

# 计算机产生全息光学元件用于 校正椭圆高斯激光束

C. S. IH

(美国特拉华大学电机系)

王永昭 吴继宗

相 连 钦

(天津大学精密仪器系)

(美国特拉华大学电机系)

1984 年 11 月 5 日收到

## 提 要

本文讨论了计算机产生全息光学元件,用以校正椭圆高斯激光束.计算这个全息光学元件的详细数学方程已作了推导.由计算机控制绘图机绘制了全息图,缩制了全息光学元件,并得出了实验结果.

## 一、引 言

注入式砷化镓激光器具有小巧、输出功率高、工作可靠和价廉的优越性.这类激光器已有多种应用.例如在光通讯中作为光源,所占的体积很小.电视唱盘的放映、印刷行业的全息激光扫描器,信息的采集以及其他各种可能的显示等.这里已经考虑了利用砷化镓激光器在“易扫描系统”中<sup>[1-3]</sup>.

但是,不足的是由这些砷化镓激光器所辐射的激光束通常为(至少是近似于)椭圆高斯光束<sup>[4,5]</sup>.如果这光束被一普通的光学透镜会聚,将同样得到一个椭圆高斯点.这种现象的存在限制了激光器的有效利用.为了克服这一影响,我们试用全息光学元件,以校正椭圆高斯束,为砷化镓激光束的校正提供一种手段.

全息光学元件在光学系统中比起普通透镜,具有一些特点.首先是全息透镜很薄,重量轻.非球面全息透镜易于制造,加工成本低.但要制作适用于砷化镓激光器的红外全息元件,尚存在两个主要困难.其一是目前缺乏一种高分辨率(1000 线/毫米以上)的红外记录介质.其二是如果要由砷化镓激光器所发出的光束直接记录全息图,则相干性和稳定性都还达不到要求.平衡这些因素,计算机产生红外全息光学元件是一种可试的方法.

## 二、数学推导

为了计算,椭圆高斯光束可以表示为圆高斯光束,令其通过一个柱面透镜来获得,或者当一束激光由非球面的共振腔输出,其共振腔的反射镜在  $y-z$  和  $x-z$  平面里,光束具

有不同的曲率半径,如图 1 所示。

椭圆高斯光束场分布  $E_1(x', y, z')$  可以表示为

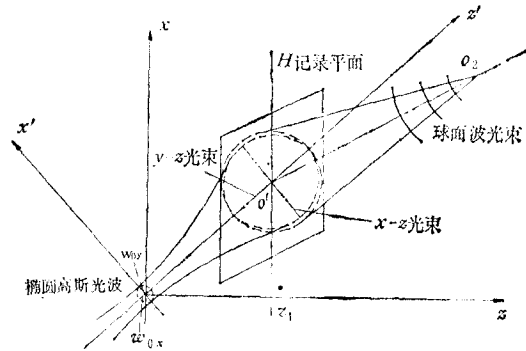


图 1 椭圆高斯波前  $o$  与球面波前  $o_2$  在  $H$  平面上干涉的记录几何

$$E_1(x', y, z') = E_0 \frac{\sqrt{w_{0x'} w_{0y}}}{\sqrt{w_x'(z') w_y'(z')}} \exp \left\{ -i[kz' - \eta(z')] \right. \\ \left. - x'^2 \left[ \frac{1}{w_x'^2(z')} + \frac{ik}{2R_x'(z')} \right] - y^2 \left[ \frac{1}{w_y'^2(z')} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{ik}{2R_y(z')} \right] \right\} \quad (1)$$

式中参数  $w_{0x'}$  和  $w_{0y}$  为光束的最小束腰尺寸值,  $w(z')$  是光束大小,  $R(z')$  为高斯光束的曲率半径,  $k = 2\pi/\lambda$ 。

$$w_x'^2(z') = w_{0x'}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda(z' - z_{x'})}{\pi w_{0x'}^2 n} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

$$R_x'(z') = z' \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_{0x'}^2 n}{\lambda(z' - z_{x'})} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

