

利用双全息透镜实现光学普遍变换

董 碧 珍 顾 本 源

(中国科学院物理研究所)

1985 年 4 月 10 日收到

提 要

在一般情形下(傍轴近似或非傍轴情形)和离散取样情形下,应用逐次反馈迭代算法,导出实现任意给定变换的双全息透镜的振幅-相位分布所满足的方程组. 以四维自然序的 Walsh 变换为例子,给出了双全息透镜的振幅-相位分布和相应的逼近“距离”值,结果令人满意,表明本方案是切实可行的.

一、引 言

根据霍裕平、杨国桢和顾本源早先提出的光学普遍变换理论,原则上可以采用由多个纯相位型的全息透镜组或者由振幅-相位型的全息透镜组所组成的光学系统来实现给定的普遍变换^[1-3]. 文献[4]和[5]在理论上和实验上实现了低维数的 Walsh 变换. 但由于衍射损耗和相干光散斑噪声等的干扰,限制了由多个全息透镜所组成的变换系统的信噪比提高. 尔后,杨国桢又提出通过加密全息透镜的取样点数目,利用单个全息透镜实现普遍变换的理论^[6]. 文献[7]在实验上利用单个全息透镜实现了低维数的 Walsh 变换. 但在实际应用中,例如要求实现高维数的 Walsh 变换时,由于文献[6]的理论要求全息透镜取样点数目等于输入和输出平面上的取样点数目之乘积,这个数目是相当大的,在目前技术水平下,难以制作这种全息透镜. 文献[8]讨论了能否适当地减少取样点的数目,仍用单个全息透镜来实现普遍变换,其结论是悲观的. 本文为了解决上述困难,提出一个折衷方案,利用两个全息透镜来实现给定的普遍变换,它将信息量均摊到两片全息透镜上,以便于实际制作. 系统的信噪比略为降低. 本文在傍轴近似或非傍轴情形下以及离散取样情形下,导出设计双全息透镜的基本公式和采用反馈式的迭代算法,求解有关的方程组. 以四维三种序的 Walsh 变换为例,进行了具体计算,并给出满意的结果.

本文只限于讨论一维情形,所有结果不难直接推广到二维情形.

二、基本方程和迭代解法

利用两个振幅-相位型的全息透镜组实现给定的线性变换(不限于么正变换)的典型光学系统如图 1 所示. 输入平面为 P_{in} , 输出平面为 P_{out} . 两个全息透镜的振幅-相位分布分别记作 $H_1(x_1) = \rho_1(x_1)\exp[i\phi_1(x_1)]$ 和 $H_2(x_2) = \rho_2(x_2)\exp[i\phi_2(x_2)]$, 它们彼此

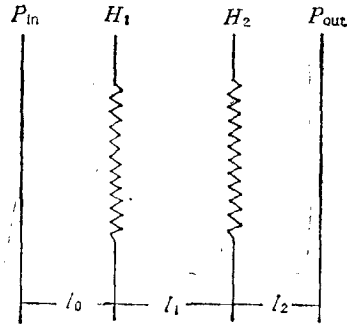


图 1

之间的距离依次地记作 l_0, l_1, l_2 , 各平面上的孔径大小分别为 a_0, a_1, a_2, a_3 , 取样点数目为 N_1, N, N, N_2 . 根据文献[1]和[2], 图 1 所示的光学系统实现的线性变换为

$$\tilde{G} = G_0(l_2) \cdot H_2 \cdot G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0), \quad (1)$$

其中 $G_0(l)$ 表示光波在自由传播过程中(距离为 l)所实现的变换, 它的传递函数由菲涅耳-基尔霍夫公式给出^[1,2]. 在离散取样形下, 自由传播矩阵 G_0 可以表示成

$$G_0(l_0)_{pq} = K_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + S_0}}{2(1 + S_0)}} \cdot e^{i \frac{2\pi l_0}{\lambda} (\sqrt{1 + S_0} - 1)}, \quad \text{当 } S_0 \geq 0.10 \quad (2a)$$

$$G_0(l_0)_{pq} = K_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + S_0}}{2(1 + S_0)}} \cdot e^{i \frac{2\pi l_0}{\lambda} \left[\frac{S_0}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{2} \right)^3 - \frac{5}{8} \left(\frac{S_0}{2} \right)^4 + \frac{7}{8} \left(\frac{S_0}{2} \right)^5 \right]},$$

当 $S_0 < 0.1$ (2b)

其中 $q = 1, 2, \dots, N_1, p = 1, 2, \dots, N$,

$$K_0 = \sqrt{\frac{1}{i\lambda l_0}} \cdot e^{i2\pi l_0/\lambda}, S_0 = \left(p \frac{a_1}{Nl_0} - q \frac{a_0}{Nl_0} \right)^2.$$

λ 代表入射光波的波长. 同样地可以写出 $G_0(l_1)_{pq}$ 和 $G_0(l_2)_{pq}$ 的相仿表达式, 只需修改取样点值, 孔径大小和相应距离值. 这里 0.10 是个适当的控制常数. 在 (2b) 式中, 如果指数上括号内只取第一项, 这就是文献[6]中所采用的傍轴近似下的 G_0 表达式.

