

二模振荡激励下水槽中的孤立波

王 本 仁 魏 荣 爵

(南京大学声学研究所)

1985年11月27日收到

提 要

在狭而长的水槽中,垂直方向用两个频率进行参量激励下,研究了水波的运动。假定水的运动是不可压缩流体的无粘无旋运动,依运动的变分表示和有限空间内简正波表象得出流体的 Lagrange 密度和表面自由位移的方程。用多重尺度和平均变分法计算得到流体复位移动满足的非线性偏微分方程——(40)式。在稳态条件下,讨论了激励条件和流体参数间应满足的关系。在一定条件下,方程可解它是呈双曲正割函数外形的孤立波。

在垂直激振的水槽中所出现的表面水波,早期是 Faraday 在实验中首先观察到^[1],后来 Rayleigh^[2] 和 Benjamin^[3] 等人研究表明在小振幅以及有限振幅时,运动是由 Mathieu 方程来表述。水表面振荡的主频率是激励频率之半。后来对这类参量驱动的非线性振动系统进一步实验研究^[4],在环形槽中产生有趣的非倍周期分岔序列的次谐波。另一方面,在狭水道中 1834 年被 Scott Russell^[5] 最先观察到这种既不弥散又不耗散的波包——孤立波。后来大量的研究表明在物理等科学的其它领域中孤立波同样广泛地存在。而对水波的研究^[6]显示出特别在海洋中水波现象极为丰富,诸如毛细波、内波、行星波等。由于非线性效应和色散相互竞争及平衡的结果,会出现永形波,孤立波即是其一。

1984 年吴君汝等人^[7]在狭长的水槽中,用 Faraday 实验相似的激励方法,观察到了不传播的孤子。他们是用水槽置于大扬声器上,在单频正弦信号激励下观察到了这个现象。水表面沿槽宽方向呈现驻波模式,而在槽长方向则是双曲线正割函数的波形。在一定条件下,出现多个孤子时,孤子间会产生吸引和排斥。Larrazza^[8] 和 Miles^[9] 已对槽内水表面波的运动进行计算和分析。

我们将对两个成倍频的振荡模式在垂直激励下,槽内水表面波的运动进行计算。首先给出槽内水波运动的变分表述,然后在二模振荡下求出相应的 Lagrange 密度,最后导出运动方程和求解。

一、运动的变分表述

现研究水在槽内的运动(如图 1),并认为它是不可压缩流体的无粘、无旋运动。

令 $\phi(x, y, z, t)$ 代表速度势和 $f(x, y, z, t) \equiv \eta - z$ 代表一空间曲面,当 $t = 0$ 时,即得到自由面 $z = \eta(x, y, t)$, 令

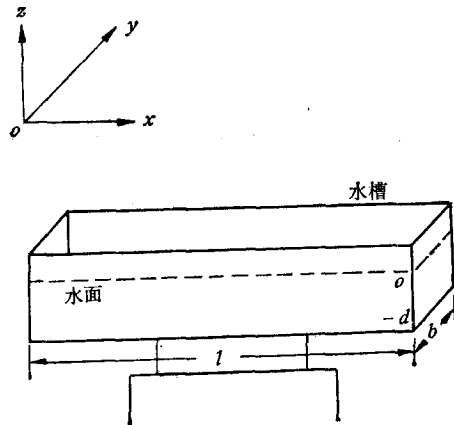


图 1

$$\mathcal{L} = - \int_{-d}^{\eta} \left[\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gz \right] dz \quad (1)$$

