

湍流等离子体中的重整化色散方程

张 承 福

(北京大学物理系)

1984年10月15日收到

提 要

从速度 $\mathbf{v}$ 的傅里叶空间 $\mathbf{K}$ 的动力学方程出发, 采用算子运算及变换方法, 可较简便的算出静电湍流场中的重整化色散方程. 在以有效关联时间代替湍流场的时、空关联的近似下, 计算了有限关联时间效应的作用, 表明它是削弱湍流场影响的. 短关联时间极限可看成是湍流场影响的上限估计. 讨论了湍流场对离子声波、电子朗缪波和低频漂移波的影响.

一、引 言

由于各种不稳定性及其非线性演变, 等离子体经常处于湍流状态. 这种湍性扰动反过来又将影响粒子运动, 从而改变波的色散关系. 重整化理论(或称轨道重整化)就是研究湍性电场对波的色散关系的影响的理论. 它是研究等离子体非线性行为的一个重要方面, 具有理论和实际意义.

自60年代以来, 有关重整化理论已有大量工作. 但由于问题本身的复杂性, 这方面的理论工作远未完善. 有些工作, 如文献[1, 2], 具有比较简明的物理图象和表达形式, 但因过于简化, 不满足能量守恒而遭到批评^[3]. 很多工作, 如文献[4—6]等, 理论上虽较严格些, 但由于表达形式过于复杂和形式化, 难以用于实际计算. 一种既能反映湍流场影响的基本特性而又比较简单易算的重整化理论, 尚有待发展. 本文试图沿此方向作些努力.

与传统的途径不同, 本文将从 $\mathbf{K}$ 空间(速度 $\mathbf{v}$ 的傅里叶空间)的 Vlasov 方程出发. 注意到人们实际有兴趣的并不是分布函数本身, 而是密度、电流等宏观量, 它们可由 $\mathbf{K} = 0$ 处的 $f(\mathbf{K})$ 值及其微商给出, 可使计算大为简化. 特别是有磁场情形, $f(\mathbf{K})$ 或 $f(\mathbf{v})$ 一般很复杂, 而 $f(\mathbf{K})|_{\mathbf{K}=0}$ 却比较简单. 对于短关联时间极限, 可容易地得到等价于文献[1, 2]的结果. 有限关联时间情形比较复杂. 困难来自两方面: 一是时间关联(τ_c)和空间关联(L_c)均参与作用; 二是湍流场影响与历史有关, 即非马尔可夫性. 通常需引入各种近似才能求解. 本文采用的近似是: 以有效关联时间

$$\tau_{\text{eff}} \simeq \left[\frac{1}{\tau_c} + \frac{v_T}{L_c} \right]^{-1}$$

近似替代湍流场的时、空关联. 在此近似下, 由非马尔可夫性引起的困难可用变换方法克服之. 结果表明有限关联时间效应是削弱湍流场影响的. 本文给出的重整化扰动密度以一重积分表示, 相当于通常的色散函数 Z 的推广, 便于实际计算.

本文第二节讨论短关联时间极限下的重整化; 第三节给出有限关联时间情形下的重整化; 第四节是应用举例, 讨论湍流场对离声波, 电子朗缪波和低频漂移波的影响。最后是简短的结论。

二、短关联时间极限下的重整化

本文以静电波为例, 不难将之推广到电磁波情形。对于特定的静电波 $\mathbf{E}_k \approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$, $\mathbf{K}$ 空间的扰动分布 $f_1(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t)$ 满足方程^[7]

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + ie\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}/m \right] f_1 = -i \frac{e}{m} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{K} f_0(\mathbf{K}) \equiv F. \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = e\mathbf{B}_0/mc$, $\mathbf{E}$ 是湍流电场, f_0 是平衡分布, 本文考察湍流场的轨道重整化效应, 忽略它对 f_0 的影响, 则

$$f_0(\mathbf{K}) = n_0(x) \exp \left\{ -\frac{I}{2m} (\mathbf{K} - i\mathbf{e}_y/(r_n \Omega))^2 \right\}. \quad (2)$$

其中 $r_n = \left| \frac{d \ln n_0}{dx} \right|^{-1}$, $\mathbf{B}_0$ 在 z 方向。

设 $\mathbf{E}_k$ 是渐近引入的, 则(1)式的形式解:

$$f_1 = \int_0^\infty d\tau U(\tau) F(\mathbf{K}, \mathbf{r}, t - \tau). \quad (3)$$

其中传播算子

$$U(\tau) \equiv X e^{-i\tau \nabla \cdot \nabla_{\mathbf{K}} - i\tau (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} - i\tau \frac{e}{m} \mathbf{K} \cdot \int_0^\tau d\tau' \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau')}. \quad (4)$$

$X e$ 是时序指数算子。由(4)式知, $U(\tau)$ 满足方程及“初”条件:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + i\nabla \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + i \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \mathbf{K} \right] U(\tau) = 0; \quad U(0) = 1. \quad (5)$$