如何设计 H_1 和 H_2 使得 $\tilde{G}$ 最佳地逼近给定的线性变换 G ? 文献[3]提出一种迭代求解方法. 设光学系统由 n 个全息透镜组所组成, 在运算的每一个步骤上, 只有一个全息透镜是真正的变量, 通过变动它, 使得 $\tilde{G}$ 最佳地逼近 G , H_n 必须满足下列方程组^[3]:

$$\sum_{l=1}^N A_{kl} \cdot B_{lk} \cdot [H_n]_{ll} = C_{kk}, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (3)$$

这里 A_{kl} , B_{lk} 和 C_{kk} 的含义见文献[3].

$\tilde{G}$ 逼近 G 的程度由逼近“距离” D 描述

$$D^2 = \|G - \tilde{G}\|^2 = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{ii} (G - \tilde{G})_{ii} \cdot (G^+ - \tilde{G}^+)_{ii}. \quad (4)$$

对于由两个全息透镜所组成的光学系统, 分别通过变动 H_1 和 H_2 , 使逼近“距离” D 达到极小. 采用反馈式迭代法, 求得实现最佳逼近的 H_1 和 H_2 值(详细的公式见附录).

原则上,可以通过改变众多的独立参数以求得逼近“距离”为最小。例如 $N, l_0, l_1, l_2, a_0, a_1, a_2, a_3$ 等诸参数都可以变动,去寻求最小的 D 的条件。在利用单个全息透镜实现光学变换的理论中,全息透镜的取样点数目 N 应该等于输入和输出平面上取样点数的乘积, $N = N_1 \cdot N_2$ 。这意味着,为了实现由 $(N_1 \cdot N_2)$ 个自由度组成的变换 $G_{ij} (i=1, 2, \dots, N_2, j=1, 2, \dots, N_1)$, 必须由相同自由度的全息透镜 $H_{kk} (k=1, 2, \dots, N)$ 进行调制。在物理上这是合理的。对于由两个全息透镜组成的光学系统实现光学普遍变换时,当然合理地令 $N = N_1 \cdot N_2 / 2$, 保持同样多的信息量,才有可能实现光学变换。对于一个特定的变换 G 来说,究竟哪些参数最合适? 以及 N 的数目能否再降低? 对具体变换要进行具体分析和计算。

表1 实现自然序的 Walsh 变换的双全息透镜的振幅-相位分布

全 息 透 镜 1			全 息 透 镜 2		
取样点序号	振幅	相位	取样点序号	振幅	相位
1	0.5843	1.3492	1	0.2335	-1.3913
2	0.7058	-0.2541	2	0.2797	0.0637
3	0.9893	0.8095	3	0.4219	1.2310
4	0.7778	-1.3608	4	0.2335	-1.3913
5	1.0000	-0.6651	5	0.4001	-0.3304
6	0.6961	-0.3867	6	0.3004	0.0532
7	0.5879	-0.1649	7	0.2243	0.1671
8	0.0244	0.9146	8	0.2797	0.0637

表2 自然序的 Walsh 变换 G 和光学系统所实现的变换 $\tilde{G}$ 的对应元素值(有关的参数是:

$l_1 = 30\text{cm}, l_0 = l_2 = 100\text{cm}, a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0.225\text{cm}, N_1 = N_2 = 4, N = 8$, 逼近
“距离”为 $D_1 = 3.8674 \times 10^{-2}, D_2 = 3.8494 \times 10^{-2}$)

取样点序号	Walsh 变换矩阵		光学实现 Walsh 变换矩阵	
	振幅	相位	振幅	相位
1	0.5000	0.0	0.5045	0.0030
2	0.5000	0.0	0.4957	0.0075
3	0.5000	0.0	0.4983	0.0059
4	0.5000	0.0	0.5021	0.0026
5	0.5000	0.0	0.5035	-0.0042
6	-0.5000	0.0	-0.4945	0.0062
7	0.5000	0.0	0.4984	-0.0060
8	-0.5000	0.0	-0.5024	0.0015
9	0.5000	0.0	0.4959	-0.0013
10	0.5000	0.0	0.5027	-0.0041
11	-0.5000	0.0	-0.5026	-0.0027
12	-0.5000	0.0	-0.4987	-0.0027
13	0.5000	0.0	0.4976	0.0018
14	-0.5000	0.0	-0.5047	-0.0036
15	-0.5000	0.0	-0.5007	0.0017
16	0.5000	0.0	0.4969	-0.0037

三、实现四维三种序 Walsh 变换的实例

为了验证上述的理论公式,我们对四维三种序的 Walsh 变换进行了具体计算.在这些例子中,令 $N_1 = N_2 = 4$, $N = N_1 \cdot N_2 / 2 = 8$, 初始值 $H_1 = 1.0 + j0.5$ (假设为均匀分布), 计算表明, 最终收敛值不依赖于初始值. 表 1 列出实现四维自然序的 Walsh 变换的两个全息透镜的振幅-相位分布. 表 2 列出该系统的有关参数值、 D_1 和 D_2 值, 以及给定 Walsh 变换 G 与最佳 $\tilde{G}$ 的相应诸元素值. 对于四维光学序和 Walsh 序的 Walsh 变换, 进行了类似的计算, 其结论与自然序的 Walsh 变换相仿.

