

联络空间上同调、规范群上同调继承系 与族指数定理*

侯伯宇

(西北大学现代物理研究所)

1986年4月1日收到

提 要

本文讨论了时空上 de Rham 与联络空间的水平变更或与联络空间垂直变更构成的双上同调系列间的关系以及与族指数定理的关系。

瞬子、真空 θ 角、反常散度、反常对易、分数荷等量子场论大范围整体拓扑效应是近年来量子场论的重要课题,在量子霍尔效应及聚乙炔孤子等效应上已显示了其实际应用的前景。这里,整体量子效应的整体性不但指整个底空间,也指整个的含参数联络空间,后者又是由于考虑到费密子的整个谱的贡献而引进的。费密子谱与规范场拓扑行为的联系,数学上表为将解析指数与拓扑指数联系起来的指数定理。例如非 Abel 反常的表达式可用族指数定理得到。与此相应,近年来发现了有趣的拓扑效应继承性。Bonora 等人, Stora 与 Zumino^[1]给出了底外微分与规范代数的 d, δ 双上同调继承系。相应的上闭链 ω 给出反常散度、反常对易。Faddeev^[2] 引进了规范群变换 Δ 与外微分 d 的双上同调;上闭链 Q 描述有效拉氏量与不可积相因子。上述变更 δ 与 Δ 都是沿 $\alpha(\alpha/\mathcal{F}, \mathcal{F})$ 的纤维 $\mathcal{F}$ 的垂直变更。物理上要考虑到局部动力学变量、规范等价类 $\alpha/\mathcal{F}$ 的变更。与此相应,郭汉英等人^[3]与我们讨论了联络空间 α 上的任意变更 δ (或 Δ) 与时空 M 上 d 的双系列 q (与 Q)^[3]。Gelfand^[4] 与 Faddeev 等人引进了 α 上的水平变更 δ_h (或 Δ_h) 与 d 的双系列 q (与 Q)。垂直上同调与水平上同调是紧密联系的,这表现为同伦 $\pi^k(\mathcal{F}) = \pi^{k+1}(\alpha/\mathcal{F})$ 。于是,分别表征二者的 Q 与 Q 也应有联系。我们和宋行长^[5]、Faddeev 曾给出 Q 与 Q 的递推与继承关系,但是由于同一时空维上 $\Delta_k(k$ 单形)与 $\Delta_k(k+1$ 单形)的项数不匹配,使得对应关系较为繁杂,不明显。与族指数定理的关系更不直截了当。本文采用在主丛 $p(M, G)$ 与 $\alpha(\alpha/\mathcal{F}, \mathcal{F})$ 上的自然联络,统一处理上述水平与垂直变更,使二者的关系明显。并引进在 M 或 α 或 $\mathcal{F}$ 内的一般闭链上的积分,用来构成推广的有限双上同调闭链系列,从而易见与指数及族指数的关系^[5]。为此我们先仿照 Stora 用 Atiyah-Singer 的方法构造 $p \otimes \alpha$ 上的联络与曲率形如下:

丛 $p(M, G): M$ 为时空流形, G 为半单 Lie 群,例如么正群。联络的局部式 $a = A_\mu(x)dx^\mu$ 取值于 Lie 代数。在规范变换 $g(x)$ 作用下,变为

* 中国科学院科学基金资助的课题。

1) 宋行长,私人通讯。

$$A = g^{-1}ag + g^{-1}dg, \quad (1)$$

$g(x)$ 为 $x \in M$ 到 G 上的映象.

丛 $a(\alpha/\mathcal{F}, \mathcal{F})$: α 为联络空间, 即联络 a 的集合. $\mathcal{F}$ 为规范群, 即 $q(x)$ 的集合. $\alpha/\mathcal{F}$ 为不同的轨道的集合. 如取不同的 a 代表不同的轨道, (1) 式中 g 取遍 $\mathcal{F}$ 则对给定的 a 跑遍轨道上的 A , 即一个纤维. 而一般的余切矢 δA 可写为

$$\delta A = g^{-1}\delta a g - D_A g^{-1}\delta g. \quad (2)$$

式中 D_A 为 p 上协变外微分 $D_A = d + A \wedge$.