令 $U(\tau) = \langle U(\tau) \rangle + \tilde{U}(\tau)$, $\langle U(\tau) \rangle$ 是系综平均部分, $\tilde{U}(\tau)$ 是涨落部分。在最低级重整化中, 保留到 $\langle U(\tau) \rangle$ 的“轨道”修正的 E^2 项, 由(5)式可得

$$\tilde{U}(\tau) = -i \frac{e}{m} \int_0^\infty d\tau' U_0(\tau - \tau') \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau') \cdot \mathbf{K} \langle U(\tau') \rangle. \quad (6)$$

而 $\langle U(\tau) \rangle$ 满足方程:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + i\nabla \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} \right] \langle U(\tau) \rangle + \frac{e^2}{m^2} \mathbf{K} \cdot \int_0^\infty d\tau' \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r} - i(\tau - \tau') \nabla_{\mathbf{K}}, \tau') \rangle \cdot U_0(\tau - \tau') \mathbf{K} \langle U(\tau') \rangle = 0. \quad (7)$$

其中 $U_0(\tau)$ 是湍流场为零时的自由传播算子:

$$U_0(\tau) \equiv e^{-i\tau \nabla \cdot \nabla_{\mathbf{K}} - i\tau (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}}}, \quad (8)$$

它对于 $\mathbf{E}$ 是简单的平移算子.

一般情形下, (7) 式是复杂的积分、微分方程, 极难求解, 此情形将在下节讨论. 若 $\tau_c \rightarrow 0$ (但保持 $\langle \mathbf{E}\mathbf{E} \rangle \tau_c$ 有限), 亦即 τ_c 小于本问题的各特征时间 (Ω^{-1} , ω^{-1} , $(k_x v_T)^{-1}$), 则 (7) 式退化为微分方程:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + i \nabla \cdot \nabla_{\mathbf{k}} + (\mathbf{K} \times \Omega) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{K} \right] \langle U(\tau) \rangle = 0. \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{D} = \frac{e^2}{m^2} \langle \mathbf{E}\mathbf{E} \rangle \tau_c = \begin{pmatrix} D_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & D_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

由 (9) 式及“初”条件即可解出

$$\langle U(\tau) \rangle = e^{-i\tau \nabla \cdot \nabla_{\mathbf{k}} - \tau (\mathbf{K} \times \Omega) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} - \tau \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{K}}. \quad (11)$$

对于均匀、稳态湍流, $\mathbf{D}$ 是常值 (也可能是时、空的缓变函数). 对 (3) 式取 f_1 的系综平均值, 取其傅氏分量 $\mathbf{k}$, 并令 $\mathbf{K} = 0$, 即得所需的扰动密度表式:

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \langle f_{\mathbf{k}} \rangle|_{\mathbf{K}=0} = \int_0^{\infty} d\tau \langle U(\tau) \rangle F_{\mathbf{k}}(t - \tau)|_{\mathbf{K}=0}. \quad (12)$$

其中 $\langle U(\tau) \rangle$ 由 (11) 式给出, 而 ∇ 代以 $i\mathbf{k}$.

$$F_{\mathbf{k}} = -\frac{e\varphi_{\mathbf{k}}}{T} n_0 \frac{T}{m} \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{K} - i \frac{K_x}{r_n} \right) e^{-\frac{T}{2m} (\mathbf{K} - \frac{i e \mathbf{v}}{\Omega r_n})^2} \quad (13)$$

这里 $i \frac{K_x}{r_n}$ 项来自 n_0 不均匀性引起的卷积项, 已用到 $|k_x r_n| \ll 1$ 条件.

为将算子 $\langle U(\tau) \rangle$ 化成易运算形式, 作变量变换, 令

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \Omega \times \mathbf{k} / \Omega^2$$

并将 $\hat{\mathbf{K}}_{\perp}$ 和 $\mathbf{k}_{\perp}$ 用平面极坐标表示

$$\hat{\mathbf{K}}_{\perp} = (\hat{K}_{\perp}, \eta), \quad \mathbf{k}_{\perp} = (k_{\perp}, \alpha) \quad (14)$$

则有

$$\begin{aligned} \langle U(\tau) \rangle = & e^{-\tau D_{\perp} (k_{\perp}^2 / \Omega^2 + \hat{K}_{\perp}^2)} \cdot e^{k_x \tau \frac{\Omega}{\partial K_x} - \tau D_{\parallel} K_{\parallel}^2} \\ & \cdot e^{\Omega \tau \frac{\partial}{\partial \eta} - i \frac{D_{\perp}}{\Omega} k_{\perp} \hat{K}_{\perp} \tau \sin(\eta - \alpha)}. \end{aligned} \quad (15)$$

利用算子公式 (设 a 与 b 对易)

$$e^{a \frac{d}{dx} + b(x)} = e^{\frac{1}{a} \int_x^{x+a} b(x') dx'} \cdot e^{a \frac{d}{dx}} \quad (16)$$

可将 (15) 式表为

$$\langle U(\tau) \rangle = e^{-S(\mathbf{K}, \tau)} U_0(\tau). \quad (17)$$

其中 $U_0(\tau)$ 就是 (8) 式的自由传播算子, 它可表成平移算子形式, 运算就很简单了:

$$U_0(\tau) = e^{k_x \tau \frac{\partial}{\partial K_x} + \Omega \tau \frac{\partial}{\partial \eta}}. \quad (18)$$