四、讨 论

本文提出了利用双全息透镜系统实现光学普遍变换, 它的优点在于把单个全息透镜上密集的信息量均摊在两片全息透镜上, 以便于实际制作. 本文计算中, 为了适当地简化计算, 令各个平面上的孔径相同, 这并非带来本质的限制. 另外, 具体计算表明当选用不同的参数值时, 迭代过程的收敛速度以及最终达到的逼近“距离”值大不相同. 对于双全息透镜系统, 可调整的参数增多了, 为此在设计实现普遍变换的光学系统时, 提供了更大的灵活性.

附 录

对于由两个全息透镜所组成的光学系统, 分别通过变动 H_1 和 H_2 , 使逼近“距离”达到极小. 采用反馈迭代法, 求得实现最佳逼近的 H_1 和 H_2 值.

(1) 由已知 H_1 , 求 H_2 ,

$\tilde{G}$ 可以写成

$$\tilde{G} = G_0(l_2) \cdot H_2 \cdot G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0) = P_1 \cdot H_2 \cdot P_2, \quad (\text{A. 1a})$$

其中

$$P_1 = G_0(l_2), P_2 = G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0). \quad (\text{A. 1b})$$

因此, 有

$$\begin{aligned} A &= P_1^+ P_1 = G_0^+(l_2) G_0(l_2), \\ B &= P_2 P_2^+ = G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0) G_0^+(l_0) \cdot H_1^+ \cdot G_0^+(l_1), \\ C &= P_1^+ \cdot G \cdot P_2^+ = G_0^+(l_2) \cdot G \cdot G_0^+(l_0) \cdot H_1^+ \cdot G_0^+(l_1). \end{aligned} \quad (\text{A. 1c})$$

这里的 $G_0(l_i)$, $i = 0, 1, 2$ 的定义见正文 (2a) 和 (2b) 式. 可具体地写出 (3) 式中诸项:

$$\begin{aligned} A_{kl} B_{lk} &= \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N \left[\sum_{s=1}^{N_2} G_0^+(l_2)_{ks} \cdot G_0(l_2)_{sl} \right] \cdot G_0(l_1)_{lp} \cdot (H_1)_{pp} \\ &\quad \cdot \left[\sum_{q=1}^{N_1} G_0(l_0)_{pq} G_0^+(l_0)_{qr} \right] \cdot (H_1^+)_{rr} \cdot G_0^+(l_1)_{rk} \\ &= U_{kl} \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N G_0(l_1)_{lp} \cdot (H_1)_{pp} \cdot V_{pr} \cdot (H_1^+)_{rr} \cdot G_0^+(l_1)_{rk}. \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

此处, 我们引用记号

$$U_{kl} = \sum_{s=1}^{N_2} G_0^+(l_2)_{ks} \cdot G_0(l_2)_{sl}, \quad (\text{A. 3a})$$

$$V_{pr} = \sum_{q=1}^{N_1} G_0(l_0)_{pq} \cdot G_0^+(l_0)_{qr}, \quad (\text{A.3b})$$

C_{kk} 可写成

$$C_{kk} = \sum_{p=1}^{N_2} \sum_{r=1}^{N_2} \sum_{q=1}^{N_1} G_0^*(l_2)_{pk} \cdot G_{pq} \cdot G_0^*(l_0)_{rq} \cdot (H_1^*)_{rr} \cdot G_0^*(l_1)_{kr}. \quad (\text{A.4})$$

最后, 实现 $\tilde{G}$ 最佳逼近 G 的 H_2 值为下述方程组的解:

$$\sum_{l=1}^N A_{kl} B_{lk}(H_2)_{ll} = C_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.5})$$

逼近“距离” D_1 为

$$D_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N_2} \sum_{q=1}^{N_1} G_{pq}^* G_{pq} + \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N A_{kl} B_{lk} \cdot (H_2^+)_{kk} \cdot (H_2)_{ll} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N C_{kk}(H_2^+)_{kk} \right]. \quad (\text{A.6})$$

仿照上述同样的推导步骤, 可以导出已知 H_2 求 H_1 的基本方程式.