将  $x'$  换成  $y$ , 可以写出  $w_y'(z')$ ,  $R_y(z')$  相似的表示式。方程(1)中的角函数  $\eta(z')$  可以表示为

$$\eta(z') = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\lambda(z' - z_{x'})}{\pi w_{0x'}^2 n} \right) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\lambda(z' - z_{y'})}{\pi w_{0y}^2 n} \right) \quad (4)$$

式中  $\lambda$  为光波波长,  $n$  为介质的折射率。在方程(1)中, 首先感兴趣的是位相。设等于  $\phi_{01}$ , 可以表示为

$$\phi_{01}(x', y, z') = \left\{ -[kz' - \eta(z')] - x'^2 \left[ \frac{k}{2R_x'(z')} \right] \right. \\ \left. - y^2 \left[ \frac{k}{2R_y(z')} \right] \right\}. \quad (5)$$

为了计算方便, 这里需要进行坐标变换, 假设  $x', y, z'$  和  $x, y, z$  分别表示旧坐标系和新坐标系。并设

$$x' = x \cos b - z \sin b, \\ z' = x \sin b + z \cos b. \quad (6)$$

方程(1)–(5)是以旧坐标系来表示的. 当构成全息图时要求椭圆高斯束和球面波光束都必需充满全息图的孔径. 这就是为了将椭圆高斯束校正为球面波前的基本出发点. 为此, 这里假设椭圆高斯束用一个倾斜角  $\beta$ , 沿  $z'$  轴入射到  $z = z_1$  的全息记录平面上, 如图 1 所示. 在图上  $z' = 0$  的坐标原点处, 对  $y-z$  光束来说,  $2w_{0y}$  是束腰位置,  $o_2$  是与  $z'$  轴方向构成一夹角的球面波的会聚点.

倾角  $\beta$  应选取多大数值方能使  $w_x(z)$  近似等于  $w_y(z)$ , 对此需要推导  $\beta$  角与  $w_x(z)N$  之间的关系. 这里  $w_x(z)N$  是  $w_x(z)$  在高斯束转过  $\beta$  角之后在  $z = z_1$  时的数值. 为了求得  $w_x(z)N$  与  $\beta$  角之间的函数关系, 从而确定全息光学元件的轮廓尺寸, 可以采用两种方法进行计算, 从而达到几何求解和解析验证的目的.

### 1. 几何求解

因为  $w_{0x'}$  很小, 由方程式(2)可以将  $w_{x'}(z')$  和  $z'$  之间的关系作为近似线性来考虑. 这是将椭圆高斯束在  $yz$  和  $xz$  两个方向上分别作为两束独立的光束. 高斯波前视为球面波前, 并从束腰上的一点发散出来, 如图 2 所示. 相对于  $\overline{o'p}$  和  $\overline{o'l}$  两段不同的束腰, 因为转轴后  $\overline{o'p}$  小于  $\overline{o'l}$ . 如果  $\overline{o'p}$  能满足,  $\overline{o'l}$  也不会超出高斯束外, 故首先考虑  $\overline{o'p}$  一段.

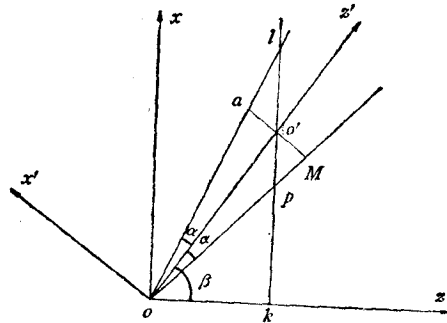


图 2 将高斯光束近似为一球面波, 从  $z'$  轴上的一点(束腰上)发散

$$\overline{o'p} = w_x(z)N = \frac{w_y(z') w_y z'}{w_{x'} z' \operatorname{tg} \alpha} [\sin \beta - \cos \beta \cdot \operatorname{tg}(\beta - \alpha)]. \quad (7)$$

根据方程(7)而求得的  $\beta$  角与  $\overline{l'p}$  (相当于  $2w_x(z)N$  的特性曲线, 如图 3 所示). 图 4 给出了  $\overline{lo'}/\overline{o'p}$  的比值随  $\beta$  角变化的关系曲线. 从图 3 可以看到, 为了使  $w_x(z) \approx w_y(z) = 4$ ,  $\beta$  角应转过 77 度.

