

# 实现光学变换的单个全息透镜的有效设计

董 碧 珍 顾 本 源

(中国科学院物理研究所)

1985 年 4 月 2 日收到

## 提 要

本文在一般情形(旁轴和非旁轴情形)下,讨论利用单个全息透镜所组成的光学系统实现任意给定的线性变换时全息透镜的有效设计.研究了确定全息透镜的振幅-相位分布的方程组在各种参数下的解,并讨论了该解对参数变化时的稳定性.在非旁轴情形下,同样存在着可资利用的解.以三种不同序的四维和八维的 Walsh 变换为例,具体地研究了各种参数,例如全息透镜与输入平面以及输出平面之间的距离、全息透镜的取样点数目等,对该系统所实现的变换与给定的变换之间逼近程度的影响,从而为设计切实可行的系统提供了有益的启示和多种选择参数的方式.

如何应用光学的方法来实现一般线性变换的问题,很久以来一直是科学工作者们感兴趣的并致力于研究和解决的重要课题之一<sup>[1-4]</sup>.

文献[1]的作者,不久前曾提出在旁轴近似和离散取样情形下,利用单个全息透镜系统实现任意给定的线性变换是可能的,并给出了为实现给定变换而设计全息透镜的振幅-相位分布的求解方法<sup>[1]</sup>.在其具体计算中,要求满足旁轴近似条件,同时对全息透镜的取样点数目,以及它与输入平面和输出平面之间的距离施加一定的限制,使确定全息透镜的振幅-相位分布的线性方程组中的有关系数构成单位矩阵,求解大大地简化了.本文在更普遍情形(不限于旁轴近似)下,通过严格求解有关的方程组,研究它们的解对各种参数的依赖性和稳定性,试图在非旁轴情形或旁轴近似下找到可资利用的解,为实际光学系统的设计提供了更广泛的和有效的途径.本文以三种序的四维和八维 Walsh 变换为例,详细地研究了各种参数对单个全息透镜系统实现给定的 Walsh 变换时的最佳逼近程度的影响.

## 基 本 方 程

利用单个振幅-相位型的全息透镜实现一个给定的线性变换(不限于么正变换)的典型光学系统如图 1 所示.这里,输入平面记作  $P_{in}$ ,而输出平面为  $P_{out}$ ,全息透镜的振幅-相位分布记作  $H(x) = \rho(x)e^{i\phi(x)}$ ,它与输入平面及输出平面之间的距离分别为  $l_0$  和  $l_1$ .各平面的孔径尺寸分别是  $a_0$ ,  $a_1$  和  $a_2$ , 取样点数目是  $N_1$ ,  $N$  和  $N_2$ .根据文献[2-4],

图 1 所示的光学系统实现的线性变换为

$$\tilde{G} = G_0(l_1) \cdot H \cdot G_0(l_0), \quad (1)$$

其中  $G_0(l)$  表示光波在自由空间传播过程中 (距离为  $l$  时) 所实现的变换, 它的传递函数由菲涅耳-基尔霍夫公式给出<sup>[2,3]</sup>. 在离散取样情形下, 自由空间传播矩阵  $G_0$  可以表示成 (一维情形)

$$G_0(l_0)_{pq} = k_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + S_0}}{2(1 + S_0)}} \cdot \exp\left[i \frac{2\pi l_0}{\lambda} (\sqrt{1 + S_0} - 1)\right] \quad \text{当 } S_0 \geq 0.10, \quad (2a)$$

$$G_0(l_0)_{pq} = k_0 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + S_0}}{2(1 + S_0)}} \cdot \exp\left\{i \frac{2\pi l_0}{\lambda} \left[\left(\frac{S_0}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{2}\right)^3 - \frac{5}{8} \left(\frac{S_0}{2}\right)^4 + \frac{7}{8} \left(\frac{S_0}{2}\right)^5\right]\right\} \quad \text{当 } S_0 < 0.10, \quad (2b)$$