(2) 由已得到的 H_2 值, 求实现最佳逼近“距离”的 H_1 值

此时, 有

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= P'_1 \cdot H_1 \cdot P'_2, \\ P'_1 &= G_2(l_2) \cdot H_2 \cdot G_0(l_1), \quad P'_2 = G_0(l_0), \\ A' &= P_1'^+ \cdot P'_1, \quad B' = P'_2 \cdot P_2'^+, \quad C' = P_1'^+ \cdot G \cdot P_2'^+. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

具体的表达式如下:

$$A'_{kl} B'_{lk} = \left[\sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N G_0^+(l_1)_{kp} \cdot (H_2^+)_{pp} \cdot U_{pr} \cdot (H_2)_{rr} \cdot G_0(l_1)_{rl} \right] \cdot V_{lk}, \quad (\text{A.8a})$$

以及

$$C'_{kk} = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{r=1}^{N_1} G_0^*(l_1)_{pk} \cdot (H_2^+)_{pp} \cdot G_0^*(l_2)_{qp} \cdot G_{qr} \cdot G_0^*(l_0)_{kr}. \quad (\text{A.8b})$$

H_1 值由下述方程组确定:

$$\sum_{l=1}^N A'_{kl} B'_{lk} \cdot (H_1)_{ll} = C'_{kk}, \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{A.9})$$

其逼近“距离” D_2 为

$$D_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N_2} \sum_{q=1}^{N_1} G_{pq}^* \cdot G_{pq} + \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N A'_{kl} B'_{lk} \cdot (H_1^+)_{kk} \cdot (H_1)_{ll} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N C'_{kk}(H_1^+)_{kk} \right]. \quad (\text{A.10})$$

参 考 文 献

- [1] 霍裕平、杨国楨、顾本源, 物理学报, **24**(1975), 438.
- [2] 霍裕平、杨国楨、顾本源, 物理学报, **25**(1976), 31.
- [3] 杨国楨、顾本源, 物理学报, **30**(1981), 414.
- [4] 杨国楨、潘少华, 物理学报, **29**(1980), 1301.
- [5] 陈岩松、王玉堂、李秀英, 物理学报, **29**(1980), 1307.
- [6] 杨国楨, 物理学报, **30**(1981), 1340.
- [7] 王玉堂、李秀英、姜长山、陈岩松, 物理学报, **33**(1984), 1599.
- [8] 董碧珍、顾本源, 物理学报, **35**(1986), 235.

REALIZING OPTICAL GENERAL TRANSFORM BY DUAL HOLOGRAPHIC LENSES

DONG BI-ZHEN GU BEN-YUAN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

For the general case (either paraxial approximation or non-paraxial situation) and the case of discrete sample, we show that any given linear transform can be achieved by dual phase-amplitude mask optical system. Using feed-back iteration approach, the specific formulae to design the phase-amplitude distributions of dual masks are obtained. Adopting four dimensional Walsh transform in three orders as examples, we have given the phase-amplitude distributions for masks and evaluated the approach degree. These results are relatively satisfactory. It shows the present proposal is reasonable and useful.