### 2. 解析验证

设  $D = \overline{l'p}$ , 及  $l$  点和  $p$  点的坐标分别为  $x_1$  和  $x_2$ . 求得在新坐标下的  $D$  值为

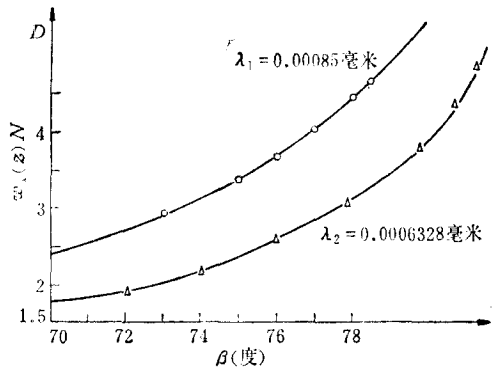
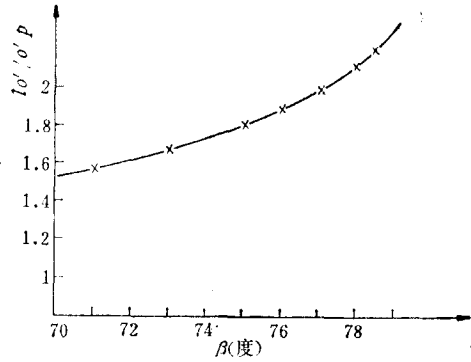
$$D = \frac{2\lambda\pi w_{0x'} \cdot z' \cos \beta}{(\pi w_{0x'} \cos \beta)^2 - (\lambda \sin \beta)^2}. \quad (8)$$

解得

$$\beta = \arccos \left\{ \frac{\lambda \pi w_{0x}' [z' \pm [(z')^2 + D^2]^{1/2}]}{D \pi^2 w_{0x}'^2 + D \lambda^2} \right\}. \quad (9)$$

若将有关数据代入,且取  $D = 4$  毫米,  $\lambda = 850.0$  毫微米,可得  $\beta = 77$  度,其结果与几何求解的数值相等. 为了计算方便,以下运算中将采用新的坐标系统. 将旧坐标系统变换到新坐标系统,其有关方程可以写为如下形式:

$$R_x(z) = (x \sin \beta + z \cos \beta) \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_{0x}^2 n}{\lambda (x \sin \beta + z \cos \beta - z_x)} \right)^2 \right], \quad (10)$$

图3  $w_x(z)N$  随  $\beta$  角而变化的关系曲线图4  $I_o'/o'p$  的比值随  $\beta$  角变化的关系

$$R_y(z) = (x \sin \beta + z \cos \beta) \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_{0y}^2 n}{\lambda (x \sin \beta + z \cos \beta - z_y)} \right)^2 \right], \quad (11)$$

$$\eta(z) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\lambda (x \sin \beta + z \cos \beta - z_x)}{\pi w_{0x}^2 n} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\lambda (x \sin \beta + z \cos \beta - z_y)}{\pi w_{0y}^2 n} \right], \quad (12)$$

$$\phi_{01}(x, y, z) = - \left\{ [k(x \sin \beta + z \cos \beta) - \eta(z)] - (x \cos \beta - z \sin \beta)^2 \left( \frac{k}{2R_x(z)} \right) - y^2 \left( \frac{k}{2R_y(z)} \right) \right\}. \quad (13)$$

至此已经写下了椭圆高斯光束在新坐标系统中的有关方程. 为了对会聚球面波进行运算,假设

$$E_2(x, y, z) = A_2 \exp [i \phi_{02}(x, y, z)]. \quad (14)$$

这里  $E_2(x, y, z)$  表示球面波的场分布,振幅  $A_2$ , 位相  $\phi_{02}(x, y, z)$ . 同样可以将位相写为

$$\phi_{02}(x, y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2} - \phi_2. \quad (15)$$