其中  $q = 1, 2, 3, \dots, N_1$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots, N$ , 而

$$k_0 = \sqrt{\frac{1}{i\lambda l_0}} \cdot e^{i \frac{2\pi l_0}{\lambda}}, \quad S_0 = \left(p \frac{a_1}{N l_0} - q \frac{a_0}{N_1 l_0}\right)^2. \quad (3)$$

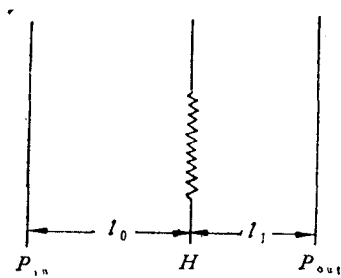


图 1 实现光学变换的单个全息透镜光学系统的示意图

$\lambda$  代表入射光波波长. 同样地可以写出  $G_0(l_1)_{pq}$  的相仿表达式. 这里 0.10 是个适当的控制常数. 在(2b)式中, 如果指数上的括号内只取第一项, 那末, 它就是文献[1]中所采用的旁轴近似下  $G_0$  的表达式.

如何设计  $\tilde{G}$  使之最佳地逼近给定的线性变换  $G$  呢? 文献[1]曾导出全息透镜的振幅-相位分布  $H_{ll}$  ( $l = 1, 2, 3, \dots, N$ ) 必须满足下列方程组:

$$\sum_{l=1}^N A_{kl} \cdot B_{lk} \cdot H_{ll} = C_{kk} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (4)$$

这里相应的矩阵  $A$ ,  $B$  和  $C$  由下列诸式给定

$$\begin{aligned} A &= G_0^+(l_1) \cdot G_0(l_1), \\ B &= G_0(l_0) \cdot G_0^+(l_0), \\ C &= G_0^+(l_1) \cdot G \cdot G_0^+(l_0). \end{aligned} \quad (5)$$

$G_0(l_0)$  是  $N$  行  $N_1$  列矩阵,  $G_0(l_1)$  是  $N_2$  行  $N$  列矩阵.  $G^+$  表示取  $G$  的厄密共轭.  $G_0(l_0)G_0^+(l_0)$  和  $G_0^+(l_1)G_0(l_1)$  都是  $N \times N$  方阵. 现在具体地写出 (4) 式中各有关量的表达式

$$A_{kl} = \sum_{s=1}^{N_2} G_0^*(l_1)_{sk} \cdot G_0(l_1)_{sl}, \quad (6a)$$

$$B_{lk} = \sum_{p=1}^{N_1} G_0(l_0)_{lp} \cdot G_0^*(l_0)_{kp} \quad (6b)$$

以及

$$C_{kk} = \sum_{p=1}^{N_2} \sum_{q=1}^{N_1} G_0^*(l_1)_{pk} \cdot G_{pq} \cdot G_0^*(l_0)_{kq}, \quad (6c)$$

其中

$$k, l = 1, 2, 3, \dots, N.$$

对于实现给定维数的线性变换,  $N_1$  和  $N_2$  是已给定的数, 而出现在方程组(4)中可调参数是  $N$ ,  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ , 和  $a_2$ . 对于各种不同的参数组, 原则上都可以通过求解方程组(4), 得到相应的全息透镜的振幅-相位分布  $H_{il}(l = 1, 2, 3, \dots, N)$ , 并可估计该透镜所组成的光学系统实现的变换  $\tilde{G}$  与预先给定的变换  $G$  之间的逼近程度, 引用逼近“距离” $D$  来描述它:

$$\begin{aligned} D = \|G - \tilde{G}\| &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[ \sum_i \sum_j (G - \tilde{G})_{ij} \cdot (G^+ - \tilde{G}^+)_{ji} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \{ \text{Tr}(G^+G) + \text{Tr}(\tilde{G}^+\tilde{G}) - 2\text{Re}(G\tilde{G}^+) \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

这里  $\text{Tr}(A)$  代表取矩阵  $A$  的迹,  $\text{Re}$  表示取实数值. 本文将在一般情形下(不论是旁轴或非旁轴情形), 对  $l_0$  和  $l_1$  也不施加任何的限制, 研究在各种不同的参数选择方式下, 方程组(4)的解以及它的稳定性问题.