为 Lagrange 密度。则构成泛函的变分

$$\delta I = \delta \iint_R d^2x dt \mathcal{L} = 0. \quad (2)$$

此处 R 是指 (x, t) 空间中一区域。先求对 $\delta \phi$ 的变分, 则有

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_R d^2x dt \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-d}^{\eta} \phi_{x_i} \delta \phi dz + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-d}^{\eta} \phi_z \delta \phi dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} \delta \phi dz \right) \\ & - \iint_R d^2x dt \int_{-d}^{\eta} (\phi_{x_i x_i} + \phi_{zz}) \delta \phi dz \\ & - \iint_R d^2x dt (\phi_{x_i} \eta_{x_i} + (-1) \phi_z + \eta_t)_{z=\eta} \delta \phi \\ & - \iint_R d^2x dt (\phi_{x_i} (-d)_{x_i} + (-1) \phi_z)_{z=-d} \delta \phi. \end{aligned} \quad (3)$$

此处下标代表求导数, $x_i, i=1, 2$ 各代表 x, y 方向的坐标, 以及重复含 i 的下标则是对 $i=1, 2$ 求和。因为在区域 R 的边界上有 $\delta \phi = 0$, 而在 R 内 $\delta \phi \neq 0$, 则要上式 $\delta I = 0$, 必须有

$$\phi_{x_i x_i} + \phi_{zz} = 0, \text{ 即 } \nabla^2 \phi = 0 \text{ 在 } -d < z < \eta. \quad (4)$$

以及自由面上的运动边界条件

$$\frac{D\eta}{Dt} = \eta_t + (\nabla \phi \cdot \nabla) \eta = \phi_z, \text{ 在 } z = \eta. \quad (5)$$

和底面条件

$$\phi_{x_i} d_{x_i} + \phi_z = 0 \text{ 在 } z = -d \text{ 处}. \quad (6)$$

如果底面是平面, ϕ 和 x, y 坐标无关, 则(6)式即成

$$\phi_z = 0 \text{ 在 } z = -d \text{ 处} \quad (6')$$

同样, 如将 δI 表成

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{R'} dx dt \int_{-d}^{\eta} dz \int_0^b (\delta \varphi_t + \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \varphi) dy \\
&= \int_{R'} dx dt \int_{-d}^{\eta} dz \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^b \varphi_{x_i} \delta \varphi dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^b \varphi_z \delta \varphi dy \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^b \delta \varphi dy \right\} - \int_{R'} dx dt \int_{-d}^{\eta} dz (\varphi_{x_i x_i} + \varphi_{zz}) \delta \varphi dy \\
&\quad - \int_{R'} dx dt \int_{-d}^{\eta} dz [(-1) \varphi_y|_{y=b} - (-1) \varphi_y|_{y=0}] \delta \varphi.
\end{aligned} \tag{7}$$

这样就得到在 y 向的壁面条件

$$\phi_y = 0 \quad \text{在 } y = 0, b \text{ 处.} \tag{8}$$

对 I 求对 $\delta \eta$ 的变分, 则得

$$\delta I = \iint_R \left[\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gz \right]_{z=\eta} \delta \eta d^2 x dt = 0. \tag{9}$$

于是即得自由面上的动力边界条件

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gz = 0 \quad \text{在 } z = \eta \text{ 处.} \tag{10}$$

因为

$$\int_{-d}^{\eta} \phi_t dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} \phi dz - \phi \eta_t|_{z=\eta} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} \phi dz - \xi \eta_t.$$

此处用 $\xi = \phi|_{z=\eta}$. 再看流体的动能

$$T = \frac{1}{2} \iiint (\nabla \phi)^2 d^3 x = \frac{1}{2} \iint \phi \nabla \phi \cdot dS = \frac{1}{2} \iint \xi \eta_t d^2 x.$$

这里我们应用奥高定律, 将体积分变成面积分, 然后应用表面条件. 因此 Lagrange 密度可表为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \xi \eta_t - \frac{1}{2} \int_{-d}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dz - \frac{1}{2} g \eta^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{-d}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dz - \frac{1}{2} g \eta^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

也就是动能和势能之差, 但是沿 z 方向取了积分. 在上述导出中, 因为 $\mathcal{L}$ 是 Lagrange 密度, 因此一些常量和完全微分的量已被略去.