式中  $a, b, c$  为球面波中心坐标,  $\phi_2$  为起始位相. 椭圆高斯光束和会聚球面波将记录下离轴全息图. 干涉条纹强度的空间变化由下式控制:

$$\left\{ (x \sin \beta + z \cos \beta) - \frac{1}{k} \eta(z) - (x \cos \beta - z \sin \beta)^2 \left( \frac{1}{2R_x(z)} \right) \right\}$$

$$-y^2 \left( \frac{1}{2R_y(z)} \right) + [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2} = M\lambda. \quad (16)$$

至此已完成了为全息图的计算所需的基本方程式的推导。进一步需解出满足方程(16)的  $x, y, z$  的数值。在全息图上所有取样点的数值都得到之后,将具有相同  $M$  值的点  $r(x, y, z)$ , 由计算机控制绘图机绘出等位相轮廓线。这里  $M$  为整数值。

### 三、全息图的取样和产生

物波与参考波在这种情况下将作为离轴全息图来记录。束腰  $2w_{0y}$  的位置在原点  $z'_y = 0$  上,束腰  $2w_{0x}$  在  $z'$  轴的  $z'_x$  位置上。但是这些数值很小,在计算中可以忽略。会聚的球面波同样是从左向右入射到全息图,并聚焦在  $o_2$  点上。如上所述,必需考虑当  $w_x(z)$  接近于  $w_y(z)$  时,由方程(7)求出  $\beta$  值的大小。 $\beta$  确定之后,可以通过方程(10), (11)和(12)在新坐标系来获得。当坐标  $z$  取为常数,只需计算  $x, y$  值,即可绘制全息图。当  $R_x(z), R_y(z)$  和  $\eta(z)$  求得初始值后,参数  $a, b, c$  可以根据结构的要求来确定。

因为全息图是关于  $xz$  平面对称的,因此,整个全息图可以由考虑对称来获得。将方程(16)展开,并整理后得如下方程式:

$$Ax^4 + B_{(z)}x^3 + C_{(y,z)}x^2 + D_{(y,z)}x + E_{(y,z)} = 0, \quad (17)$$

式中  $A, B, C, D, E$  是方程的已知系数,比较长,不再一一写出。当设  $z$  为常数,对于  $y \geq 0$ , 在计算中取 11 点  $y$  值,但对每个  $y$  值有四个  $x$  值,需正确地判断从中取一个,使之满足构成全息图的条件。全息图的制作是由逐步缩微来获得。一条干涉条纹由 21 点取样值组成。方程(17)可以跑双循环的形式写成计算机程序来求解  $x, y$  值。具有相同  $M$  值的所有点  $r(x, y)$  将联成同一条线,从而形成等位相轮廓线。然后将所有的  $M_0, M_1, M_2, \dots$  绘在一起构成全息图。