## 实现光学 Walsh 变换的系统设计

为了研究方程组(4)的解对各种参数的依赖行为和解的稳定性问题, 我们必须针对具体例子进行具体分析. 对于三种不同序的四维和八维的 Walsh 变换, 我们作了仔细地计算, 具体结果如下所述. 为了适当地减少可调参数, 令  $a_0 = a_1 = a_2$ , 即令孔径尺寸全部相同.

### 1. 对全息透镜的取样点数目考虑

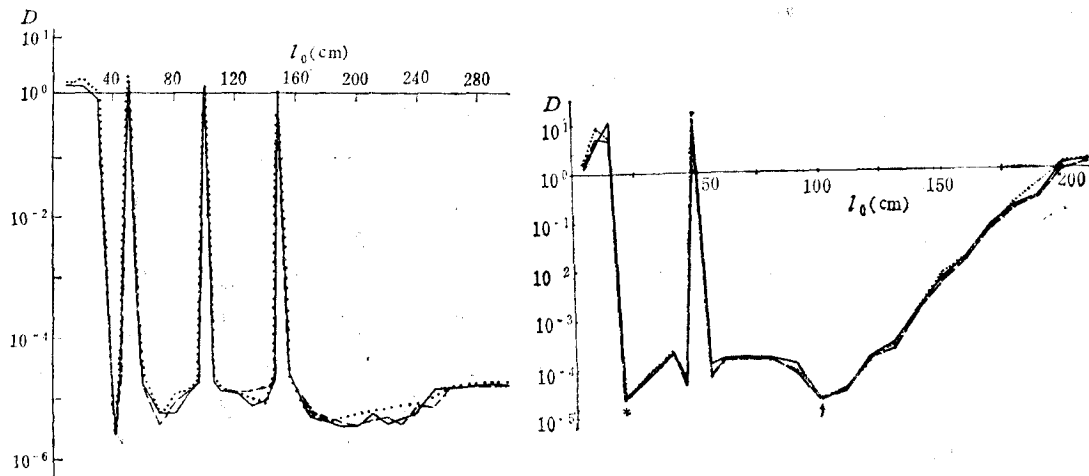
文献[1]作者提出全息透镜的取样点数目要满足一定的条件, 即  $N = N_1 \cdot N_2$ , 它表明为了实现  $N_1 \cdot N_2$  自由度的变换  $G_{ij}(i = 1, 2, \dots, N_2, j = 1, 2, \dots, N_1)$ , 必须用具有相同自由度 ( $N = N_1 \cdot N_2$ ) 的全息透镜  $H_{il}(l = 1, 2, \dots, N)$  进行调制, 这在物理上是合理的. 这是个充分条件但不是必要的条件. 以我们的计算结果表明(见表1), 对于一个给定的具体  $G$  来说, 全息透镜的取样点数目可以取  $N_1 \cdot N_2$ , 也可以小于  $N_1 \cdot N_2$ , 还可能大于  $N_1 \cdot N_2$ . 表1给出实现三种序的四维和八维的 Walsh 变换的计算结果和参数.  $a_0 = a_1 = a_2 = 0.225 \text{ cm}$ ,  $N_1 = N_2 = 4$  或者  $8$ . 由表1可见, 对于光学序的四维 Walsh 变换这个特例, 当  $N = N_1 \cdot N_2 = 16$  时, 至少可以找到三种典型的配置 ( $l_0, l_1$ ), 它们都能够实现符合要求的最佳逼近. 同时还可以看到, 当减少全息透镜的取样点数目时, 仍然可找到有用的解. 这对选择全息透镜取样点的数目是很有参考价值的. 但对其他例子, 当减少全息透镜的取样点数目时, 尚未找到有关的合适的解. 另外, 当增加全息透镜的取样点数目时, 同样存在着可利用的解.

