

规范理论中反常的拓扑意义与规范群的 Čech-de Rham 上同调*

王 珮

侯伯元

(四川大学物理系) (内蒙古大学物理系)

侯伯宇

(西北大学现代物理研究所)

1985 年 4 月 5 日收到

提 要

本文分析了规范群上同调的拓扑障碍. 指出规范群上同调的上边缘算子相当于 Čech 的差映射算子. 采用逐级分区的方法克服以往常用的 d^{-1} 算子的含混性, 而且将各阶上闭链与指数 Z 相联系, 澄清了规范群上闭链的整体拓扑意义.

一、引 言

量子场论中反常的研究占有重要地位. 当经典作用量的规范对称性在量子场论中不再保持时, 就会出现反常, 它们的存在最初是通过微扰的计算发现的. 为使理论可重整, 反常相消是理论自治的重要条件, 这是对各种模型理论建立的重要约束. 由于反常的重要性, 近十年来规范场大范围拓扑性质愈来愈引起人们广泛的注意, 许多文献分析了反常的拓扑根源^[1,2]. Wess 与 Zumino^[3,4] 首先给出手征反常满足的自治条件, 并给出在非线性 σ 模型中能导出反常的有效拉氏量. 最近有一系列文献从两个方面对反常的拓扑根源进行探讨. Zumino 与 Stora 等人^[1,5] 分析了规范代数的微上同调与反常关系. Atiyah 等人^[6] 利用族指数 (family index) 定理分析了存在反常的各级拓扑障碍. 另一方面, Faddeev^[7] 分析了规范群的表示结构, 用规范群上同调来分析反常的拓扑根源, 指出二级拓扑障碍会导致奇维空间规范流代数等时对易关系中的反常 Schwinger 项, 并指出它们与 Kac-Mody 代数的关系, 引起了广泛的注意. Jackiw^[8] 及我们^[9] 独立地指出了规范群 3-上闭链标志群表示的不可结合性, 它会导致二维空间规范代数对易关系中 Jacobi 等式的反常.

在本文中, 我们利用 Mayer-Vietoris 系列, 采用将拓扑非平庸区间再细分的方法, 使各级积分区域拓扑平庸化, 这样便能逐级越过各级同伦运算 d^{-1} 的障碍^[7,10,11], 澄清了以往文献中 d^{-1} 运算的含混性. 将底空间区间再细分, 各区之间规范势差规范变换, 这样在底

* 中国科学院科学基金资助的课题.

流形覆盖网 (nerve of a covering) 与联络空间的上链 (cochain) 间建立对偶联系. 于是可以将 Čech 上调中的差映射算子对应于规范群的上边缘算子, 引进了 Čech-de Rham 双复形 (double complex), 将规范群上调与 Čech-de Rham 上调联系. 多重分区可得更低维空间上规范群的更高阶拓扑障碍, 这样可得规范群各阶上闭链 (mod Z), 其拓扑非平庸性与整数 $Z \neq 0$ 有关, 这里整数 Z 标志着与规范势耦合的 Dirac 算子的指数, 这样我们从整体观点统一联系了规范群的各级拓扑障碍, 弄清了 mod Z 的拓扑意义.

本文第二节具体分析规范群的各级拓扑障碍, 明显表达出如何通过区域细分越过拓扑障碍, 将障碍推到下一级, 并建立了规范群上调密度形式系列 (Q 系列) 及双复形. 将 Q 系列对相应底流形积分得规范群上调调链群 (α 系列), 注意到对规范群上链作上边缘运算, 所得各项来自以该上链积分区域为共同边的各高维邻域的贡献, 于是 Čech 差映射算子自然地对应于规范群上边缘算子. 第三节进一步分析 Q 系列的具体表达式, 利用郭汉英等人^[10,11]引入的推广的陈-Simons 示性类形式 (Q 系列) 可给出 Q 系列的明显结构. 最后一节几点简单结论, 给出规范群上调的上闭链 (cocycle) 系列 (α^n 系列), 它标志着规范理论中各阶反常, 其无穷小形式即规范代数上调闭链^[11,12].