我们用 $\mathcal{L}$ 表示单位质量的密度, 并且要考虑外激励力的作用, 因此在势能中引入垂直方向的变加速度 $\dot{v}$. 这样有

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\hat{V}} \left[\frac{1}{2} \iiint (\nabla \phi)^2 d^3 x - \iint d^2 x \int_0^{\eta} (g + \dot{v}) z dz \right]. \tag{12}$$

此处 $\hat{V}$ 代表总的流体体积.

二、简正波表象下的函数

根据上述 Lagrange 密度的表示式, 现在要写出在水槽有限容积及相应边界条件下的

表示.

因为 y 向和 z 向的底面是刚性壁面, 我们找出

$$\phi_n(y) = \sqrt{2} \cos k_n y \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$k_n = \frac{\pi}{b} n$$

的简正振动函数来描述 y 向的运动. 并且以这些因子作为正交基, 构成如下的速度势展式:

$$\phi(y, z, t) = \phi_n(t) \frac{\cosh k_n(z+d)}{\cosh k_n d} \phi_n(y). \quad (14)$$

显然可看出, 在 $y=0, b$ 和 $z=-d$ 处 $\phi(y, z, t)$ 自然满足界面条件. 此处重复指标 n , 表示对 n 的求和.

如我们先考察 y, z 二维, 而将 x 维近似认为无限, 则上述 ϕ 函数也满足

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad -d < z < \eta \quad (15)$$

的 Laplace 方程. 并记 $x_n(y, z) = \frac{\cosh k_n(z+d)}{\cosh k_n d} \phi_n(y)$. (因为式两边都有 n , 故 n 重复下标不是求和.)

同样自由表面位移用 $\phi_n(y)$ 函数来展开, 则有

$$\eta(y, t) = \eta_n(t) \phi_n(y). \quad (16)$$

因此有 $(\nabla \phi)^2 = \nabla x_n \nabla x_m \phi_n \phi_m$, 则有动能可表为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \iint \nabla x_n \nabla x_m \phi_n \phi_m dy dz \\ &= \frac{1}{2} \rho b \phi_m \phi_n \left[\frac{1}{b} \int_0^b dy \int_{-d}^{\eta} \nabla x_n \nabla x_m dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho b k_{mn} \phi_m \phi_n. \end{aligned} \quad (17)$$

此处

$$k_{mn} = \frac{1}{b} \int_0^b dy \int_{-d}^{\eta} \nabla x_m \nabla x_n dz \quad (18)$$

是对称矩阵 $[k]$ 的元素. 应用 I 对 $\delta \phi$ 变分的稳定要求 (见文献 [10]), 则可得到列矩阵 $\phi \equiv \{\phi_n\}$ 及 $\dot{\eta} \equiv \{\dot{\eta}_n\}$ 之间关系:

$$\phi = l \dot{\eta}. \quad (19)$$

(19) 式为矩阵方程, $[l]$ 是个反对称方阵. 这样可以将 T 和 ϕ_m 之间关系变换成 T 和 $\dot{\eta}_m$ 之间关系, 而有

$$T = \frac{1}{2} \rho b k_{mn} l_{mp} \dot{\eta}_p l_{nq} \dot{\eta}_q = \frac{1}{2} \rho b a_{mn} \dot{\eta}_m \dot{\eta}_n. \quad (20)$$

此处

$$a = [l^T k l] \quad (21)$$

是一方阵, 由 l 的转置矩阵, k 矩阵和 l 矩阵相乘得到. a_{mn} 元素的具体表述见附录. 势能部分为

$$V = \rho \int_0^b dy \int_0^\eta (g + \dot{v}) z dz = \frac{1}{2} \rho b (g + \dot{v}) \eta_n \eta_n. \quad (22)$$

因此 Lagrange 密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{mn} \dot{\eta}_m \dot{\eta}_n - \frac{1}{2} (g + \dot{v}) \eta_n \eta_n. \quad (23)$$

用水表面的位移 η_n 和它的时间导数 $\dot{\eta}_n$ 表出.