在计算过程中,为了证明这种方法是正确的,曾将  $R(x)$  放大,这时椭圆高斯光束近

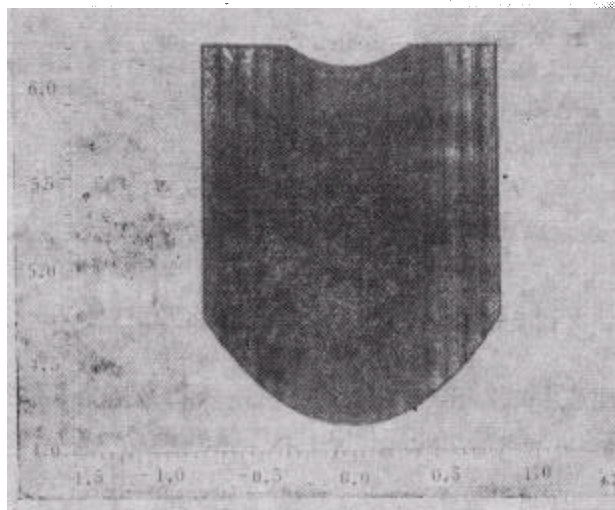


图 5

似为一个球面波形,相当于双球面波干涉的情况。

一个由计算机控制绘图机所绘制的计算机全息图示于图 5, 绘制的时间为 20 分钟。

#### 四、实验结果

椭圆高斯光束和球面波束之间的夹角为 6 度,全息图与  $x$  轴对称而绘制的。为了方便,在试验中采用波长  $\lambda = 632.8$  毫微米,全息图尺寸近似为一毫米直径的一个圆。这样每毫米约有 156 线的干涉条纹。每线有 21 个取样点。所绘制的全息图和实验全息图的缩放比例为 113:1。全息图的缩微分两步进行。一个 Nikon 镜头  $f = 50$  毫米,  $f/1.4$  用于第一步,柯达-Panatomic X 胶片, 32ASA 用来作为记录介质,这种胶片具有极细的颗粒和很高的反差。在第一步中从计算机所产生的全息图缩微到胶片上的全息图,实际尺寸为 3.96 毫米。故第一步的缩微实际为 28.3:1。第二步的缩微中采用一个  $f = 55$  毫米,  $f/2$  的超微 Nikkor 镜头,这个镜头具有 500 线/毫米的分辨率,使用波长为 546.0 毫微米,专为 1:4 的缩放而设计的。最后缩微记录在柯达 649F 干版上。制得的实际全息图的尺寸为 1.01 毫米,误差为 1% 左右。图 6 为修正参数后由计算机控制绘图机,绘制的另一张全息图。

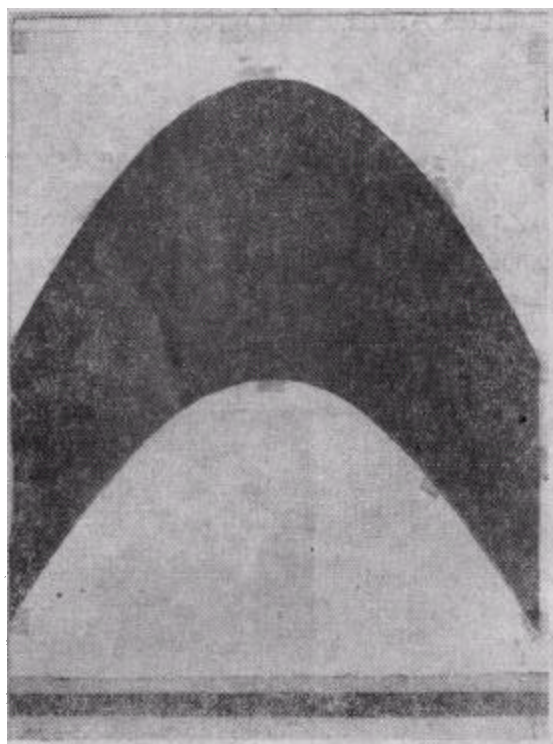


图 6

全息图的再现几何如图 7 所示。为了便于证明这个结果,用一个共轭发散球面波入射到全息图上,即

$$E_2^*(x, y, z) = A_2 \exp[-i\phi_0(x, y, z)]. \quad (18)$$

这里假设全息图平面上具有相同的复振幅。光束由全息图的左边入射。激光束由一个具有焦距  $f = 69$  毫米的透镜聚焦。垂直于再现光束在  $G$  平面上的光斑尺寸为 1.34 毫米,其再现的实象处在原来的位置上。从再现现象到全息图的垂直距离为 2 毫米。再现现象的位置与原计算的椭圆高斯束的位置一致。由于再现现象的光斑尺寸很小,不便直接照相。为此,选用一个  $f/2$  的超级投影镜头进行照相。其结果如图 8 所示。从图 8 可以看到,当通过全息图后零级衍射处在中心位置,一级衍射被调制为一个会聚的实象,另一个调制波前形成一个发散的虚象。当用测量显微镜对这个再现现象的轮廓进行测量时,其轮廓的参数值为第一次  $w_{zx} = 0.498$ ,  $w_{zy} = 2.520$ ; 第二次  $w_{zx} = 0.504$ ,  $w_{zy} = 2.523$ 。 $w_{zx}$  和  $w_{zy}$  的比率为  $w_{zy}/w_{zx} = 5.03$ 。从方程(2)可以得知,由于  $w_{0x}'$  和  $w_{0y}$  很小,