表 1 实现四维和八维 Walsh 变换的光学系统的设计参数

维 数	实现 Walsh 变换的序	全息透镜取 样点数目 $N$	$l_0, l_1$ (cm)	逼近“距离” $D$	$l_0, l_1$ (cm)	逼近“距离” $D$
四	光学序	16	200, 200	$0.13737 \times 10^{-4}$	200, 50	$0.3564 \times 10^{-3}$
		8	200, 200	$0.6113 \times 10^{-3}$	50, 200	$0.4057 \times 10^{-3}$
		4	200, 200	$0.3847 \times 10^{-3}$		
	Walsh 序	16	200, 50	$0.4821 \times 10^{-3}$	50, 200	$0.6138 \times 10^{-3}$
	自然序	16	200, 50	$0.4802 \times 10^{-3}$	50, 200	$0.4741 \times 10^{-3}$
八	光学序	64	100, 12.5	$0.3632 \times 10^{-4}$	12.5, 100	$0.3741 \times 10^{-4}$
		80	100, 12.5	$0.2594 \times 10^{-3}$	12.5, 100	$0.2164 \times 10^{-3}$
		96	100, 12.5	$0.1547 \times 10^{-3}$	12.5, 100	$0.1857 \times 10^{-3}$
	Walsh 序	64	100, 12.5	$0.3572 \times 10^{-4}$	12.5, 100	$0.3637 \times 10^{-4}$
		80	100, 12.5	$0.2344 \times 10^{-3}$	12.5, 100	$0.2136 \times 10^{-3}$
		96	100, 12.5	$0.1393 \times 10^{-3}$	12.5, 100	$0.1547 \times 10^{-3}$
	自然序	64	100, 12.5	$0.3636 \times 10^{-4}$	12.5, 100	$0.4684 \times 10^{-4}$
		80	100, 12.5	$0.3021 \times 10^{-3}$	12.5, 100	$0.2732 \times 10^{-3}$
		96	100, 12.5	$0.1690 \times 10^{-3}$	12.5, 100	$0.1523 \times 10^{-3}$

## 2. 对输入平面与全息透镜平面之间的距离 $l_0$ 的依赖性

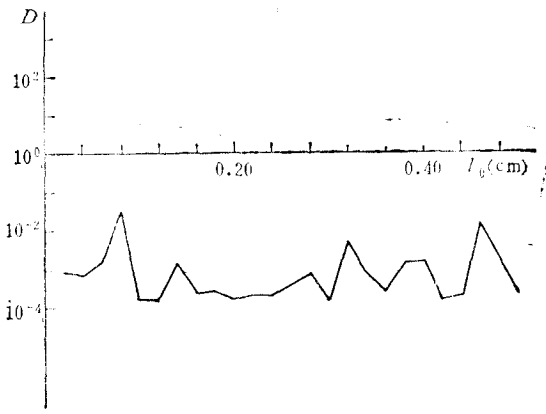
图 2 (a) 示出三种序的四维 Walsh 变换, 其逼近“距离” $D$  对  $l_0$  的依赖性, 其中  $l_1$  取固定值,  $l_1 = 50\text{cm}$ ,  $N = N_1 \cdot N_2 = 16$ . 可以看出,  $l_0$  在很宽的范围内取值时, 都可以找到最佳逼近的实用解. 有趣的是, 当  $l_0 = 20; 50; 100; 150\text{cm}$  时, 逼近“距离” $D$  急剧地增大, 当  $l_0 > 160\text{cm}$  时, 逼近“距离” $D$  取较低的值, 而且变化很平缓, 所有的解都达到实用上对误差的要求. 对于三种序, 其曲线行为很相近. 图 2 (b) 相应于三种序的八维



(a) 四维三种序的 Walsh 变换 ( $N = 16, l_1 = 50\text{cm}$ ),  
— 为自然序; --- 为 Walsh 序; ... 为光学序