三、用多重尺度和平均法计算

本文拟讨论输入激励信号是两个成倍频的余弦振荡, 它们可表为

$$z = a_0 \cos 2\theta + a'_0 \cos 4\theta, \quad \theta = \omega t. \quad (24)$$

z 代表水槽沿垂直方向的位移, ω 是角频率, t 是快变时间尺度, 并且有条件:

$$\frac{\omega^2 a_0}{g} \ll 1; \quad \frac{\omega^2 a'_0}{g} \ll 1. \quad (25)$$

我们假设槽内水表面的位移中 η_n 部分有如下形式的表示式:

$$\eta_n = \delta_m a (p(\tau) \cos \theta + q(\tau) \sin \theta) + a^2 S (A_n(\tau) \cos 2\theta + B_n(\tau) \sin 2\theta + C_n(\tau)). \quad (26)$$

此处 a 是水波的振幅系数, $\tau = \varepsilon \omega t$ ($\varepsilon < 1$) 是慢变时间 εt 所引起相角变化. p, q, A_m, B_m, C_m 是待定函数. 因为现在讨论的仍属弱非线性参量激励的情形, 故水波振动的基频是近原来激励频率之半.

将 η_n 的表示式(26)代入 $\mathcal{L}$ 的(23)式中, 则得到 $\mathcal{L}$ 作为 p, q, A_m, B_m, C_m 函数的表示式. 对所得的式中各量取 $\int_0^{2\pi} (\quad) d\theta$ 的积分, 这样可留下慢变的函数 $\langle \mathcal{L}_0 \rangle$. 再我们要求 $\langle \mathcal{L}_0 \rangle$ 对 A_m, B_m, C_m 的变化是稳定的, 即用求 $\frac{\partial \langle \mathcal{L}_0 \rangle}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial \langle \mathcal{L}_0 \rangle}{\partial B_m} = 0,$

$\frac{\partial \langle \mathcal{L}_0 \rangle}{\partial C_m} = 0$ 可以解得

$$\begin{aligned} A_m &= - \frac{a_{1m1} + a_{11m} - \frac{1}{2} a_{m11}}{4a_m + 8a'_0 - a_1} \frac{p^2 - q^2}{2S} \\ B_m &= - \frac{a_{1m1} + a_{11m} - \frac{1}{2} a_{m11}}{4a_m - 8a'_0 - a_1} \frac{pq}{S}, \\ C_m &= \frac{a_{m11}}{4a_1} \frac{p^2 + q^2}{S} \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

对各系数具体进行计算, 只留下 $m = 2$ 的项, 并且算得相应的值为

$$A_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} (1 - 3T^{-2})}{\frac{T}{k} + 8a'_0} \frac{q^2 - p^2}{2S}, \quad B_2 = - \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} (1 - 3T^{-2})}{\frac{T}{K} - 8a'_0} \frac{pq}{S},$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}}{8} (1 + T^{-2}) k T \frac{p^2 + q^2}{S} \quad (28)$$

此处 $T = T_1 = \tanh k_1 d$, $k = k_1$. 代回 $\langle \mathcal{L}_0 \rangle$ 中, 并且注意到激励频率之半 ω 和系统的自然频率 $\omega_1 = \sqrt{g k_1 T_1}$ 非常接近, 但并不相等. 因此量 $\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} \ll 1$. 因而引入量

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\varepsilon \omega_1^2} = o(1) \quad (29)$$

和量

$$\gamma = \frac{\omega^2 a_0}{\varepsilon g} = o(1), \quad (30)$$

以及取

$$\varepsilon^{1/2} = \frac{a k}{8 T}. \quad (31)$$

经过一些运算, 得到如下的 Lagrange 密度:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_0 \rangle = a^2 \varepsilon g \left[\frac{1}{2} (\dot{p}q - p\dot{q}) + \frac{1}{2} \beta (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} \gamma (p^2 - q^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} C' (p^2 + q^2)^2 + \frac{1}{4} D (p^4 - 6p^2 q^2 + q^4) \right] + o(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (32)$$