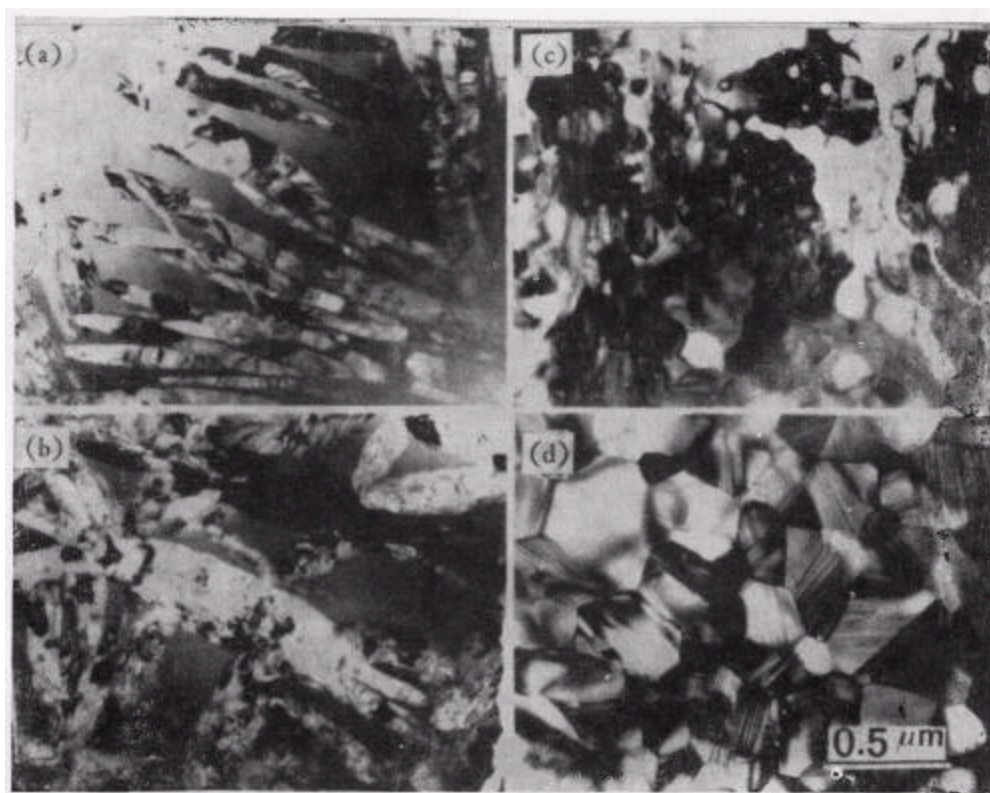


图 1 Ni₇₀Zr₃₀ 非晶合金加热至 500°C(a), 570°C(b), 640°C(c) 及 800°C(d) 时电子显微象

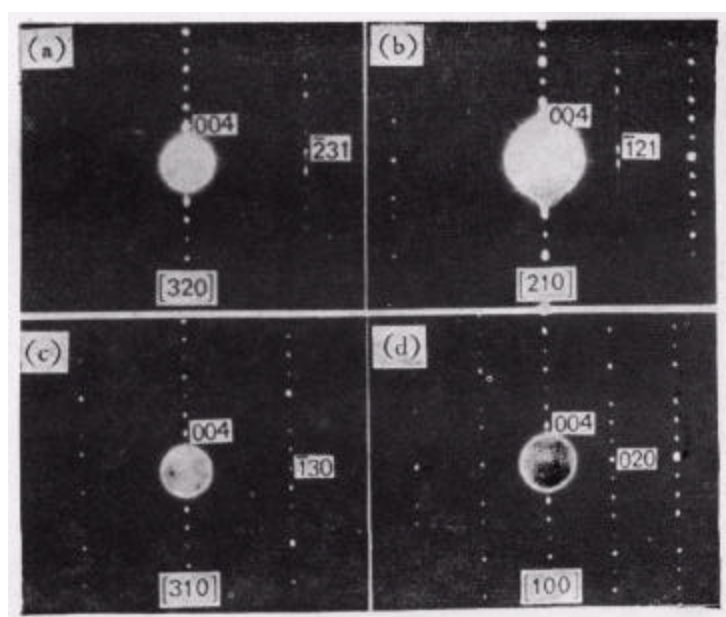


图 2 T₁ 亚稳相的电子衍射图

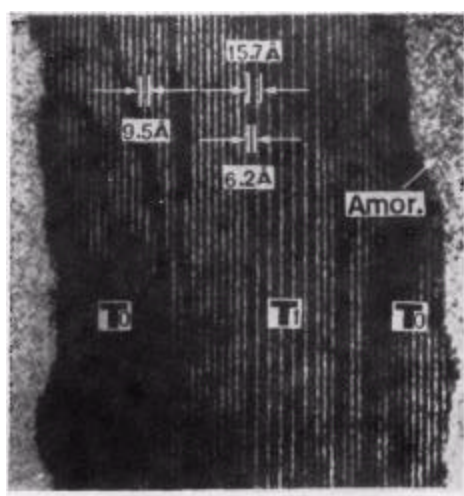