二、规范群的各级拓扑障碍与 Čech-de Rham 双复形

为了分析流形的拓扑性质, 采用微分形式的记号比较方便, 它提供不依赖标架选取的记号. 本文将主要采用这种记号. 规范势 1-形式

$$A(x) \equiv A_\mu^\alpha(x) \lambda^\alpha dx^\mu. \quad (1)$$

为取值在规范群李代数上 1-形式. 规范场强

$$F(x) = dA + A^2. \quad (2)$$

为取值在李代数上 2-形式, 这里(及以后)将外乘符号省略. 令 $a = \{A\}$ 为规范势集合的仿射空间, 它是拓扑平庸(可收缩的). 在空间 a 上可作规范变换使

$$A(x) \rightarrow A(x)^g = g^{-1}(x)A(x)g(x) + g^{-1}(x)dg(x), \quad (3)$$

其中 $g(x)$ 为底流形 M 至李群 G 的映射

$$M \xrightarrow{g} G,$$

其集合 $g = \{g(x)\}$ 称规范群, 为无穷维群, 规范群 g 可能拓扑非平庸, 即可能存在不能连续形变为恒等元的大规范变换, 这时轨道空间 a/g 拓扑非平庸, 它使得与规范势耦合的协变 Dirac 算子的存在造成困难. 由 Atiyah-Singer 指数定理^[13]我们知道

$$\text{Ind} \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} = \int_M \hat{A}(M) \text{Ch}(F) = Z, \quad (4)$$

其中 Z 为整数, $\text{Ch}(F)$ 为规范场的陈特性 (Chern character),

$$\begin{aligned} \text{Ch}(F) &\equiv \text{Tr} e^{iF/2\pi} \\ &= r + \frac{i}{2\pi} \text{Tr} F + \frac{i^2}{2(2\pi)^2} \text{Tr} F^2 + \cdots + \frac{i^n}{n!(2\pi)^n} \text{Tr} F^n + \cdots, \end{aligned} \quad (5)$$

$\hat{A}(M)$ 为用底流形 M 的曲率 R 表达的 $\hat{A}$ -多项式,

$$\begin{aligned}\hat{A}(M) &= \prod_i \frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)} \\ &= 1 + \frac{1}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{12} \text{Tr} R^2 + \frac{1}{(4\pi)^4} \left[\frac{1}{288} (\text{Tr} R^2)^2 + \frac{1}{360} \text{Tr} R^4 \right] + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi)^6} \left[\frac{1}{10368} (\text{Tr} R^2)^3 + \frac{1}{4320} \text{Tr} R^2 \text{Tr} R^4 + \frac{1}{5670} \text{Tr} R^6 \right] + \cdots. \quad (6)\end{aligned}$$

一般设底流形 M 可紧致化为与 $2n$ 维球面 S^{2n} 同胚的流形, 这时 $\hat{A}(S^{2n}) = 1$, 于是 (4) 式化为

$$z = \frac{i^n}{n!(2\pi)^n} \int_{S^{2n}} \text{Tr} F^n \equiv \int_{S^{2n}} \mathcal{Q}_{2n}^{-1}(F), \quad (7)$$

其中 $\mathcal{Q}_{2n}^{-1}(F)$ 为第 n 陈类, 是规范场强 F 的 n 阶不变多项式, 为闭 $2n$ -形式 (closed $2n$ -form). 当 $z \neq 0$ 时, 不能在整体 S^{2n} 上表为恰当形式 (exact form). 将 $M = S^{2n}$ 分为两区 $U_i (i = 0, 1), U_0 \cup U_1 = M$. 每区 U_i 与 $2n$ 维盘 D^{2n} 同胚, 为拓扑平庸的, 故由 Poincaré 引理知, 在每个区域 U_i 下式均成立:

$$\mathcal{Q}_{2n}^{-1}(F) = d\mathcal{Q}_{2n-1}^0(A_i), \quad (8)$$

这里 $\mathcal{Q}_{2n-1}^0(A_i)$ 即熟知的陈-Simons 形式,

$$\mathcal{Q}_{2n-1}^0(A) = \frac{i^n}{(n-1)!(2\pi)^n} \int_0^1 dt \text{Tr}(A F_t^{n-1}), \quad (9)$$

其中

$$F_t = d(tA) + (tA)^2 = tF + t(t-1)A^2. \quad (10)$$

例如, 当 $n = 3$ 时 (以下为简单起见, 将只讨论此情况),

$$\mathcal{Q}_5^0(A) = -\frac{i}{48\pi^3} \text{Tr} \left(F^2 A - \frac{1}{2} F A^3 + \frac{1}{10} A^5 \right). \quad (11)$$