此处有

$$\begin{aligned} C' = 2T^4 \left[-\frac{(1 - 3T^{-2})^2}{T^2 - 64a_0'^2 k^2} + 2(1 + 2T^{-2} + 3T^{-4}) \right], \\ D = \frac{16kT^3(1 - 3T^{-2})^2}{T^2 - 64a_0'^2 k^2} a_0'. \end{aligned}$$

此处 β, γ, C', D 都是常数, $\dot{p}, \dot{q}$ 代表对宗量 τ 求导数.

加入 x 维的变化, 因为在上面的计算中, 我们假设 ϕ_n 和 η_n 都只是时间 t 和 τ 的函数, 但是在水槽中单孤子的情形, 孤立波的波形是沿 x 向伸展的, 而且几乎是不变的. 现在我们假定 $\phi_n = \phi_n(x, t)$, $\eta_n = \eta_n(x, t)$, 同样计算由此引起的 Lagrange 密度的变化

$$\begin{aligned} \frac{1}{2b} \int_R (\phi_x)^2 d^3x &= \frac{1}{2b} \int_0^b dy \int_{-d}^{\eta} \phi_x^2 dz \\ &= \frac{\phi_{nx}^2}{b \cosh^2 k_n d} \int_0^b \cosh^2 k_n y dy \int_{-d}^{\eta} \cosh^2 k_n (z + d) dz \\ &= \frac{\phi_{nx}^2}{4} \left(\frac{d}{\cosh^2 k_n d} + \frac{T_n}{k_n} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

由于 $\phi_{1x} \simeq \frac{1}{kT} \eta_{1x}$ 和求出

$$\langle \eta_{1x}^2 \rangle = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 [2\varepsilon (\dot{p}_x q_x - \dot{q}_x p_x) + p_x^2 + q_x^2].$$

考虑波形在 x 方向是慢变的, 引入缓变空间度标 $X = 8(\varepsilon T)^{1/2} kx$, 将对 x 的导数换成对 X 的导数, 并保留至同阶, 则得 Lagrange 密度的修正项为

$$\langle \Delta \mathcal{L}_1 \rangle = -a^2 \varepsilon g \left[\frac{1}{2} B(p_x^2 + q_x^2) \right], \quad (34)$$

有

$$B = 16(dk(1 - T^2) + T).$$

再注意到水槽的水面面积并非无限, 在形成孤立波的时候, 局部液面隆起, 必然要使槽内相对静止的其余部分液面有下降。这就相当于基准标架的下移, 因此我们必须添入在 Lagrange 密度中由于 $\eta_0 \approx 0$ 所引起的修正。该项在文献[8,9]中相当于在系数 A_0 中添加 $\frac{1}{2}(1 - T^2)^2$ 因子, 而在此处经过 ε 参数修正后则为

$$\langle \Delta \mathcal{L}_2 \rangle = a^2 \varepsilon g 2(1 - T^2)^2(p^2 + q^2)^2. \quad (35)$$

这样得到 Lagrange 密度为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \rangle &= \langle \mathcal{L}_0 \rangle + \langle \Delta \mathcal{L}_1 \rangle + \langle \Delta \mathcal{L}_2 \rangle \\ &= a^2 \varepsilon g \left[\frac{1}{2} (\dot{p}q - p\dot{q}) + \frac{1}{2} \beta(p^2 + q^2) + \frac{1}{2} \gamma(p^2 - q^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} C(p^2 + q^2)^2 + \frac{1}{4} D(p^4 - 6p^2q^2 + q^4) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} B(p_x^2 + q_x^2) \right] + o(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$C = C' + 8(1 - T^2)^2.$$