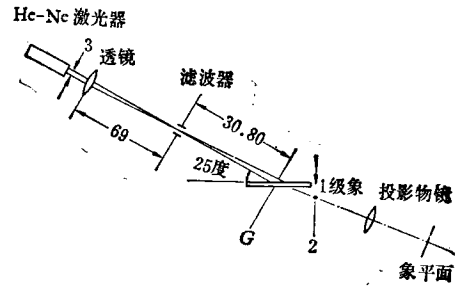


图 7

并可以略去,因此方程(2)可以写为

$$w_x'(z') = \frac{\lambda z'}{\pi w_{0x}' n},$$

$$w_y(z') = \frac{\lambda z'}{\pi w_{0y} n}. \quad (2')$$

$w_x' z'$  和  $w_{0x}'$  或者  $w_y z'$  和  $w_{0y}$  之间的关系是线性反比的. 在开始计算时假设:  $w_{0x}' = 0.0035$  毫米,  $w_{0y} = 0.0007$  毫米, 故其比率  $w_{0x}'/w_{0y} = 5.0$ , 因此实象的测量值与起始一致.

图 9 仅说明用插入法修改绘图程序所得的全息光学元件的再现结果. 当取样点数增

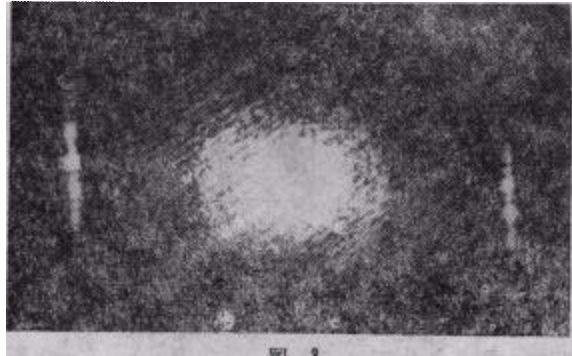


图 8



图 9 修正参数后的全息光学元件的再现结果

多, 绘图线条更为连续, 再现中的噪声可以进一步改善。

## 五、结 论

计算机产生全息图可以用来制作长波段区域的全息图, 例如红外, 微米波, 甚至超声波。在可见波段区域内, 当不能找到合适的记录介质时, 计算机产生全息图同样是适用的。

由物波和参考波的数学方程推得了位相差方程, 计算机控制绘图机绘得了全息图, 计算和实验的结果是一致的。这种方法可用于来校正任一形状的光束, 只要光束的数学方程可以描写和运算。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] C. S. Ih, *Appl. Opt.* **16** (1977), 2137.
- [ 2 ] C. S. Ih, *Appl. Opt.* **17**(1978), 748.
- [ 3 ] C. S. Ih, N. Kong and T. Giriappa, *Appl. Opt.*, **17**(1978), 1582.
- [ 4 ] A. Yariv, *Quantum Electronics* (Second Edition), (1975).
- [ 5 ] C. S. IH, 王永昭, Computer-Generated HOE For Injunction Lasers, 1982 Annual Meeting of The Optical Society of America.

# COMPUTER-GENERATED HOLOGRAM FOR ELLIPTICAL GAUSSIAN WAVEFRONT CORRECTION

C. S. IH

*(Department of Electrical Engineering, University of Delaware, USA)*

WANG YONG-ZHAO WU JI-ZONG

*(Department of Precision Instruments Engineering, Tianjin University)*

XIANG LIAN-QIN

*(Department of Electrical Engineering, University of Delaware, USA)*

## ABSTRACT

Computer-generated hologram for elliptical gaussian beam correction has been investigated, detail mathematical equations of calculating hologram phase difference are derived. The holograms which are drawn by a computer-driven plotter are given. The holographic optical elements are obtained from CGH. The experiment result to demonstrate the correct calculation is also shown in this paper.