在两个区域的交叠区 $U_0 \cap U_1 \equiv U_{01}$, 两区规范势 A_i 间可差规范变换 $g_1, A_0 \equiv A, A_1 \equiv A^{g_1}$. 相应地可讨论在交叠区所得两个陈-Simons 形式的差,

$$\Delta^0 \mathcal{Q}_5^0(A_0, A_1) \equiv \mathcal{Q}_5^0(A_1) - \mathcal{Q}_5^0(A_0). \quad (11a)$$

以上步骤相当于首先将流形 S^6 上的形式 $\mathcal{Q}^*(S^6)$ 限制映射 (restriction) 到其各区域 U_i , 再取 Čech 差映射 Δ , 得到 Mayer-Vietoris 系列

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}^*(S^6) \xrightarrow{r} \mathcal{Q}^*(D^6(0)) \oplus \mathcal{Q}^*(D^6(1)) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{Q}^*(S^5) \rightarrow 0.$$

如上得到的 Mayer-Vietoris 系列是恰当的, 可以结合 Čech 上同调与 de Rham 上同调, 得到如下的 d - Δ 双复形:

$$\begin{array}{ccccc} M & & U_i & & U_{01} \\ & & \uparrow 0 & & \\ & & \uparrow d & & \\ \mathcal{Q}_6^{-1}(F) & \xrightarrow{r} & \mathcal{Q}_6^{-1}(F) & \xrightarrow{\Delta} & 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d \\ & & \mathcal{Q}_5^0(A_i) & \xrightarrow{\Delta} & \Delta^0 \mathcal{Q}_5^0(A_0, A_1) \end{array}$$

其中 r 代表限制映射, Δ 为差映射, d 为外微分. 于是, 陈类在 S^6 上积分 (即陈数 Z) 表为

$$\begin{aligned} Z &= \int_{S^6} \mathcal{Q}_6^{-1}(F) = \sum_{i=0,1} \int_{D^6(i)} \mathcal{Q}_6^{-1}(F) = \sum_{i=0,1} \int_{D^6(i)} d\mathcal{Q}_5^0(A_i) \\ &= \int_{S^5} \Delta^0 \mathcal{Q}_5^0(A_0, A_1). \end{aligned} \quad (12)$$

上式中最后一步利用了 Stokes 定理, 并注意到两个定向区域的边 S^5 取向相反, 使求和运算变为取差. 易证 $\Delta^0 \mathcal{Q}_5^0(A_0, A_1)$ 为闭形式,

$$d\Delta^0 \mathcal{Q}_5^0(A_0, A_1) = 0. \quad (13)$$

但是由于 S^5 拓扑非平庸, 不能在整个 S^5 上表为恰当形式. 令

$$\alpha^0(A) = 2\pi \int_{S^5} \mathcal{Q}_5^0(A), \quad (14)$$

由(12)式知

$$\Delta \alpha^0(A; g) \equiv \alpha^0(A^g) - \alpha^0(A) = 2\pi Z. \quad (15)$$

泛函 $\alpha^0(A)$ 为 S^5 上规范群的 0-上闭链 (0-cocycle), 当 $Z \neq 0$ 时, $\alpha^0(A)$ 为非平庸 0-上闭链.

为了得到更低维规范群的高阶拓扑障碍, 需对 S^5 进一步分区, 而这可由对最初 S^6 的更细分得到. 例如将 S^6 分为三个与 D^6 同胚区域 (如图 1 所示):