湍流场效应完全由 S 函数体现,

$$S(\mathbf{K}, \tau) = \frac{D_{\parallel}\tau}{3} (3K_z^2 + 3K_z k_z \tau + k_z^2 \tau^2) + \tau D_{\perp} \left(\frac{k_{\perp}^2}{Q^2} + \hat{K}_{\perp}^2 \right) - \frac{2D_{\perp}}{Q^2} k_{\perp} \hat{K}_{\perp} [\cos(\eta - \alpha + Q\tau) - \cos(\eta - \alpha)]. \quad (19)$$

实际需要的只是 $S(0, \tau)$ 值, $\mathbf{K} = 0$ 即 $K_z = 0$, $\hat{K}_{\perp} = k_{\perp}/Q$, $\eta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, 所以

$$S(0, \tau) \equiv S(\tau) = \frac{1}{3} D_{\parallel} k_z^2 \tau^3 + \frac{2\tau D_{\perp}}{Q^2} k_{\perp}^2 \left(1 - \frac{1}{Q\tau} \sin Q\tau \right). \quad (20)$$

此因子对任何场强均适用, 当 $B_0 \rightarrow 0$ 时

$$S(\tau) = \frac{\tau^3}{3} (D_{\parallel} k_z^2 + D_{\perp} k_{\perp}^2) = \frac{1}{3} D k^2 \tau^3. \quad (21)$$

当 $Q\tau \gg 1$ 时, 则

$$S(\tau) = \frac{1}{3} D_{\parallel} k_z^2 \tau^3 + \frac{2D_{\perp}}{Q^2} k_{\perp}^2 \tau. \quad (22)$$

即垂直方向是空间扩散型的. (21), (22) 式与文献[1—4]的结果基本一致 (仅 $D_{\perp}$ 项相差“2”, 原因见(42)式), 表明该文近似等效于短关联时间极限. 该文能量不守恒的缺点也可由此而理解: $\tau_c \rightarrow 0$ 意味着谱宽 $\Delta\omega \rightarrow \infty$, 是“白谱”, 在此湍流场中粒子可不断地扩散到高能区去, 在稳态湍流假设下, 这不能保证总体系的能量守恒. 由本文推导知, 实际并不要求 $\tau_c \rightarrow 0$, 只要满足 $\tau_c \ll \omega^{-1}$, Q^{-1} , $(k_z v_T)^{-1}$, (20) 式就近似成立.

通常, 湍流谱宽 $\Delta\omega$ 总是有限的, 而且往往 $\Delta\omega \approx \omega$. 特别在强磁场中, 条件 $\tau_c \ll Q^{-1}$ 是很难满足的. 因而, 考虑有限关联时间效应是必要的.

三、有限关联时间情形的重整化

由(7)式知, τ_c 有限时, 问题的复杂性来自两方面: 一是湍流场影响的非马尔可夫性; 二是空间关联参与作用, 它与速度有关 ($i\nabla_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{v}$), 比时间关联更复杂. 为求解此问题, 引入近似是不可避免的. 本文采用与通常不同的近似: 以有效关联时间

$$\tau_{\text{eff}} \simeq \left[\frac{1}{\tau_c} + \frac{v_T}{L_c} \right]^{-1}. \quad (23)$$

近似代替湍流场的时、空关联. 在此近似下, 由非马尔可夫性所引起的困难可以由变换方法克服之.

对(1)式求 $\mathbf{r}$ 的傅氏变换, $f_i(\mathbf{K}, \mathbf{k}, t)$ 满足

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + i \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \mathbf{K} \right] f_i = F_{\mathbf{k}}. \quad (24)$$

其中 $F_{\mathbf{k}}$ 由(13)式给出. 为求解(24)式, 作变换, 令

$$f_i = e^{\psi(\mathbf{K}, t)} \hat{f}_i \equiv e^{i\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{K} + i\phi(t)} \hat{f}_i. \quad (25)$$

适当选取 $\mathbf{a}, \phi$, 使之满足方程

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a} + \frac{e}{m} \mathbf{E} = 0;$$

$$\frac{db}{dt} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}, \quad (26)$$

则 $\hat{f}_1$ 满足方程.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{K}} + (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_{\mathbf{K}} \right] \hat{f}_1 = e^{-\psi} F_{\mathbf{k}}. \quad (27)$$