四、运动方程和求解

依上述已得的 Lagrange 密度函数, 可以求出以 p, q 作为正则变量的运动方程式为

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial q_x} - \frac{\partial}{\partial q} \langle \mathcal{L} \rangle = 0, \quad (37a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial \dot{p}} + \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial p_x} - \frac{\partial}{\partial p} \langle \mathcal{L} \rangle = 0, \quad (37b)$$

则可求得相应的方程为

$$\dot{p} + Bq_{xx} + \beta q - \gamma q + C(p^2 + q^2)q - D(3p^2q - q^3) = 0 \quad (38a)$$

和

$$\dot{q} - Bp_{xx} - \beta p - \gamma p - C(p^2 + q^2)p - D(p^3 - 3pq^2) = 0. \quad (38b)$$

如令 $(-1) \times (38b)$ 式 $+(i) \times (38a)$ 式, 并令 $\rho = p + iq$, 以及考虑到水波在运动中的阻尼, 引入 δ 是实际阻尼对自由振荡时临界阻尼之比, 并定义

$$\alpha = \frac{\delta}{\varepsilon}. \quad (39)$$

则有方程

$$i(\rho_\tau + \alpha \rho) + B\rho_{xx} + \beta \rho + \gamma \rho^* + C|\rho|^2 \rho + D\rho^{*3} = 0. \quad (40)$$

这就是所导出复位移所要满足的非线性演化方程。如果 α, γ, D 等系数为零, 则上式可

退化成为通常的含立方非线性项的 Schrödinger 方程。而这相当于无阻尼 ($\alpha' = 0$) 和自由振荡 ($a_0 = a'_0 = 0$) 的情形。

现求(40)式的稳态解,令解有

$$\rho = S e^{i\psi} \operatorname{sech} UX \quad (41)$$

的形式,代入(40)式则将 $\operatorname{sech} UX$ 和 $\operatorname{sech}^3 UX$ 的系数分别等于零,并且消去参数 U 和记 $S e^{i\psi} = S_1 + iS_2$, 则可得下述方程:

$$2\alpha S_1 + 2(\beta - \gamma)S_2 + (C - 3D)S_1^2 S_2 + (C + D)S_2^2 = 0, \quad (42a)$$

$$2(\beta + \gamma)S_1 - 2\alpha S_2 + (C - 3D)S_1 S_2^2 + (C + D)S_1^3 = 0. \quad (42b)$$

这样的一组非线性方程,在适当的系数代入后,可以求出它们的数值解。

对所得的系数方程组,分离各不同倍数的相角,则可得方程

$$2\alpha \cos \psi + (2\beta - 2\gamma + CS^2) \sin \psi = 0. \quad (43a)$$

及

$$-2\alpha \sin \psi + (2\beta + 2\gamma + CS^2) \cos \psi = 0. \quad (43b)$$

联立解之则有

$$CS^2 = -2\beta \mp 4[\gamma^2 - \alpha^2]^{1/2}.$$

在相应于 $\mp$ 两种情况中,可以判明相应取 $+$ 号是符合实际要求的稳定情况。并代入 β, α, γ 等参量,则有

$$a^2 = \frac{64T^2}{CS^2 k^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + 4 \left[\left(\frac{\omega^2 a_0}{g} \right)^2 - \delta^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (44)$$

由上式可看出,为了能产生稳定的振幅 a , 必须有 $\frac{\omega^2 a_0}{g} > \delta$. 也就是说,要有足够的激励能量,使其足以抵消由于阻尼引起的损耗,才能维持孤立波的存在。再是激励频率需满足条件:

$$\omega^2 < \omega_1^2 \left\{ 1 + 4 \left[\left(\frac{\omega^2 a_0}{g} \right)^2 - \delta^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (45)$$

要求激频 ω 小于 ω_1 .