(b) 八维三种序的 Walsh 变换 ( $N = 64, l_1 = 12.5\text{cm}$ ),  
— 为自然序; --- 为 Walsh 序; ... 为光学序

Walsh 变换情形,  $N_1 = N_2 = 8$ ,  $N = 64$ , 这里  $l_1$  取固定值,  $l_1 = 12.5 \text{ cm}$ . 当  $l_0 = 10$  和  $50 \text{ cm}$  时, 逼近“距离” $D$  突然变大, 而当  $130 \text{ cm} > l_0 > 60 \text{ cm}$  时, 都存在着合适的解, 当  $l_0 > 130 \text{ cm}$ , 随着  $l_0$  的继续增加,  $D$  单调地增大. 三种序的  $D$  值变化情形相同. 可以看出, 当满足文献 [1] 所提出的条件时, 即  $l_0 = 100 \text{ cm}$  和  $l_1 = 12.5 \text{ cm}$ ,  $N = 64$ , 逼近“距离” $D$  的确达到极小点(如图 2 (b) 箭头所示), 另一最小点相应于  $l_0 = 20 \text{ cm}$ (图 2 (b) 中标上 \* 号). 值得注意的是在  $l_0$  很小时, 如  $l_0 < 0.5 \text{ cm}$ , 即非旁轴情形下, 也存在着许多合适的解, 如图 2(c) 所示. 这将为缩短光路, 减少外部干扰而设计出具有更高信噪比的系统提供了实际的有效途径.

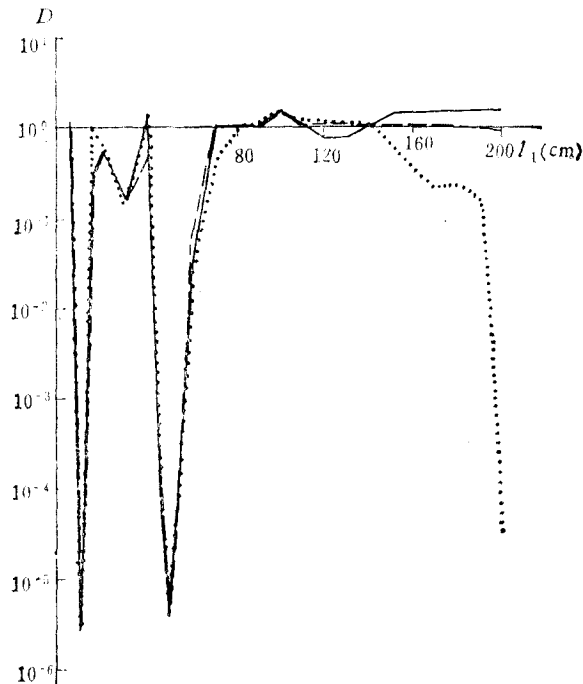


(c) 八维 Walsh 序的 Walsh 变换 (非旁轴情形,  $N = 64$ ,  $l_1 = 12.5 \text{ cm}$ )

