}{2} - \frac{L}{2}$.

计算主要在过渡区进行。所使用的试探粒子数一般为 1500—2000。主要结果综述如下:

1. 从 Monte-Carlo 模拟可以使得到粒子在磁镜中运动的直观图象。例如,图 2 表示 $R = 20$ 的 LAMEx 装置中, λ_{ii}/L 分别等于 100, 10, 1, 0.1 时,粒子在装置中的坐标随时间的变化。其中第一、二、四幅分别为典型的无碰撞区、过渡区和碰撞区,第三幅则为过渡区与碰撞区的边界。当然此处仅取少数粒子的计算结果,但可看出随着碰撞频率的增加,在不同区域内粒子运动状况的变化。

图 3 则表示 $R = 4$ 的抛物轮廓, $\lambda_{ii}/L = 1$ 的情形,一个试探粒子,从产生到逸出,在 $z - \sin \theta$ (θ 为俯仰角)相空间的轨迹。

2. 模拟运算的一个重要结果是密度轮廓。图 4 为 LAMEx 情形下得到的密度轮廓,

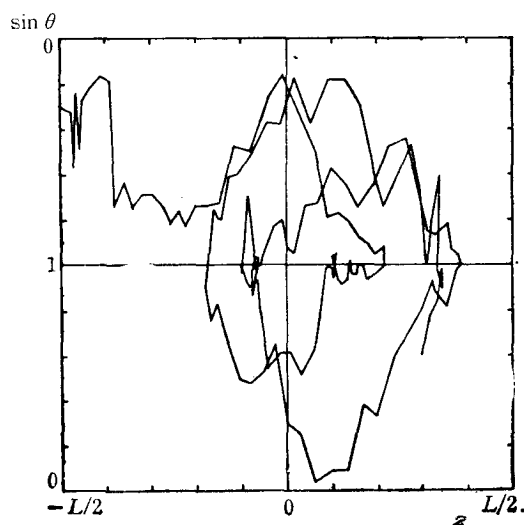


图 3

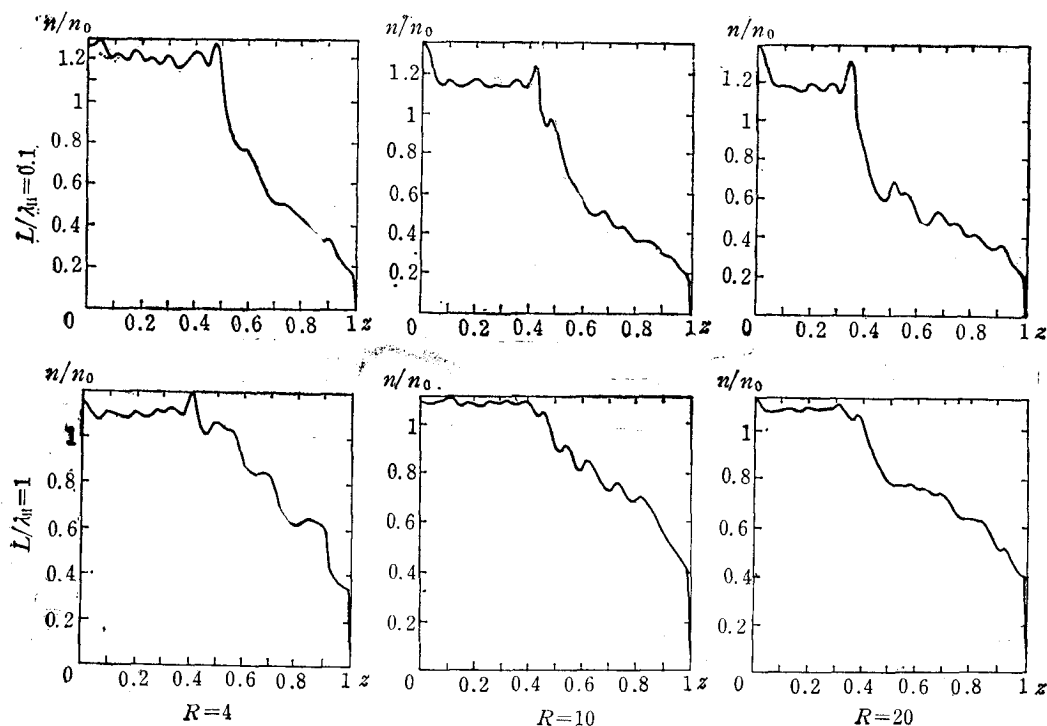


图 4

参数内 $R = 4, 10, 20$; $\lambda_{ii}/L = 10, 1$; $T_e/T_i = 0.2$. 由图 4 及其它数据可以得到如下结论:

在 $|z| \leq z_m$ 的均匀磁场区域, 密度也是均匀的.

在强磁场区域, 密度在空间大致呈线性变化, 其空间梯度主要依赖于磁镜比. 当磁镜比很大时, 这一梯度很小, 且在与均匀段衔接处发生阶跃.