$$S^6 = \sum_{i=0,1,2} D^6(i), \quad \partial D^6(i) = S^5(i),$$

$$S^5(i) = \sum_{j \neq i} D^5(i, j),$$

$$\partial D^5(i, j) = S^4(i, j) = (-1)^{i+j} S^4 \quad (i < j),$$

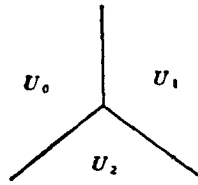


图 1

$$\begin{aligned} Z &= \int_{S^6} \mathcal{Q}_6^{-1}(F) = \sum_i \int_{D^6(i)} \mathcal{Q}_6^{-1}(F) = \sum_i \int_{S^5(i)} \mathcal{Q}_5^0(A_i) \\ &= \sum_{i \neq j} \int_{D^5(i, j)} \mathcal{Q}_5^0(A_i) = \sum_{i < j} \int_{D^5(i, j)} \Delta^0 \mathcal{Q}_5^0(A_i, A_j) \\ &= \sum_{i < j} \int_{D^5(i, j)} (-1) d\mathcal{Q}_4^1(A_i, A_j) = \sum_{i < j} \int_{S^4(i, j)} (-1) \mathcal{Q}_4^1(A_i, A_j) \\ &= \int_{S^4} \Delta^1 \mathcal{Q}_4^1(A_0, A_1, A_2), \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\Delta^1 \mathcal{Q}_4^1(A_0, A_1, A_2) = \mathcal{Q}_4^1(A_1, A_2) - \mathcal{Q}_4^1(A_0, A_2) + \mathcal{Q}_4^1(A_0, A_1). \quad (17)$$

令

$$\alpha^1(A; g) = 2\pi \int_{S^4} \Delta^1 \mathcal{Q}_4^1(A_0, A_1), \quad (18)$$

由(16), (17)式知

$$\begin{aligned} \Delta \alpha^1(A; g_1, g_2) &= \alpha^1(A^{g_1 g_2}; g_2) - \alpha^1(A; g_1 g_2) + \alpha^1(A; g_1) \\ &= 2\pi \int_{S^4} \Delta^1 \mathcal{Q}_4^1(A_0, A_1, A_2) = 2\pi Z. \end{aligned} \quad (19)$$

$\alpha^1(A; g)$ 为 S^4 上规范群的 1-上闭链, 此泛函即 Wess-Zumino 有效作用量, 它对规范群的变分给出流的反常散度.

类似可将流形 S^6 更细分, 以便得到更低维规范群的更高阶拓扑障碍. 这样利用分区使 d^{-1} 运算(使 $\mathcal{Q}_6^{-1} \rightarrow \mathcal{Q}_5^0, \Delta^0 \mathcal{Q}_5^0 \rightarrow \mathcal{Q}_4^1$)有确切定义. 在两区的交叠区规范势间差规范变换, 使底空间分区与规范群空间上链 (cochain) 对偶, 并且可以自然地得到规范群上边缘算子 Δ , 如(15), (19)式所示.

一般情况可类似讨论, S^{2n} 与 $(2n+1)$ 维单形的边缘同胚, 最多可分为 $(2n+1)$ 个与 D^{2n} 同胚的区域, 这 $(2n+1)$ 个区域的交为 S^0 . 这样将 S^{2n} 逐次分为 p 个与 D^{2n} 同胚的区域 ($p \leq 2n+1$), 可得到 Δ - d 双复形系列. 差映射 Δ 定义为

$$\Delta^k \mathcal{Q}_{2n-k-1}^k(A_0, A_1, \dots, A_{k+1}) \equiv \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \mathcal{Q}_{2n-k-1}^k(A_0, A_1, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_{k+1}). \quad (20)$$

这里 $\hat{A}_j$ 表示应将 A_j 删去, 而

$$A_i \equiv A^{g_1 g_2 \dots g_i} = (g_1 \dots g_i)^{-1} A (g_1 \dots g_i) + (g_1 \dots g_i)^{-1} d(g_1 \dots g_i). \quad (21)$$

易证

$$\Delta^2 = 0. \quad (22)$$

映射 Δ 的像为相应底流形上的闭形式

$$d\Delta^k \mathcal{Q}_{2n-k-1}^k(A_0, A_1, \dots, A_{k+1}) = 0. \quad (23)$$

当采取将区间再细分的方法得到拓扑平庸区间, 在拓扑平庸区间,

$$\begin{aligned} \Delta^k \mathcal{Q}_{2n-k-1}^k(A_0, \dots, A_{k+1}) &= (-1)^{k+1} d\mathcal{Q}_{2n-k-2}^{k+1}(A_0, \dots, A_{k+1}) \\ (0 \leq k \leq 2n-1). \end{aligned} \quad (24)$$

这样通过对区间再细分, 可越过 d^{-1} 运算的障碍, 将拓扑障碍推到下一级. 为了看出一般的规律性, 下面再举一例: 将 S^6 分为四个区(其共同交为 S^3), (写在 Σ 符号上面的数字代表求和的项数).