$$\text{丛 } \alpha \text{ 的联络 } \mathcal{A} = -G_A D_A^+ \delta A, \quad (3)$$

式中 Green 算子 $G_A = (D_A^+ D_A)^{-1}$, D_A^+ 为 D_A 的伴随算子, 当余切矢 δA 沿纤维时, $\delta_a = 0$, 由(2)和(3)式得

$$\mathcal{A}|_{\text{纤维}} = g^{-1}\delta g. \quad (4)$$

符合联络在基本矢量方向取值结构群代数的定义. 据此可将 δA 分为水平及垂直分量 $\delta_h A, \delta_v A$:

$$\delta_h A = \delta A - D_A G_A D_A^+ \delta A, \quad \delta_v A = D_A G_A D_A^+ \delta A = D_A \mathcal{A}. \quad (5)$$

的确, 在 $\delta_h A$ 方向, $\mathcal{A} = 0$; 而 $\delta_v A$ 可表为 $\mathcal{F}$ 余切矢 $\mathcal{A}$ 的 D_A , 且当 $\delta a = 0$ 时, $\delta_v A = \delta A$.

然后引进总的联络, 在 $M \times \alpha/\mathcal{F}$ 的 x, A 点上纤维 $\mathcal{F}(x)$ 处,

$$A + \mathcal{A} = A - G_A D_A^+ \delta A. \quad (6)$$

于是得曲率

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (d + \delta)(A + \mathcal{A}) + \frac{1}{2} [A + \mathcal{A}, A + \mathcal{A}] \\ &= dA + \frac{1}{2} [A, A] + (1 - D_A G_A D_A^+) \delta A + \delta \mathcal{A} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\mathcal{A}, \mathcal{A}] = F + \delta_h A + \delta_h \mathcal{A} = F + \delta_h (A + \mathcal{A}). \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $F = dA + A^2$ ($A^2 \equiv A \wedge A$), 用到了(5)式, 并对 α 上的曲率形用了“曲率形等于联络形的外微分的水平分量”这一定理.

根据族指数定理, 在流形 M 上族指数的陈类为 $Q^k(M) = \int_M q_{2n}$. 这里 q_{2n} 为 $\mathcal{F}$ 的

n 阶不变多项式 $p(\mathcal{F})$. M 的维数为 $2n - k$. 式中如将 $\mathcal{F}$ 按 $M \times \alpha/\mathcal{F}$ 的双幂次展开, 则易见仅 $(2n - k, k)$ 次项有贡献. 根据族指数定理, 此式只是 $\alpha/\mathcal{F}$ 上的 k 形式, 换句话说, $\delta_v A$ 无贡献, 故可选局部水平规范 $D_A \delta A = 0$, 于是 $\mathcal{A} = 0$. 仿照 Faddeev, 可写 $\mathcal{F} = F + \delta_h A$, 而

$$q_{2n} = \sum_k q_{2n-k}^k \quad (8)$$

是 q_{2n} 按双幂的展式. 由 q_{2n} 的不变性 $(d + \delta_h)q_{2n} = 0$, 故

$$dq_{2n}^0 = 0, \quad dq_{2n-k}^k = -\delta_h q_{2n-k+1}^{k-1}. \quad (9)$$

如再引进

$$Q_{2n-k}(\Delta^k) = \int_{\Delta^k} q_{2n-k}^k. \quad (10)$$

式中 Δ^k 为 $\alpha/\mathcal{P}$ 上的 k 链.

$$Q^k(C_{2n-k}) = \int_{C_{2n-k}} q_{2n-k}^k, C_m \text{ 为时空中 } m \text{ 链.} \quad (11)$$

则由(9)式及 Stokes 定理易证

$$-Q_{2n-k}(\partial\Delta^{k+1}) = dQ_{2n-k-1}(\Delta^{k+1}), \quad (12)$$

$$-Q^k(\partial C_{2n-k+1}) = \delta_h Q^{k-1}(C_{2n-k+1}). \quad (13)$$

族指数陈类式中取“水平”规范即可见其值,如(11)式所给.如取 Δ 为单纯形, (12)式即 Faddeev 的 d 与差分 Δ_h 双上调系列. 还可引进

$$Q(\Delta^k, C_{2n-k}) = \int_{C_{2n-k}} Q^k(C_{2n-k}) = \int_{\Delta^k} Q_{2n-k}(\Delta^k). \quad (14)$$