图 4 针状相尖端薄区的一维点阵象

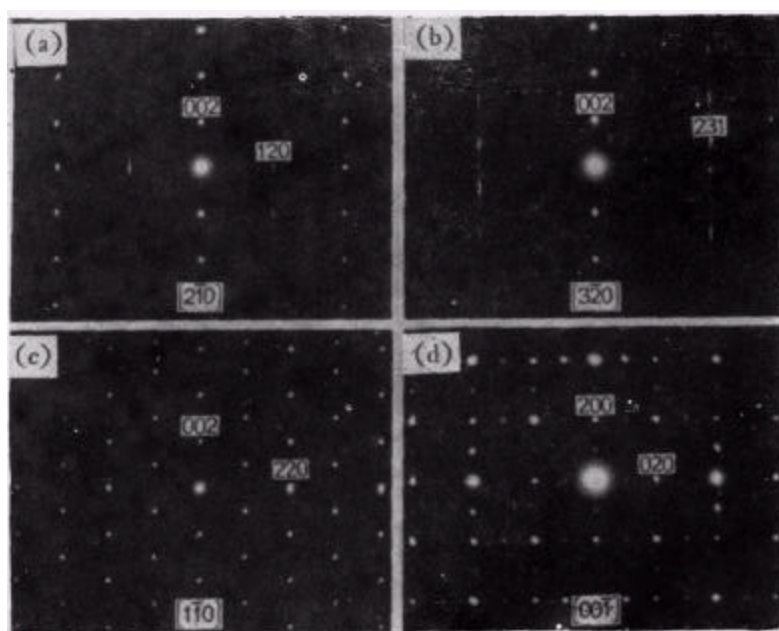


图 5 T₂ 相的电子衍射图

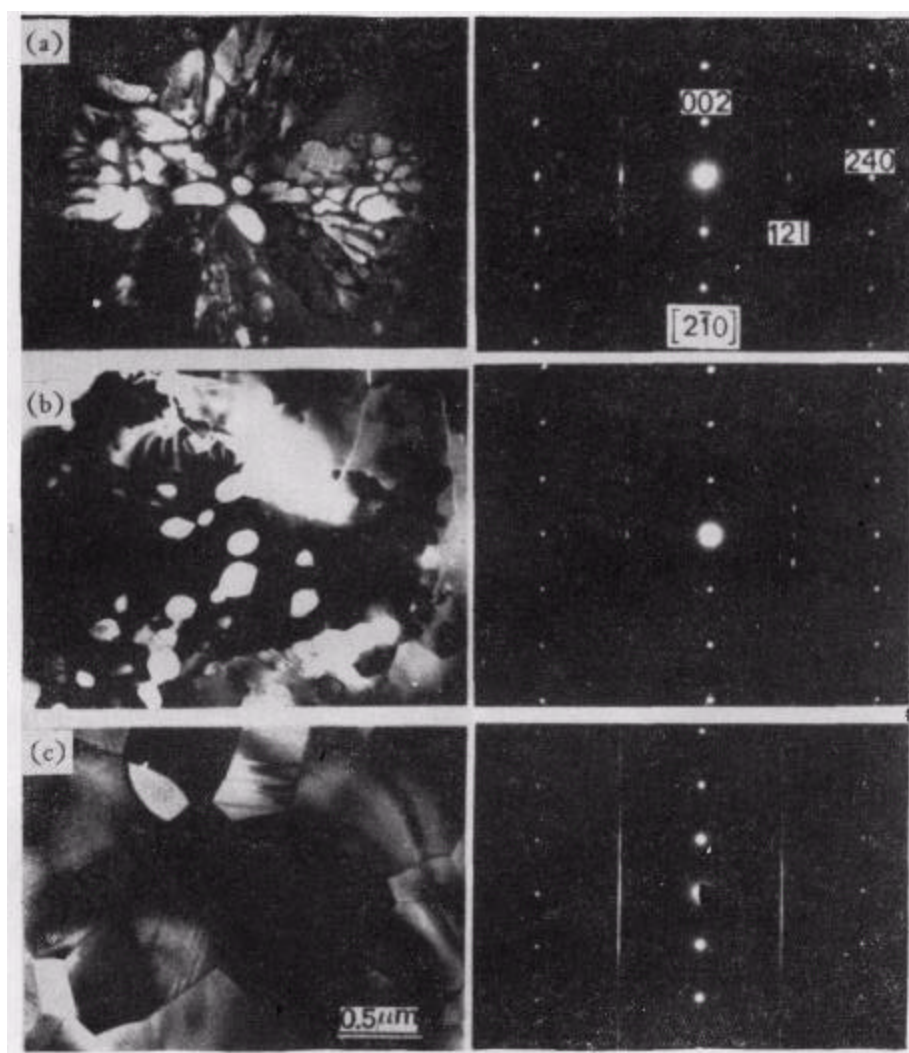


图7 不同条件下析出的 $\text{Ni}_{10}\text{Zr}_7$ 相的形态及其电子衍射图
(a) 原始急冷条带中偶然出现; (b) 非晶加热至 730°C ; (c) 加热至 900°C 。