经过上述计算表明在弱非线性的二模垂直激励下,我们得到复位移 ρ 的方程是一个比较复杂的方程(40),它在稳态条件下是可解的(下面将对一组具体值给出数值解)。它在 x 向是双曲正割函数的波形。该方程在无阻尼和自由振荡的条件下,可退化到立方 Schrödinger 方程、在第二激励振幅 $a'_0 = 0$ 时,则可退化到单频正弦激励的情形。对这样激励条件下的孤立波。我们在实验中已观察到(将另文叙述)。并且测量了一些参数的范围,较好地符合(44),(45)式的要求。

在此还值得指出文献[9]中 ε 是取为小量,使在 Lagrange 函数中忽略 $o(\varepsilon^3)$ 以上的项。但那里选定的 $\varepsilon^{1/2} = \frac{a\lambda}{2}$ 关系和所列的实际参数使 ε 是大于 1 的量,并在求稳态解时,认为复振幅的模为 1,也不是都能成立(对该文的参数即不成立)。

我们依下述实际参数: $d = 2\text{cm}$, $b = 2.6\text{cm}$, 槽长 $l = 37.7\text{cm}$, $a_0 = 0.07\text{cm}$, $a'_0 = 0.06\text{cm}$, $a = 1.7\text{cm}$, $\omega = 31.4\text{rad/s}$, $\omega_1 = 34.1\text{rad/s}$, $\varepsilon = 0.068$, 对方程(42)求数值解,得 $S_1 = -0.0685$, $S_2 = 0.4947$.

附 录

a_{mn} 的矩阵元可表述如下:

$$a_{mn} = \delta_{mn} a_m + a_{lmn} \eta_l + \frac{1}{2} a_{ilmn} \eta_l \eta_l + \dots$$

此处

$$a_m = (k_m \tanh k_m d)^{-1} = \frac{g}{\omega_m^2},$$

$$a_{lmn} = C_{lmn} - D_{lmn} a_m a_n, \quad a_{ilmn} = -D_{ilmn} (a_m + a_n) + 2D_{ilm} D_{lni} a_i a_m a_n,$$

$$C_{lmn} = \frac{1}{b} \int_0^b \phi_l \phi_m \phi_n dy, \quad C_{ilmn} = \frac{1}{b} \int_0^b \phi_l \phi_i \phi_m \phi_n dy,$$

$$D_{lmn} = \frac{1}{b} \int_0^b \phi_l \nabla \phi_m \cdot \nabla \phi_n dy, \quad D_{ilmn} = \frac{1}{b} \int_0^b \phi_l \phi_i \nabla \phi_m \cdot \nabla \phi_n dy$$

参 考 文 献

- [1] M. Faraday, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **121**(1831), 299.
- [2] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* **16**(1883b), 50; **24**(1887), 145.
- [3] T. B. Benjamin, F. Ursell, *Proc. R. Soc. Lond.* **A225**(1954), 505.
- [4] R. Keolian *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1133.
- [5] J. Scott Russell, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, (1844), 319;
- 李振道, 场论与粒子物理学, 上册, 科学出版社, (1980).
- [6] 梅强中, 水波动力学, 科学出版社, (1984).
- [7] J. Wu *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1421.
- [8] A. Larraza, S. Putterman, *J. Fluid Mech.*, **148**(1984), 443.
- [9] W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **148**(1984), 451.
- [10] W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **75**(1976), 419; **83**(1977), 153.

THE SOLITARY WAVES IN TROUGH EXCITED BY TWO FREQUENCY MODES

WANG BEN-REN WEI RONG-JUE

(Institute of Acoustics, Nanjing University)

ABSTRACT

In a long and narrow trough parametrically excited by two frequency modes along vertical direction, the irrotational movement of an incompressible inviscid fluid has been investigated. Using the methods of multi-scale and average variational principle a nonlinear partial differential equations have been derived, that the complex displacement of the movement of fluid surface must satisfy. Under certain conditions, the solution of that equation can be obtained, it's a solitary wave with the waveform as hyperbolic secant function. Correspondingly the relations between the water parameters and the exciting variables have been discussed.