$$\begin{aligned} Z &= \int_{S^6} \mathcal{Q}_6^{-1} = \sum_i^{(4)} \int_{D^6(i)} \mathcal{Q}_6^{-1} = \sum_i^{(4)} \int_{S^5(i)} \mathcal{Q}_5^0(A_i) = \sum_{i \neq j}^{(12)} \int_{D^5(i,j)} \mathcal{Q}_5^0(A_i) \\ &= \sum_{i < j}^{(6)} \int_{D^5(i,j)} \Delta \mathcal{Q}_5^0(A_i, A_j) = \sum_{i < j}^{(6)} \int_{S^4(i,j)} (-1) \mathcal{Q}_4^1(i, j) \\ &= \sum_{\substack{i < j \\ k \neq i, j}}^{(12)} \int_{D^4(i,j,k)} (-1) \mathcal{Q}_4^1(i, j, k) = \sum_{i < j < k}^{(4)} \int_{D^4(i,j,k)} \Delta^1 \mathcal{Q}_4^1(i, j, k) \\ &= \sum_{i < j < k}^{(4)} \int_{D^4(i,j,k)} d\mathcal{Q}_3^2(i, j, k) = \sum_{i < j < k}^{(4)} \int_{S^3(i,j,k)} \mathcal{Q}_3^2(i, j, k) \\ &= \int_{S^3} \Delta^2 \mathcal{Q}_3^2(A_0, A_1, A_2, A_3). \end{aligned} \quad (25)$$

令

$$\alpha^2(A; g_1, g_2) = 2\pi \int_{S^3} \mathcal{Q}_3^2(A_0, A_1, A_2), \quad (26)$$

则

$$\begin{aligned} \Delta \alpha^2(A; g_1, g_2, g_3) &= \alpha^2(A^{g_1}; g_2, g_3) - \alpha^2(A; g_1 g_2, g_3) + \alpha^2(A; g_1, g_2 g_3) \\ &\quad - \alpha^2(A; g_1, g_2) = 2\pi Z. \end{aligned} \quad (27)$$

$\alpha^2(A; g_1, g_2)$ 为 S^3 上规范群 2-上闭链, 其对规范群的变分给出 3 维流对易式的反常

Schwinger 项.

由以上分析看出,利用区域的细分,将 Čech 的差算子 Δ 与 de Rham 的外微分算子 d 结合,可得到如表 1 所示的 Čech-de Rham 双复形系列.

表 1 Čech-de Rham 双复形

M	U_i	$\bigcap_2 U$	$\bigcap_3 U$	$\bigcap_4 U$	$\bigcap_5 U$	$\bigcap_6 U$	$\bigcap_7 U$	
$0 \rightarrow Q_6^{-1} \xrightarrow{r} Q_5^0$	Q_6^{-1} Q_5^0	0 $\Delta^0 Q_5^0$ Q_4^1	0 $\Delta^1 Q_4^1$ Q_3^2	0 $\Delta^2 Q_3^2$ Q_2^3	0 $\Delta^3 Q_2^3$ Q_1^4	0 $\Delta^4 Q_1^4$ Q_0^5	0 $\Delta^5 Q_0^5$	0
$C^0(U, R) \rightarrow C^1(U, R) \rightarrow \dots \rightarrow C^5(U, R) \rightarrow 0$ $\uparrow i$ $\uparrow 0$								

其中 $\bigcap_p U$ 表示 p 个区域的交. $C^p(U, R)$ 为在 $(p+1)$ 重交 $\bigcap_{p+1} U$ 上的局域常实函数的集合. 表 1 中为简化,令 $Q_{5-k}^k \equiv Q_{5-k}^k(A_{i_0}, \dots, A_{i_k})$. 注意到 $\Delta^2 = 0$, $d^2 = 0$ 及 $\Delta d = d\Delta$, 引入 Čech-de Rham 上同调算子

$$D = \Delta + (-1)^p d \quad \left(\text{作用在 } p \text{ 重交叠区 } \bigcap_p U \text{ 上} \right), \quad (28)$$