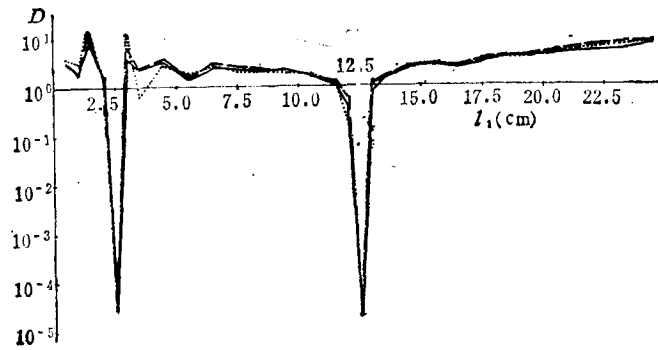
图 2 逼近“距离” $D$  对距离  $l_0$  的依赖关系

### 3. 对输出平面与全息透镜平面之间的距离 $l_1$ 的依赖性

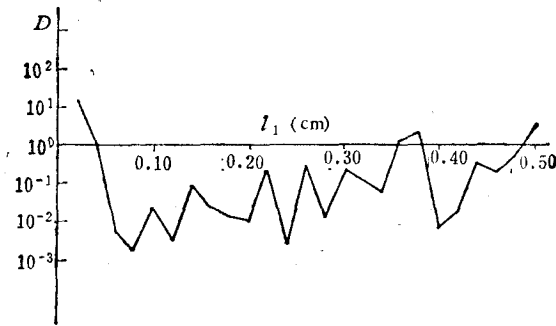
图 3(a) 给出四维 Walsh 变换下逼近“距离” $D$  对  $l_1$  的依赖关系, 其中  $l_0$  取固定值,



(a) 四维三种序的 Walsh 变换 ( $N = 16$ ,  $l_0 = 200 \text{ cm}$ ),  
——为自然序; - - - 为 Walsh 序; ... 为光学序



(b) 八维三种序的 Walsh 变换 ( $N = 64, l_0 = 100\text{cm}$ ),  
— 为自然序; - - - 为 Walsh 序; ... 为光学序



(c) 八维 Walsh 序的 Walsh 变换(非旁轴情形,  $N = 64, l_0 = 100\text{cm}$ )

图 3 逼近“距离” $D$ 对距离  $l_1$  的依赖关系

$l_0 = 200\text{cm}$ ,  $N = N_1 \cdot N_2 = 16$ . 由图 3(a) 可见, 仅当  $l_1$  取少数几个值时, 才存在着实用解. 它相应于  $l_1 = 10$  和  $50\text{cm}$ , 后者对应于文献 [1] 所给出的条件. 对于光学序的 Walsh 变换, 在  $l_0 = 200\text{cm}$  和  $l_1 = 200\text{cm}$  处还存在着另一个最佳逼近的解, 这一点与其他序不同. 图 3(b) 对应于八维 Walsh 变换的情形, 上述评述同样适用, 但此时逼近“距离” $D$  的极小值对应于  $l_1 = 2.5\text{cm}$  和  $12.5\text{cm}$  处. 后者对应于文献 [1] 的条件. 对于不同序的 Walsh 变换,  $D$  值变化行为基本上相同. 同样地, 可以看出, 当  $l_1$  很小时, 例如  $l_1 < 0.5\text{cm}$ , 即非旁轴情形下, 该系统也存在着多种参数的选择方式 (如图 3(c) 所示).

#### 4. 解的稳定性

在最佳逼近“距离” $D$  值下和在不变全息透镜的振幅-相位分布下, 令  $l_0$  或  $l_1$  有个偏差, 然后重新计算逼近“距离” $D$  的值. 我们发现, 当  $l_0$  发生  $\pm 0.1\%$  的涨落时,  $D$  值明显上升, 而当  $l_1$  发生  $\pm 0.1\%$  的涨落时,  $D$  值变得更坏, 以致于不再满足实际设计时对误差的要求. 从这个意义上讲, 该系统对参数的变动是很敏感的. 在具体实验中, 对  $l_0$  和  $l_1$  的精度要求是相当高的. 表 2 给出当  $l_0$  或  $l_1$  出现偏差时,  $D$  值的变化情况.

表 2

逼近“距离” $D$ 配置	Walsh 变换	八维光学序	八维自然序	八维 Walsh 序
$l_0 = 100\text{cm},$ $l_1 = 12.5\text{cm}$		$0.36320 \times 10^{-4}$	$0.36364 \times 10^{-4}$	$0.35722 \times 10^{-4}$
$l_0 = (1 + 0.1\%)100\text{cm},$ $l_1 = 12.5\text{cm}$		$0.71309 \times 10^{-4}$	$0.63367 \times 10^{-4}$	$0.68300 \times 10^{-4}$
$l_0 = (1 - 0.1\%)100\text{cm},$ $l_1 = 12.5\text{cm}$		$0.71464 \times 10^{-4}$	$0.68461 \times 10^{-4}$	$0.63579 \times 10^{-4}$
$l_0 = 100\text{cm}$ $l_1 = (1 + 0.1\%)12.5\text{cm}$		0.53532	0.56474	0.53749
$l_0 = 100\text{cm},$ $l_1 = (1 - 0.1\%)12.5\text{cm}$		0.53596	0.56702	0.54274