至于终端处的密度则主要与碰撞频率有关. 例如图 5 表示 $R = 20$ 时 LAMEX 终端处密度与碰撞频率 L/λ_{ii} 的关系. 这一密度随碰撞频率减小而降低, 但也与磁镜比有关, 随磁镜比增加而降低.

3. 还得到粒子在速度空间的分布. 例如图 6 对比了 $R = 4$, $\lambda_{ii}/L = 1$ 的方位阱 (实线) 和抛物轮廓 (虚线) 两种磁场轮廓中粒子俯仰角的分布. 虚直线表示损失锥范围.

4. 从这一数值模拟中得到另一个重要的结果是粒子约束时间. 图 7 表示 $R = 20$ 的 LAMEX 磁镜中, 粒子约束时间 τ_p 值与碰撞参数 L/λ_{ii} 的关系. 为使结果无量纲化, 这一数值用 τ_{ii} 作单位. 为使这一结果与无碰撞区及碰撞区公式相比较, 图 6 中虚线表示按 (1) 式计算的无碰撞区公式的值; 实线表示按 (5) 式计算的碰撞区公式的值, 但式中装置长度 L 用有效长度 L_{eff} 代替. $L_{eff} = V/S_0$, S_0 为中心处截面积, V 为磁镜体积. 图 6 中 $0.05 < L/\lambda_{ii} < 1$ 区域为过渡区.

图 8 则表示 LAMEX 装置中, 碰撞参数 λ_{ii}/L 分别为 10, 5, 2 时, 粒子约束时间与磁镜比的关系. 此处采用 $L_{eff}/\bar{v}$ 作为约束时间单位, 其中 $\bar{v}$ 为离子平均速度.

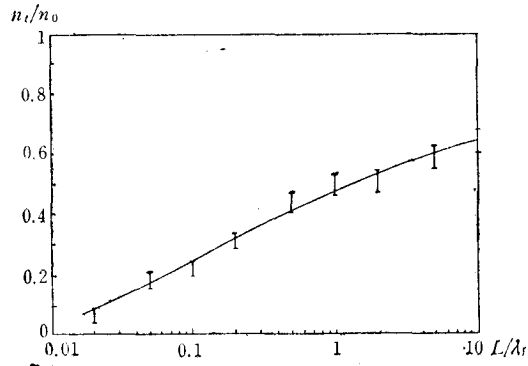


图 5

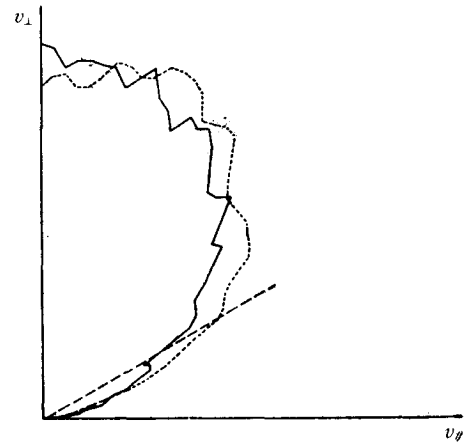


图 6

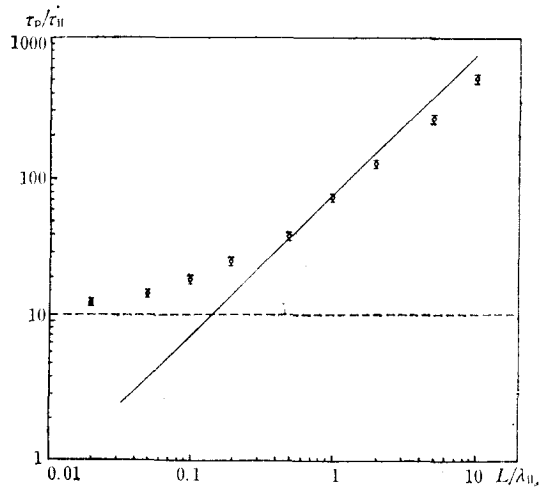


图 7

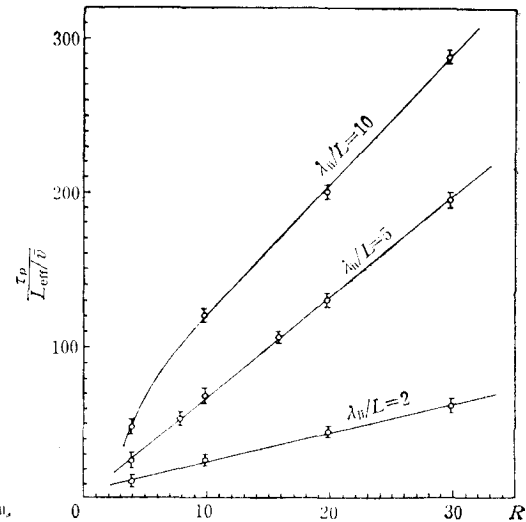


图 8

五、结论和讨论

本文所描述的 Monte-Carlo 模拟得出的最重要的结果是关于粒子约束时间的。从图 7 可以看到,对于碰撞区和无碰撞区,模拟结果和从公式得到的结果接近。在过渡区,模拟结果为以上两区结果的平滑过渡,其数值大约等于以上两区公式计算值的和。这一结果与文献 [1] 对于方位阱和串联磁镜的结果一致。