由此可解出

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{\psi(t)} \hat{f}_1(t) = \int_0^\infty d\tau e^{\psi(\tau)} U_0(\tau) e^{-\psi(t-\tau)} F_{\mathbf{k}}(t-\tau) \\ &= \int_0^\infty d\tau e^{\mathcal{S}(\mathbf{K}, \tau)} U_0(\tau) F_{\mathbf{k}}(t-\tau). \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{K}, \tau) &\equiv \phi(K_z, \hat{K}_\perp, \eta, t) - \phi(K_z + k_z \tau, \hat{K}_\perp, \eta + Q\tau, t - \tau) \\ &= i\{[a_z(t) - a_z(t - \tau)]K_z - k_z \tau a_z(t - \tau) + a_\perp(t) \hat{K}_\perp \cos(\eta - \theta(t)) \\ &\quad - a_\perp(t - \tau) \hat{K}_\perp \cos(\eta + Q\tau - \theta(t - \tau)) - \frac{k_\perp}{Q} a_\perp(t) \sin(\alpha - \theta(t)) \\ &\quad + \frac{k_\perp}{Q} a_\perp(t - \tau) \sin(\alpha - \theta(t - \tau)) + b(t) - b(t - \tau)\}. \end{aligned} \quad (29)$$

这里 $\mathbf{a}_\perp(t) \equiv (a_\perp(t), \theta(t))$. 湍流场的影响完全由因子 $e^{\mathcal{S}(\mathbf{K}, \tau)}$ 体现, 无湍流场时 $e^{\mathcal{S}} = 1$.

对(28)式求系综平均. 若湍流场是近于高斯型的, 则可用积累量展开法得

$$\langle e^{\mathcal{S}(\mathbf{K}, \tau)} \rangle \simeq e^{\frac{1}{2} \langle \mathcal{S}^2(\mathbf{K}, \tau) \rangle}. \quad (30)$$

一般情形下 $\langle \mathcal{S}^2(\mathbf{K}, \tau) \rangle$ 异常复杂, 幸而我们感兴趣的只是 $\mathbf{K} = 0$ 时的值, 相对地简单许多. 由(28)式得扰动密度表式:

$$\langle n_{1\mathbf{k}} \rangle = \int_0^\infty d\tau e^{-S(\tau)} U_0(\tau) F_{\mathbf{k}}(t - \tau) |_{\mathbf{K}=0}. \quad (31)$$

其中湍流场效应全在因子 $S(\tau)$ 中体现,

$$S(\tau) = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{S}^2(0, \tau) \rangle. \quad (32)$$

为求出 $S(\tau)$ 的具体形式, 需先解出 $\mathbf{a}$, b 与 $\mathbf{E}$ 的关系. 将二维矢量 $\mathbf{a}_\perp, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{E}_\perp$ 都用复数表示

$$\hat{a}_\perp \equiv a_\perp e^{i\theta}, \quad \hat{k}_\perp \equiv k_\perp e^{i\alpha}, \quad \hat{E}_\perp \equiv E_\perp e^{i\beta}. \quad (33)$$

则可以较方便地由(26)式解出

$$\begin{aligned} a_z(t) &= -\frac{e}{m} \int_{t_0}^t dt' E_z(t'), \\ \hat{a}_\perp(t) &= -\frac{e}{m} \int_{t_0}^t dt' \hat{E}_\perp(t') e^{-iQ(t-t')}, \\ b(t) &= \int_{t_0}^t dt' [k_z a_z(t') + R_c(\hat{a}_\perp(t') \hat{k}_\perp^*)]. \end{aligned} \quad (34)$$

由(29)和(32)式可得

$$S(\tau) = \frac{k_\perp^2}{4Q^2} \left\{ Q^2 \int_0^\tau d\tau' \int_0^\tau d\tau'' \langle \hat{a}_\perp(t - \tau') \hat{a}_\perp^*(t - \tau'') \rangle \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (2 - e^{iQ\tau} - e^{-iQ\tau}) \langle \hat{a}_\perp(t - \tau) \hat{a}_\perp^*(t - \tau) \rangle \\
& + 2Q \operatorname{Im} \left[(1 - e^{iQ\tau}) \int_0^\tau d\tau' \langle \hat{a}_\perp(t - \tau') \hat{a}_\perp^*(t - \tau) \rangle \right] \Big\} \\
& + (k_z^2/2) \left[\tau^2 \langle a_z(t - \tau) a_z(t - \tau) \rangle + \int_0^\tau d\tau' \int_0^\tau d\tau'' \langle a_z(t - \tau') \right. \\
& \quad \left. \cdot a_z(t - \tau'') \rangle - 2\tau \int_0^\tau d\tau' \langle a_z(t - \tau) a_z(t - \tau') \rangle \right]. \quad (35)
\end{aligned}$$

计算中已用到 $\langle \mathbf{E}\mathbf{E} \rangle$ 的对角性.

进一步的计算涉及湍流场时间关联的具体形式, 它由湍流谱分布决定. 为具体起见, 这里设指数型关联, 即

$$\langle \mathbf{E}(\tau_1) \mathbf{E}(\tau_2) \rangle = \langle \mathbf{E}\mathbf{E} \rangle e^{-|\tau_1 - \tau_2|/\tau_{\text{eff}}}. \quad (36)$$

则经过冗长的然而基本的计算(过程略), 由(35)式可得

$$S(\tau) = \frac{D_\parallel}{3} k_z^2 \tau^3 h\left(\frac{\tau}{\tau_{\text{eff}}}\right) + \frac{2D_\perp}{Q^2} k_\perp^2 \tau h_1(\tau, \tau_{\text{eff}}).$$