易见

$$-Q(\Delta^k, \partial C_{2n-k+1}) = Q(\partial\Delta^k, C_{2n-k}). \quad (15)$$

由(13)式

$$\delta_h Q^k(M_{2n-k}) = 0 \text{ 当 } \partial M_{2n-k} = 0. \quad (16)$$

但由于底 $\alpha/\mathcal{P}$ 的非平庸性, $Q^k(M_{2n-k}) \neq \delta_h ?$. 可将之提升为 α 上的 K 形式,即不再限制为“水平”规范,这时代替(16)式有: $\delta Q^k(M_{2n-k}) = 0$.

$$Q^k(M_{2n-k}) = \delta Q^{k-1}(M_{2n-k}). \quad (17)$$

可求得 $Q^{k-1}(M_{2n-k})$ 的显式,用满足下式的陈 Simons 形 ω_{2n-1} 表之.

$$(d + \delta)\omega_{2n-1} = q_{2n}. \quad (18)$$

这里的 ω_{2n-1} 易由标准的 transgression 式求得.

例如当 $q_{2n} = \frac{1}{(2\pi i)^n n!} \text{STr}(\mathcal{F}^n)$, 则

$$\begin{aligned} \omega_{2n-1} &= \int_0^1 dt \frac{1}{(2\pi i)^n (n-1)!} \text{STr}(A + \mathcal{A}, \mathcal{F}^{n-1}), \\ \mathcal{F}_t &\equiv t\mathcal{F} + (t^2 - t)(A + \mathcal{A})^2. \end{aligned} \quad (19)$$

将(18)式两方在无边的 M_{2n-k} 上积分,比较(17)式得

$$Q^k(M_{2n-k}) = \int_{M_{2n-k}} q_{2n}, \quad Q^{k-1}(M_{2n-k}) = \int_{M_{2n-k}} \omega_{2n-1}. \quad (20)$$

式中实际上只有双幂次 $q(2n-k, k)$, $\omega(2n-k, k-1)$ 有贡献.

现将 ω_{2n-1} 限制到纤维上,即取 $\delta a = 0$,

$$\delta A = -D_A g^{-1} \delta g \equiv D_A(-v), \text{ 于是 } \mathcal{A} \equiv g^{-1} \delta g \equiv v, \mathcal{F} = F. \quad (21)$$

$$\omega_{2n-1} = \sum_k \omega_{2n-k-1}^k \quad (22)$$

$$-\delta_v \omega_{2n-k-1}^k = d\omega_{2n-k}^{k+1}. \quad (23)$$

式中按 v 的幂次展开了 ω_{2n} 垂直变更 δ_v 如 BRS

$$\delta_v v = -v^2, \delta A = -D_A v. \quad (24)$$

可进一步引进在轨道上的 k 链 Γ^k 上的积分

$$Q_{2n-k-1}(\Gamma^k) \equiv \int_{\Gamma^k} \omega_{2n-k-1} \quad \Gamma^k \in \mathcal{P}, \quad (25)$$

$$\alpha(\Gamma^k, C_{2n-k-1}) \equiv \int_{C_{2n-k-1}} Q_{2n-k-1}(\Gamma^k) \quad C_{2n-k-1} \in M. \quad (26)$$

由 (23), (25), (26), (17) 式易证

$$Q_{2n-k}(\partial\Gamma^k) = dQ_{2n-k-1}(\Gamma^k), \quad (27)$$

$$\alpha(\partial\Gamma^k, C_{2n-k}) = \alpha(\Gamma^k, \partial C_{2n-k}), \quad (28)$$

$$Q(\Delta^k, C_{2n-k}) = \alpha(\Sigma^{k-1}, C_{2n-k}) \frac{\Sigma^{k-1} \in \mathcal{P}}{\Sigma^{k-1} = \partial\Delta^k}. \quad (29)$$