## 结 论

本文在十分普遍情形(不论旁轴或非旁轴情形)下,讨论了利用单个全息透镜实现光学变换时,全息透镜的最佳设计方案.全息透镜的取样点数目通常等于输入和输出平面上取样点数目的乘积,确定全息透镜分布的方程组的解强烈依赖于 $l_0$ 和 $l_1$ 的值,三种序的 Walsh 变换的解对 $l_0$ 和 $l_1$ 的依赖关系十分相似.设计符合实际要求的光学系统时,可以有多种选择参数方式.一般说来, $D < 10^{-2}$ 的解都可以被采用.本文还指出实现 Walsh 变换的光学系统对各平面的位置,即输入平面、输出平面及全息透镜平面的定位精度要求很高.此外,计算结果表明,如果将 $l_0$ 和 $l_1$ 的取值相互交换,例如 $l_0 = 50\text{cm}$ ,而改变 $l_1$ 值,其逼近“距离” $D$ 对 $l_1$ 的依赖关系几乎与 $l_1 = 50\text{cm}$ 而让 $l_0$ 变动时情形相仿.在非旁轴情形下,也找到了许多有用的解,这将为有效地设计实用的光学系统提供了有益的途径.

在本文计算中,光学系统中的三个平面的孔径大小取相同值,这并没有带来本质上的限制.原则上,也可以令三个平面上孔径大小不相等,通过适当地调节距离 $l_0$ 或 $l_1$ ,也可以找到合适的解.当全息透镜的孔径加大时,相当于在单位面积内降低取样点的密度,从而在一定程度上缓解制作全息透镜的技术上的困难.

通常情形下,要求单个全息透镜取样点数目 $N = N_1 \cdot N_2$ ,随着变换维数的增大,要求制作高信息密度的全息透镜,这在实际制作中是相当困难的,我们将在另文中提出解决此困难的一个可行的方案,即采用双全息透镜光学系统来实现给定的普遍变换.

在本文中,虽然只讨论一维情形,所有结果是不难直接推广到二维情形.

郑师海同志提供了解线性方程组的程序,在此表示感谢.

## 参 考 文 献

- [1] 杨国楨, 物理学报, 30 (1981), 1340.
- [2] 霍裕平、杨国楨、顾本源, 物理学报, 24 (1975), 438.

- [3] 霍裕平、杨国桢、顾本源, 物理学报, **25** (1976), 31.  
[4] 杨国桢、顾本源, 物理学报, **30** (1981), 414.

## THE EFFECTIVE DESIGN OF A SINGLE HOLOGRAPHIC LENS FOR REALIZING OPTICAL TRANSFORM

DONG BI-ZHEN GU BEN-YUAN  
(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

For the general cases (paraxial approximation and non-paraxial case), the ways of effective design of optical system to be composed of a single mask for the purpose of realizing any given linear transform are presented. Under various manners of choice of parameters, the solutions of equations to determine the amplitude-phase distribution of mask are investigated, and the stability of solution is also discussed. Under non-paraxial case, the solutions available in real situation are also found. Applying 4- and 8-dimension Walsh transforms in the three different orders as examples, we investigate the effects of various parameters, such as the spacings between input plane, mask and output plane, and the number of sampling points in mask, on 'approach distance', which describes the degree of approach of the transform to be performed by the system to any given linear transform. It would provide a realizable way to choose the relevant parameters and an useful enlightenment in the real design of an optical system for realizing a given linear transform.