其中

$$\mathbf{D} \equiv \frac{e^2}{m^2} \langle \mathbf{E}\mathbf{E} \rangle \tau_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} D_\perp & 0 & 0 \\ 0 & D_\perp & 0 \\ 0 & 0 & D_\parallel \end{pmatrix}. \quad (37)$$

$$h(x) \equiv 1 - \frac{3}{2x} - \frac{3}{x^2} e^{-x} + \frac{3}{x^3} (1 - e^{-x}). \quad (38)$$

它反映纵向扩散的有限 τ_{eff} 效应. 当 $x \gg 1$, 即 $\frac{\tau}{\tau_{\text{eff}}} \gg 1$ 时 $h \rightarrow 1$; $x \ll 1$ 时 $h(x) \simeq \frac{3}{8} x$. $\tau_{\text{eff}} \rightarrow 0$ 时(37)式有关项即趋于短关联时间极限(20)式. $h(x)$ 由图 1 给出, $h(x)$ 恒小于 1 表示有限 τ_{eff} 效应总是削弱湍流场影响的.

$$\begin{aligned}
h_1(\tau, \tau_{\text{eff}}) & \equiv \frac{1}{2} - \frac{\tau_{\text{eff}}}{2\tau} (1 - e^{-\tau/\tau_{\text{eff}}}) + \frac{1}{2\Delta} \\
& - \frac{1}{\Delta Q\tau} \sin Q\tau + \frac{\tau_{\text{eff}}}{2\Delta\tau} [(1 - e^{-\tau/\tau_{\text{eff}}})(1 + 2\cos Q\tau \\
& - Q\tau_{\text{eff}} \sin Q\tau) + 1 - \cos Q\tau] \\
& - \frac{\tau_{\text{eff}}}{\Delta^2\tau} [1 + e^{-\tau/\tau_{\text{eff}}}(Q\tau_{\text{eff}} \sin Q\tau - \cos Q\tau)]. \quad (39)
\end{aligned}$$

其中 $\Delta \equiv 1 + Q^2 \tau_{\text{eff}}^2$, h_1 反映横向扩散的有限 τ_{eff} 效应. 此式较复杂, 但在几种极限下它趋于简单的、合理的结果:

(i) 若 $Q \rightarrow 0$, 即无磁场时,

$$2 \frac{D_\perp}{Q^2} k_\perp^2 \tau h_1 \rightarrow \frac{1}{3} D_\perp k_\perp^2 \tau^3 h\left(\frac{\tau}{\tau_{\text{eff}}}\right). \quad (40)$$

(ii) 若 $|Q\tau_{\text{eff}}| \ll 1$, 则

$$h_1 \rightarrow 1 - \frac{1}{Q\tau} \sin Q\tau. \quad (41)$$

此即短关联时间极限(20)式中的有关因子.

(iii) 若 $|Q\tau_{\text{eff}}| \gg 1$, 强磁场下低频漂移波湍流通常都属此情形, 则有

$$\begin{aligned} h_1 &\rightarrow \frac{1}{2} h_2 \left(\frac{\tau}{\tau_{\text{eff}}} \right); \\ h_2 &\equiv 1 + \frac{1}{x} (e^{-x} - 1). \end{aligned} \quad (42)$$

当 $\frac{\tau}{\tau_{\text{eff}}} \gg 1$ 时 $h_2 \rightarrow 1$, $h_1 \rightarrow \frac{1}{2}$. 通常 $h_2 < 1$, $h_1 < \frac{1}{2}$. $h_2(x)$ 亦由图 1 给出.

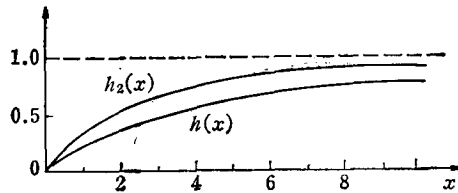


图 1 $h(x)$, $h_2(x)$ 与 x 的关系

由上可见, 无论 $|Q\tau_{\text{eff}}| > 1$ 或 < 1 , $D_{\perp}$ 项均具有位形空间扩散特征 (正比于 τ 而不是 τ^3), 仅在系数上差“1/2”. 这与文献[4]的有关论述不同. h_1, h_2 恒小于 1 表明有限关联时间效应总是削弱湍流场影响的, 因而, 短关联时间极限(20)式可看成是一种上限估计.

下面回到扰动密度的计算上来. 由(13)和(18)式易证以下等式:

$$\begin{aligned} U_0(\tau) F_k(i - \tau) &= \frac{e\varphi_k n_0}{T} e^{i\omega\tau} \left[\frac{d}{d\tau} + i\omega_* \right] U_0(\tau) \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{T}{2m} (\mathbf{K} - i\mathbf{e}_y / (Qr_n))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

其中 $\omega_* \equiv -k_y \frac{cT}{eBr_n}$ 是漂移频率. 则由(31)式经分步积分, 略去 ρ/r_n 级小量可得

$$\begin{aligned} \frac{\langle n_1 k \rangle}{n_0} &= -\frac{e\varphi_k}{T} \left[1 + i \int_0^\infty d\tau \left(\omega - \omega_* + i \frac{ds}{d\tau} \right) e^{i\omega\tau - s(\tau)} \right. \\ &\cdot \left. U_0(\tau) e^{-\frac{T}{2m} K^2} \right]_{\mathbf{K}=0}. \end{aligned} \quad (44)$$