它满足

$$D^2 = 0. \quad (29)$$

如进一步令将陈类 Q_6^{-1} 限制映射 r 到各区域也形式地用 Δ 表示,

$$rQ_6^{-1} \equiv \Delta Q_6^{-1}.$$

将作用在 $C^6(U, R)$ 上的包含映射 i 形式地用 d 表示,

$$iQ_{-1}^6 \equiv dQ_{-1}^6.$$

这里 $Q_{-1}^6 \equiv C^6(U, R)$. 且令

$$Q^* \equiv \sum_{k=-1}^6 Q_{5-k}^k, \quad (30)$$

则

$$DQ^* = 0. \quad (31)$$

这里我们曾利用(28), (24)式及 $dQ_6^{-1} = 0$, $\Delta C^6(U, R) = 0$. 后者成立是由于 $\{U_{i=0, \dots, 6}\}$ 为 S^6 上覆盖, 其共同交与 S^0 同胚.

三、 Q 系列的明显表达式与推广的陈-Simons 形式(Q 系列)

Q 系列的具体形式一般很复杂, 可以用郭汉英等人引入的推广的陈-Simons 形式(Q

系列)来表达^[10,11]. 故我们首先简短介绍 Q 系列及其特性.

令 $P(F^n)$ 为 F 的 n 阶对称不变多项式, 即第 n 陈类, 为记号方便, 可将 (7) 式中陈类记为

$$Q_{2n}^0(A) \equiv P(F^n). \quad (32)$$

而 (9) 式的陈-Simons 推广为

$$Q_{2n-1}^1(A_0, A_1) = n \int_0^1 dt P((A_1 - A_0), F_t^{n-1}), \quad (33)$$

有性质

$$dQ_{2n-1}^1(A_0, A_1) = Q_{2n}^0(A_1) - Q_{2n}^0(A_0) = \Delta^0 Q_{2n}^0(A_0, A_1). \quad (34)$$

进一步分析三个相关的陈-Simons 的交替和, 易证它是闭形式, 由于联络空间平庸, 故可将它表为

$$\begin{aligned} \Delta^1 Q_{2n-1}^1(A_0, A_1, A_2) &\equiv Q_{2n-1}^1(A_1, A_2) - Q_{2n-1}^1(A_0, A_2) + Q_{2n-1}^1(A_0, A_1) \\ &= -dQ_{2n-2}^2(A_0, A_1, A_2). \end{aligned} \quad (35)$$

这里

$$Q_{2n-2}^2(A_0, A_1, A_2) = -n(n-1) \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 P(A_1 - A_0, A_2 - A_0, F_{t_1 t_2}^{n-2}), \quad (36)$$

其中 $F_{t_1 t_2} = dA_{t_1 t_2} + A_{t_1 t_2}^2$,

$$A_{t_1 t_2} = A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0).$$

一般可引入推广的陈-Simons 形式^[10]

$$\begin{aligned} &Q_{2n-k}^k(A_0, A_1, \dots, A_k) \\ &= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{n!}{(n-k)!} \int_{\Delta_k} dt_1 \cdots dt_k P(A_1 - A_0, \dots, A_k - A_0, F_{t_1 \dots t_k}^{n-k}) \\ &\quad (k \geq 1), \end{aligned} \quad (37)$$

其中积分区域 Δ_k 为在 k 维 t 空间中的 k 维单形 $\left(\sum_{j=1}^k t_j \leq 1, t_j \geq 0\right)$. 而

$$\begin{aligned} F_{t_1 \dots t_k} &= dA_{t_1 \dots t_k} + A_{t_1 \dots t_k}^2, \\ A_{t_1 \dots t_k} &= A_0 + \sum_{j=1}^k t_j (A_j - A_0). \end{aligned}$$

可证

$$\begin{aligned} dQ_{2n-k}^k(A_0, A_1, \dots, A_k) &= (-1)^{k-1} \Delta^{k-1} Q_{2n-k+1}^k(A_0, A_1, \dots, A_k) \\ &\equiv (-1)^{k-1} \sum_{j=0}^k (-1)^j Q_{2n-k+1}^k(A_0, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_k). \end{aligned} \quad (38)$$

由 (37) 式易证推广的陈-Simons 形式还具有如下性质: 其所有宗量作相同规范变换下不变,

$$Q_{2n-k}^k(A_0^g, A_1^g, \dots, A_k^g) = Q_{2n-k}^k(A_0, A_1, \dots, A_k); \quad (39)$$