张人佺等: Ge/Au, Ge/Ag 双层膜和 Ge-Au, Ge-Ag 合金膜中非晶 Ge 的 图版 I
晶化

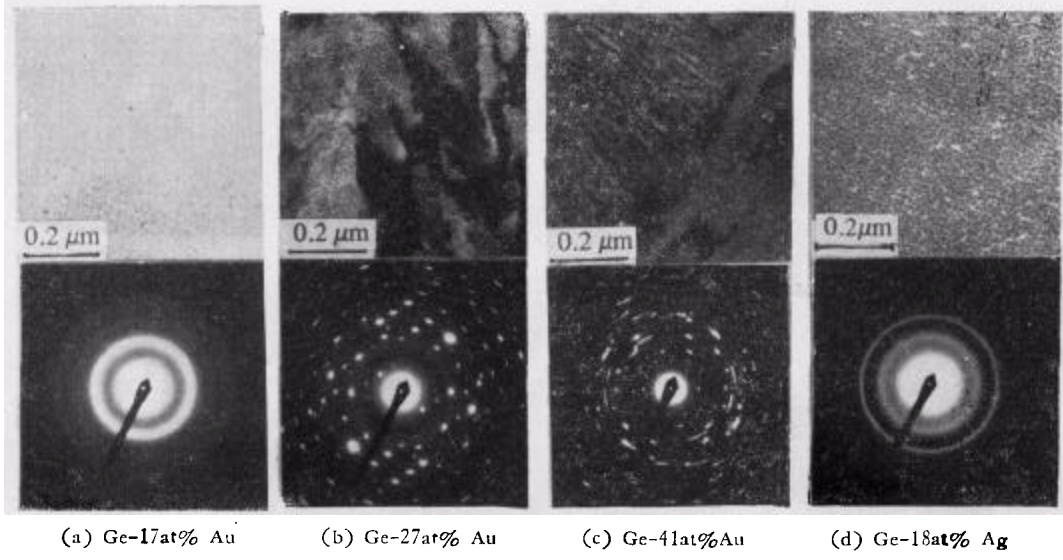


图 1 室温蒸沉积合金膜电子显微镜形貌和衍射图

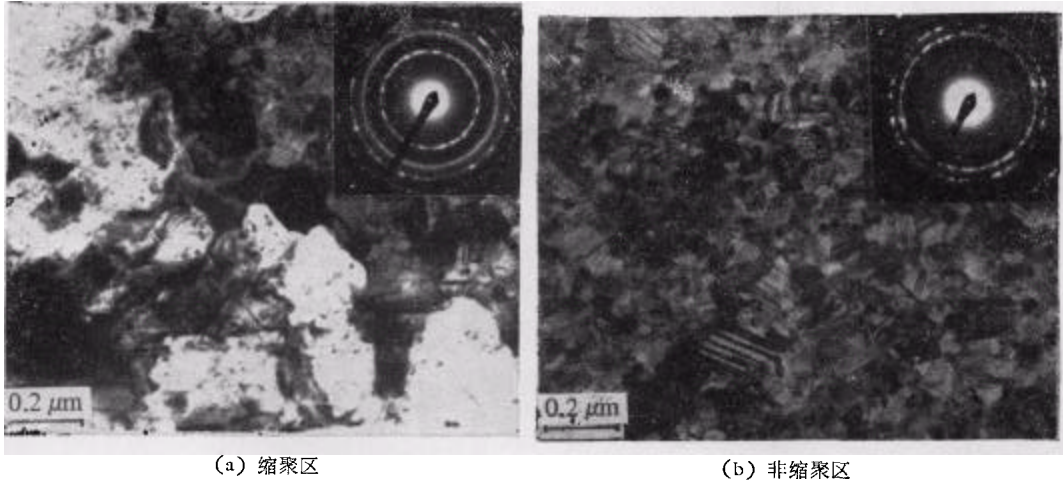


图 2 a-Ge/ 多晶 Ag 膜 280℃ 退火 30 min 后的形貌和选区衍射图

张人信等: Ge/Au, Ge/Ag 双层膜和 Ge-Au, Ge-Ag 合金膜中非晶 Ge 的 图版 II
晶化

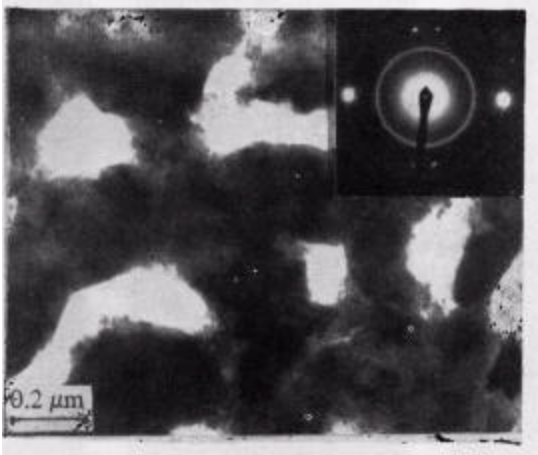
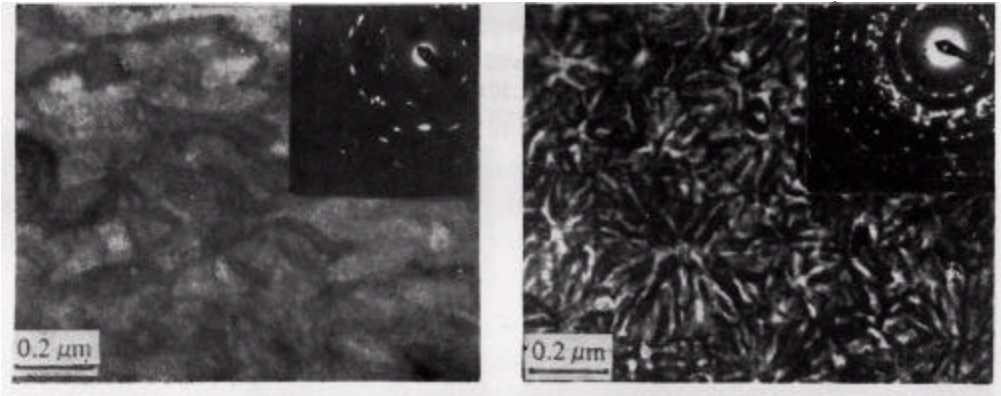
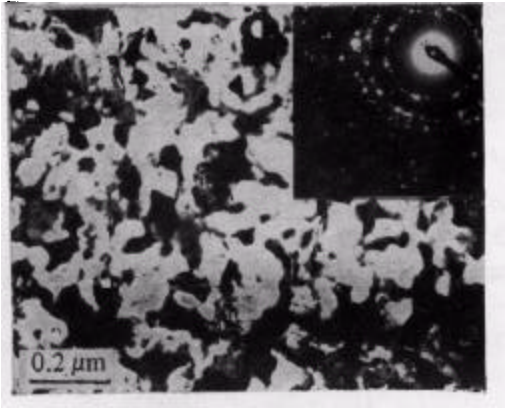