而由(18)式易得

$$U_0(\tau) e^{-\frac{T}{2m} K^2} \Big|_{\mathbf{K}=0} = e^{-\frac{U_0^2}{4} k_z^2 \tau^2 - \lambda(1 - \cos Q\tau)}. \quad (45)$$

其中 $\lambda \equiv \frac{T}{mQ^2} k_{\perp}^2 = \frac{1}{2} k_{\perp}^2 \rho^2$. 若所考虑的是低频波, 即 $\left| \frac{\omega}{Q} \right| \ll 1$, 则可对快变量 $\cos Q\tau$ 先行平均, 注意到

$$\langle e^{-\lambda(1 - \cos \delta)} \rangle_\delta = e^{-\lambda} I_0(\lambda) \equiv \Gamma_0(\lambda). \quad (46)$$

则扰动密度为

$$\begin{aligned} \frac{\langle n_1 k \rangle}{n_0} &= -\frac{e\varphi_k}{T} \left[1 + i \int_0^\infty d\tau \left(\omega - \omega_* + i \frac{ds}{d\tau} \right) \Gamma_0(\lambda) e^{i\omega\tau - s(\tau)} \right. \\ &\cdot \left. e^{-\frac{1}{4} k_z^2 U_0^2 \tau^2} \right]. \end{aligned} \quad (47a)$$

或者表达为

$$\frac{\langle n_1 k \rangle}{n_0} = -\frac{e\varphi k}{T} \left[1 - \Gamma_0(\lambda) + \Gamma_0(\lambda) \int_0^\infty d\tau \left(\frac{1}{2} v_T^2 k_z^2 \tau - i\omega_* \right) \cdot e^{i\omega\tau - S(\tau) - \frac{1}{4} k_z^2 v_T^2 \tau^2} \right]. \quad (47b)$$

显然, 若无湍流场, $S = 0$, (47)式回到通常表达式:

$$\frac{n_1 k}{n_0} = -\frac{e\varphi k}{T} \left[1 + \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) \frac{\omega}{|k_z| v_T} Z \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \Gamma_0(\lambda) \right]. \quad (48)$$

Z 就是色散函数。总之, (44)或(47a)式就是以一重积分(相当于 Z 函数的推广)表示的重整化扰动密度, 代入泊松方程或准中性条件即得色散方程。

四、应用举例

下面以离声波、电子朗缪波以及低频漂移波为例说明湍流场的影响。

1. 离声波

考虑均匀、无磁场等离子体。由于 $D = D_{||} \approx 1/m^2$, 湍流场对离子的作用可略。离声波存在的条件是

$$T_i/T_e \ll 1, \quad \frac{\omega}{|k| v_{Ti}} \approx \frac{C_e}{v_{Ti}} \gg 1, \quad \left(C_e^2 = \frac{T_e}{m_i} \right).$$

所以

$$\left(\frac{n_1}{n_0} \right)_i = \frac{e\varphi}{T_i} \left[1 + \frac{\omega}{|k| v_{Ti}} Z \left(\frac{\omega}{|k| v_{Ti}} \right) \right] \approx \frac{e\varphi}{T_e} \frac{k^2 C_e^2}{\omega^2}. \quad (49)$$

离声波可由电流驱动, 所以电子平衡分布应取平移麦氏分布:

$$f_0 = n_0 e^{-\frac{v^2}{2} K^2 - i \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}}. \quad (50)$$

这对 (47) 式的修正仅是 $\omega \rightarrow \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$ 。在条件 $\frac{\omega}{|k| v_{Te}} \approx \frac{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}|}{|k| v_{Te}} \approx \frac{C_e}{v_{Te}} \ll 1$ 下, (47b)式可近似计算, 得

$$\left(\frac{n_1}{n_0} \right)_e = \frac{|e|\varphi}{T_e} \left[\alpha_1 + i \sqrt{\pi} \alpha_2 \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}{|k| v_{Te}} \right]. \quad (51)$$

其中

$$\alpha_n \equiv C_n \int_0^\infty dx x^n e^{-x^2 - \hat{D} x^3 h(x/\hat{\tau})}. \quad (52)$$

$$C_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad C_1 = 2, \quad C_2 = 4/\sqrt{\pi}, \quad \hat{D} = 8D/(3v_{Te}^3 |k|), \quad \hat{\tau} = \tau_{eff} \cdot |k| v_{Te}/2.$$

$D = 0$ 时 $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$, (51) 式回到无湍流场结果。 $D > 0$ 时 $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0 < 1$, α_n 对 1 的偏离反映湍流场效应。 $h(x/\hat{\tau})$ 则反映有限关联时间效应。

由(49), (51)式及准中性条件可解出

$$\begin{aligned} \omega_r &= k C_e / \sqrt{\alpha_1}; \\ \gamma &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} k C_e A_1 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} - k C_e / \sqrt{\alpha_1}) / |k| v_{Te}. \end{aligned} \quad (53)$$

其中 $A_1 = \alpha_2 / \sqrt{\alpha_1}$. 图 2 给出 $1/\sqrt{\alpha_1}$ 及 A_1 随 $\hat{D}$ 及 $\hat{t}$ 的变化. 由图可见, 湍流场使 ω_r 增加, 使 γ 下降. 当 $1/\sqrt{\alpha_1} \geq \frac{u}{C_r}$ 时, 离声波可完全被稳定. 而有限关联时间 ($\hat{t}$ 增加) 则起着削弱湍流场影响的作用.