特别是有下式:

$$\begin{aligned} \pi^{k+1}(\alpha/\mathcal{P}) &= Q(\Delta^{k+1}, M_{2n-k-1}) = \alpha(\Sigma^k, M_{2n-k-1}) \\ &= \pi^k(\mathcal{P}) \quad \text{当 } \partial M_{2n-k-1} = 0, \partial\Delta^{k+1} = \Sigma^k \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (30)$$

本文的 Q_{2n-k} 系列可与物理的动力学 $\frac{\delta}{\delta A}$ 的各上同调联系, 但“水平”规范只能是局部的. 文献[3]的 Q_{2n-k} 系列不限于 δ_h , 但与族指数不直接联系, 而可有 Cech-de Rham 型意义. Q^k 系列则可有一般规范定义, 与族指数, Q^k 及同伦有直接联系.

最近^[6], 我们曾讨论了 θ 真空, 2+1 维拓扑拓性作用量; 4 维非 Abel 反常时, 其波函数在 δ_v 的变化下如何变化, 如 $Q_3(\Gamma^0), \omega_3^0; Q_2(\Gamma^1), \omega_2^1; Q_1(\Gamma^2), \omega_1^2$. 相应地有: $\alpha(\Sigma^0, M_3) = \pi^0(\mathcal{P}^3); \alpha(\Sigma^1, M_2) = \pi^1(\mathcal{P}^2); \alpha(\Sigma^2, M_1) = \pi^2(\mathcal{P}^1) (\partial\Sigma = 0, \partial M = 0)$, 分别描述其在纤维 $\mathcal{P}$ 上的同伦性. 今由本文不难说明必然有在 α 上的 $Q(\Delta^1, M_3) = \pi^1(\alpha^3/\mathcal{P}^3), Q(\Delta^2, M_2) = \pi^2(\alpha^2/\mathcal{P}^2), Q(\Delta^3, M_1) = \pi^3(\alpha^1/\mathcal{P}^1)$ 分别等于上述 $\alpha(\partial\Delta^{k+1} = \Sigma^k)$. 于是可以有在 $\alpha/\mathcal{P}$ 上的水平 δ_h 下的 k 上链 $Q^1(M_3), Q^2(M_2), Q^3(M_1)$, 的确, 这时的 q_1^3, q_2^2, q_3^1 分别给出三种情况下的 $U(1)$ “联络”、“曲率”、“Jacobi”, 而且可以提升到 α 上表为“相角”、“联络”、“曲率”的外微分, 并使这三个量与轨道上 δ_v 下的对应量联系.

总之, 本文沟通并区别了 $\delta, \delta_h, \delta_v, \alpha, \alpha/\mathcal{P}, \mathcal{P}$, 澄清了何者为闭的, 何者为正合的, 弄清了与同伦的关系, 各切方向各流形构成谐和的整体.

参 考 文 献

- [1] L. Bonora and P. Cotta-Ramusino, *Commun. Math. Phys.*, **87**(1983), 589; R. Stora, Cargese Lecture, (1983); B. Zumino, Relativity, Groups and Topology II, (1983).
- [2] L. D. Faddeev and C. L. Shatashvili, *Theor. Math. Phys.*, **60**(1984), 770; A. G. Reiman, M. A. Semenov-Tian-Shansky and L. D. Faddeev, *Func. Anal. Appl.*, **18**(1984), 64.
- [3] 郭汉英、侯伯宇、吴可、王士坤, *Comm. Theor. Phys.*, **4**(1985), 145; 侯伯宇、侯伯元、王珮, *Lett. Math. Phys.*, 待发表.
- [4] A. M. Gabriellov, I. M. Gelfand and M. V. Losik, *Func. Anal. Appl.*, **9**(1975), 12.
- [5] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, **81**(1984), 2597.
- [6] 侯伯元、侯伯宇, 已投高能物理与核物理.

COHOMOLOGY DESCENT ON CONNECTION SPACE AND GAUGE FIELD, FAMILY INDEX THEOREM

Hou Bo-yu

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian)

ABSTRACT

In this paper, we give the relation of double cohomology series constructed by de Rham cohomology and by horizontal or vertical variations in connection space. The relation with family index theorem is also shown.