图3 a-Ge/单晶 Ag 膜 280℃ 退火 30 min 后的形貌象和衍射图



(a) 室温蒸积膜

(b) 50℃ 退火 30 min



(c) 300℃ 退火 30 min

图4 Ge-60at% Au 膜的电子显微镜观测

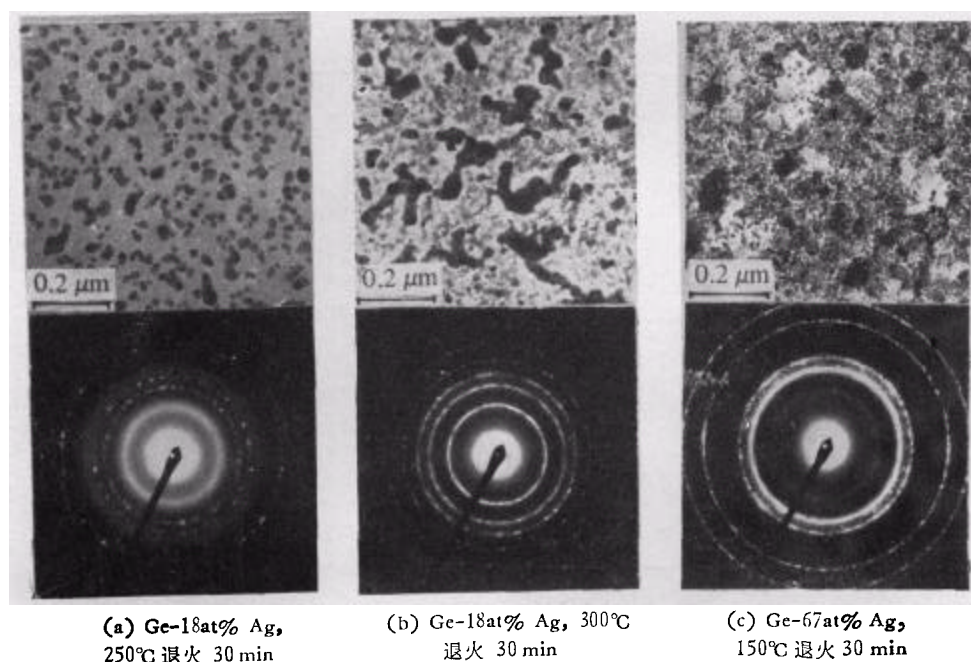


图 5 Ge-Ag 膜退火试样的电子显微镜观测

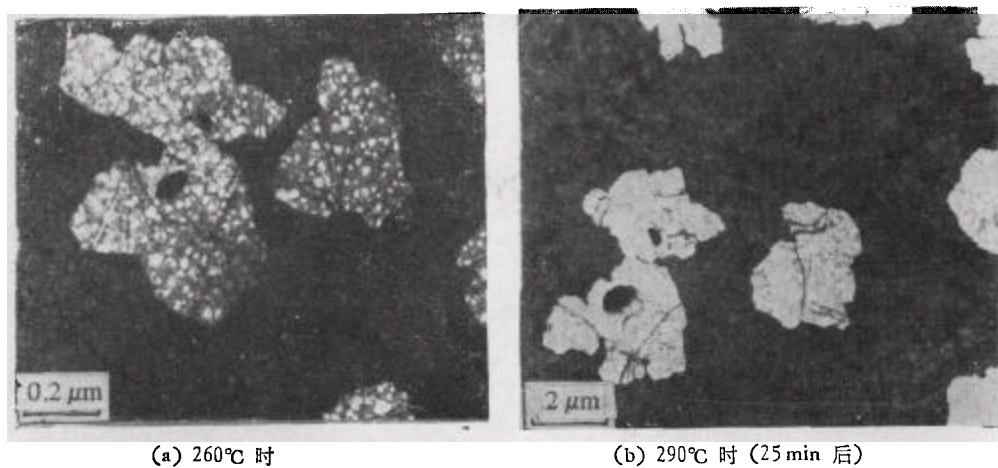


图 7 a-Ge/ 多晶 Au 膜加热过程中等轴状缩聚区的长大