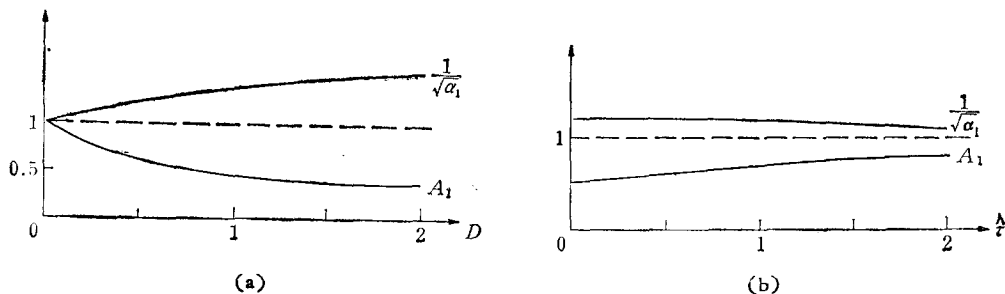


图 2

2. 电子朗缪尔波

这是高频波, 离子可看成是静止的正电背景. 电子平衡分布取麦氏分布, 由(47b)式

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)_e = \frac{|e|\varphi}{m} \int_0^\infty d\tau k^2 \tau e^{i\omega\tau - \frac{v_T^2}{4} k^2 \tau^2 - \frac{1}{3} D k^2 \tau^3}. \quad (54)$$

朗缪尔波存在条件是 $\frac{\omega}{|k|v_{Te}} \sim \frac{1}{|k|\lambda_{De}} \gg 1$, 若又满足条件 $|Dk^2 h / (3\omega^2)| \ll 1$, 则(54)式可近似计算得

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)_e \simeq -\frac{|e|\varphi}{T_e} \frac{k^2 v_{Te}^2}{2\omega^2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} + i \frac{8Dk^2}{\omega^2} \cdot (g_r + i g_i) \right]. \quad (55)$$

其中

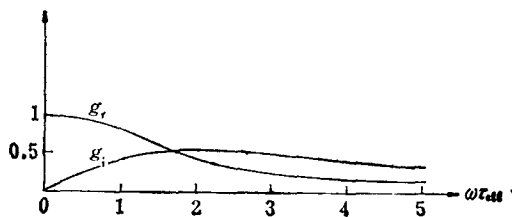
$$g_r(x) = \frac{1 + 3x^2 + 3x^4}{(1 + x^2)^3},$$

$$g_i(x) = \frac{x(3 + 10x^2 + 15x^4)}{8(1 + x^2)^3}. \quad (56)$$

$x \equiv \omega\tau_{eff}$. g_r, g_i 反映有限 τ_{eff} 效应. 将(55)式代入泊松方程, 可解出

$$\omega_r = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{4} k^2 \lambda_{De}^2 - \frac{4Dk^2}{\omega_{pe}^3} g_i \right)$$

$$\gamma = \frac{4Dk^2}{\omega_{pe}^2} g_r. \quad (57)$$

图 3 g_r, g_i 与 $\omega\tau_{eff}$ 的关系

g_r, g_i 随 $\omega\tau_{\text{eff}}$ 变化由图 3 给出. 可见, 当 $\omega\tau_{\text{eff}} \ll 1$ 时 $g_r \simeq 1, g_i \ll 1$, 湍流场可引起朗缪波不稳定性(指数小的朗道阻尼项已忽略). 当 $\omega\tau_{\text{eff}}$ 增加时, γ 下降, 同时出现小的频移 $\Delta\omega_r < 0$.

3. 低频漂移波

漂移波通常满足条件:

$$\frac{\omega}{|k_z|v_{Te}} \ll 1 \ll \frac{\omega}{|k_z|v_{Ti}}, \quad (58)$$

则(47b)可作近似计算, 得

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)_e \simeq \frac{|e|\varphi}{T_e} \left[\alpha_1 - i \sqrt{\pi} \frac{\omega_{*e}\alpha_0 - \omega\alpha_2}{|k_z|v_{Te}} \right]. \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n_1}{n_0}\right)_i \simeq & \frac{e\varphi}{T_e} \left\{ \frac{T_e}{T_i} (\Gamma_0(\lambda) - 1) + \Gamma_0(\lambda) \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left[1 + \frac{k_z^2 C_i^2}{\omega_{*e}^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - i \frac{D_{\perp} k_{\perp}^4}{Q_i^2 \omega} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_{\text{eff}}^2} + \frac{i\omega\tau_{\text{eff}}}{1 + \omega^2 \tau_{\text{eff}}^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

其中 α_n 由(52)式给出.