图 8 给出粒子约束时间对磁镜比的定标。图中所示数据,除去 $\lambda_{ii}/L = 10$, $R < 10$ 以外,都属于过渡区。在过渡区这一关系是线性的,而上述第一条曲线在 R 较小时的非线性,正说明过渡区粒子约束时间大于无碰撞区公式的外推值。因此,仔细调整磁镜的运转参数,可以延长粒子约束时间。

在过渡区粒子约束时间和磁镜比呈线性关系并不难理解。根据在引言中的讨论,过渡区的粒子损失相当于向损失锥内的散射。当损失锥角较小时,粒子损失率应与损失锥角大小成正比。损失锥角 $\theta \sim 1/\sqrt{R}$, 所以其立体角反比于磁镜比, 因而粒子约束时间与磁镜比成正比。

从引言及此处的讨论可以认识到“过渡区”一词并不确切。如果认为碰撞区和无碰撞区分别为 $\lambda_{ii}/L \rightarrow 0$ 和 $\lambda_{ii}/L \rightarrow \infty$ 两种极限情况, 那么, 此文所着重讨论的情形, 实际上是 $R \rightarrow \infty$ 的极限情形。

LAMEX 这一类磁镜中, 磁镜比可以作得很大, 使这一讨论成为现实。初步的实验结果与上述线性关系的结论相符^[4]。

本文使用 Monte-Carlo 模拟对空间变化磁场磁镜中的粒子密度轮廓得到了一些结果。对于 LAMEX 情形, 在磁场均匀段密度也为均匀, 在强磁场段则为线性变化。

在本计算中, 忽略了空间变化磁场磁镜的另外一种效应, 即转动的影响。在磁镜中, 粒子在正电位产生的径向电场及轴向磁场作用下, 产生角向漂移。在空间变化磁场磁镜的非均匀磁场段, 粒子角向运动的离心力会使粒子趋于向中心运动, 因而于约束有利。以下对这一作用做一简单估计。

取电荷沿截面均匀分布, 忽略粒子径向运动的简单模型。类似于文献 [5], 可以推导出此时等离子体作整体转动, 速度为

$$v_\theta = \frac{2cr\varphi}{a^2B}, \quad (14)$$

其中 r 为径向坐标, a 为等离子体半径。这一运动在平行磁力线方向产生离心力为

$$F_{||} \cong F \frac{dr}{dz} = \frac{4c^2mr\varphi^2}{a^4B^2} \frac{dr}{dz} = -\frac{2c^2mr^2\varphi^2}{a^4B^2} \frac{dB}{dz}. \quad (15)$$

对截面取平均后

$$\bar{F}_{||} \cong -\frac{c^2m\varphi^2}{a^2B^3} \frac{dB}{dz} = \frac{c^2m\varphi^2}{a_0^2B_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{B} \right), \quad (16)$$

其中用到 $a^2B = a_0^2B_0 = \text{const}$ 。这样, 如果忽略电位 φ 的空间变化, 这一力的作用可用一个势

$$\Phi = \frac{c^4m\varphi^2}{a_0^2B_0B} \quad (17)$$

来表现。这一项与静电位作用之比为

$$\Phi/e\varphi = (r_{L,\varphi}/a_0)^2, \quad (18)$$

其中 $r_{L,\varphi}$ 为粒子动能与其静电位能相比较时的拉莫尔半径。一般情况下, 这一比值远远小于 1, 所以在计算粒子约束时, 这一旋转效应可以忽略。

作者感谢黄耀辉教授在本工作中给予的指导, 以及王小青同志在数值计算中所给予的协助。

参 考 文 献

- [1] T. D. Rognien & T. A. Culter, *Nucl. Fusion*, 20(1980), 1003.
- [2] A. Y. Wong *et al.*, *Comments Plasma Phys.*, 6(1981), 131.

- [3] L. Spitzer, Jr., *Physics of Fully Ionized Gases*, Intersciences, New York, (1967), 128.
[4] B. J. Leikind *et al.*, *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **27**(1982), 1138.
[5] R. C. Davidson, *Theory of Nonneutral Plasmas*, Benjamin Inc., (1974), 4.

MONTE-CARLO SIMULATION OF PARTICLE CONFINEMENT IN MIRRORS WITH SPACE-VARING MAGNETIC FIELD

Wang Long

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The particle confinement has been studied by Monte-Carlo simulation in the intermediate regime between the collisional and collisionless regimes for the mirrors with space-varing magnetic fields, for example, LAMEX and parabolic magnetic field profiles. The particle confinement time in the intermediate regime is longer than the extrapolation values based on the formulas in other two regimes, and proportional to the mirror ratio. The density profiles have been obtained as self-consistent solutions from the simulation. The dependence of the density profile on the plasma parameters are discussed.