由准中性条件可解出

$$\begin{aligned} \omega_r \simeq & \Gamma_0(\lambda) \omega_{*e} \left(1 + \frac{k_z^2 C_i^2}{\omega_{*e}^2} + \frac{D_{\perp} k_{\perp}^4}{Q_i^2} \frac{\tau_{\text{eff}}}{1 + \omega^2 \tau_{\text{eff}}^2} \right) / \left[\alpha_1 + \frac{T_e}{T_i} (1 - \Gamma_0(\lambda)) \right], \\ \gamma = & \left[\sqrt{\pi} (\omega_{*e}\alpha_0 - \alpha_2 \omega_r) \frac{\omega_r}{|k_z|v_{Te}} - \frac{D_{\perp} k_{\perp}^4}{Q_i^2} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_{\text{eff}}^2} \right] / \left[\alpha_1 + \frac{T_e}{T_i} (1 - \Gamma_0(\lambda)) \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

湍流场对电子的影响由 α_n 对 1 的偏离体现之. $D_{\parallel} > 0$ 时 $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0 < 1$, 所以湍流场使 ω_r 增加, 对 γ 的影响则与参数有关. 湍流场有明显效应, 也即 α_n 明显偏离 1 的条件要求 $D_{\parallel} \approx |k_z|v_{Te}^3$, 即湍流强度应达

$$\frac{|e\varphi_e|^2}{T_e^2} \approx \frac{|k_z|}{k_{z0}} \frac{1}{k_{z0} v_{Te} \tau_{\text{eff}}} \quad (62)$$

其中 k_{z0} 是湍流场的特征纵向波矢. 若按

$$k_{0z} \approx k_z, \quad \tau_{\text{eff}} \simeq \frac{1}{\Delta\omega} \approx \frac{1}{\omega}$$

估计, 则要求

$$\frac{e^2 |\varphi_e|^2}{T_e^2} \approx \frac{\omega}{k_{z0} v_{Te}} \approx 10^{-1}.$$

这是很强的要求, 通常托卡马克等实验达不到此强度. 所以, 电子纵向扩散效应实际上并不重要.

离子的湍流效应由 $\frac{D_{\perp} k_{\perp}^4}{Q_i^2}$ 项体现, 它主要引起横向扩散阻尼. 此项使漂移波饱和的

条件要求 $\frac{D_{\perp} k_{\perp}^4}{Q_i^2} \approx \gamma_r$, 即要求

$$\frac{e^2 |\varphi_i|^2}{T_e^2} \approx \frac{\gamma_e}{\omega_{*e}} \cdot \frac{1}{\omega_{*e} \tau_{\text{eff}}} \cdot \frac{1}{k_{\perp 0}^2 r_n^2} \quad (63)$$

$k_{\perp 0}$ 是湍流场的横向特征波矢。若按

$$\tau_{\text{eff}} \approx \frac{1}{\Delta \omega} \approx \frac{1}{\omega_{*e}}, \quad k_{\perp 0} \approx k_{\perp} \approx 1/\rho_l$$

估计,则要求

$$\frac{e^2 |\varphi_i|^2}{T_e^2} \approx \frac{\gamma_e}{\omega_{*e}} \cdot \frac{\rho_i^2}{r_n^2}$$

这是较低的强度,实验上是容易达到的。有限关联时间效应约为 $\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_{\text{eff}}^2} \approx \frac{1}{2}$,并不改变此结论。因此,以漂移波为特征的湍流场的主要作用是引起离子扩散阻尼,它可使漂移波达到饱和。

参 考 文 献

- [1] T. H. Dupree, *Phys. Fluids*, **9**(1966), 1773.
- [2] T. H. Dupree, *Phys. Fluids*, **10**(1967), 1049.
- [3] A. Orszag, R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids*, **10**(1967), 1720.
- [4] J. Weinstock, *Phys. Fluids*, **12**(1969), 1045.
- [5] J. Weinstock, *Phys. Fluids*, **13** (1970), 2308.
- [6] J. H. Misguich, R. Balescu, *J. Plasma Phys.*, **13**(1975), 385.
- [7] 张承福,物理学报 **33**(1984), 786.

ON THE RENORMALIZED DISPERSION EQUATION OF TURBULENT PLASMA

ZHANG CHENG-FU

(Department of Physics Peking University)

ABSTRACT

Starting from the kinetic equation in the $\mathbf{K}$ space, which is the Fourier space of velocity $\mathbf{V}$ and using the technique of operator calculation and transformation, the renormalized dispersion equation of turbulent plasma has been derived rather simply. The effect of finite correlation time of the turbulence has been calculated under the approximation of assuming a turbulence with effective correlation time τ_{eff} instead of the one with time and space correlation. It shows that the effect of finite τ_{eff} will reduce the effect of turbulence. Therefore, the expression obtained in the limiting case of short correlation time is the upper bound of the turbulence effect. The effects of turbulence on the ion sounds, electron langmuir waves and drift waves have also been discussed.