对其宗量的置换变换完全反对称,

$$\varepsilon_{i_0 \dots i_k} Q_{2n-k}^k(A_{i_0}, \dots, A_{i_k}) = Q_{2n-k}^k(A_0, \dots, A_k). \quad (40)$$

且易验证

$$\Delta^n Q_n^n = 0, \quad (41)$$

于是令

$$Q^* = \sum_{k=0}^n Q_{2n-k}^k, \quad (42)$$

且如(28)式引入

$$D = \Delta + (-1)^k d, \quad (43)$$

则得

$$DQ^* = 0. \quad (44)$$

这样引入的推广的陈-Simons 形式(Q 系列),具有明显表达式(37)形式,且具有简单性质((38)–(41)式),运算方便,例如一般的陈-Simons

$$Q_{2n-1}^0(A) = Q_{2n-1}^1(0, A). \quad (45)$$

而 Zumino 引入的 $\alpha_{2n-2}^{[1,12]}$ 可用 Q 形式表为

$$\alpha_{2n-2} = Q_{2n-2}^2(0, A, v), \quad (46)$$

于是各种有效作用量及各种抵消项,都可利用 Q 系列来表达与运算. 上节中引入的 Q 系列可以分为两部分^[11]:

$$Q_{2n-k-1}^k(A_0, A_1, \dots, A_k) = Q_{2n-k-1}^{k+1}(0, A, v_1, \dots, v_k) + R_{2n-k-1}^k(0, v_1, \dots, v_k), \quad (47)$$

其中

$$v_1 = g_1 d g_1^{-1}, v_2 = (g_1 g_2) d (g_1 g_2)^{-1}, \dots, \quad (48)$$

即可在 Q 系列中分出含 A 的 Q 系列后, 剩余不含 A 的部分称为 R 系列. Q 系列与 R 系列均为规范轨道空间中泛函, 而 Q 系列为规范联络空间中泛函, 故上式中 Q 系列多一宗量, 在对上式作上同调 Δ 运算时, 对 Q 系列应用简并 Δ 算子作用^[11]:

$$\Delta^{k-1} Q_{2n-k}^{k-1}(A_0, A_1, \dots, A_k) = \Delta^{k-1} Q_{2n-k}^k(0, A, v_1, \dots, v_k) + \Delta^{k-1} R_{2n-k}^{k-1}(0, v_1, \dots, v_k), \quad (49)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta^{k-1} Q_{2n-k}^k(0, A, v_1, \dots, v_k) \\ \equiv \Delta^k Q_{2n-k}^k(0, A, v_1, \dots, v_k) + Q_{2n-k}^k(0, v_1, \dots, v_k). \end{aligned} \quad (50)$$

利用(38)及(24)式可证

$$\begin{aligned} Q_{2n-k}^k(0, v_1, \dots, v_k) + \Delta^{k-1} R_{2n-k}^{k-1}(0, v_1, \dots, v_k) \\ = (-1)^k d R_{2n-k-1}^k(0, v_1, \dots, v_k). \end{aligned} \quad (51)$$

于是利用循环递推可得 R 系列. 上式中 Q 系列的宗量均为纯规范, 称为退化陈-Simons $\tilde{Q}$ 系列. $\tilde{Q}_{2n-1}^0$ 为闭形式, 在平庸区间可表为恰当形式. 由(47), (51)式知

$$R_{2n-1}^0 = 0, \quad (52)$$

$$d R_{2n-2}^1 = -\tilde{Q}_{2n-1}^1. \quad (53)$$

于是在平庸区间, 可利用同伦算子求出 R_{2n-2}^1 . 注意到 $\tilde{Q}_{2n-1}^1 \sim \text{Tr}(g^{-1} d g)^{2n-1}$, 故 R_{2n-2}^1 相当于 Witten 项密度, 再逐次利用 $\Delta^{k-1} R_{2n-k}^{k-1} + \tilde{Q}_{2n-k}^k$ 为闭形式, 在平庸区间可利用同伦算子得到 R_{2n-k-1}^k . 令

$$R^* = \sum_{k=1}^{2n-1} R_{2n-k-1}^k, \quad \tilde{Q}^* = \sum_{k=1}^n \tilde{Q}_{2n-k}^k,$$

利用 Čech-de Rham 上同调算子 $D = \Delta + (-1)^k d$ 可证

$$D R^* = -\tilde{Q}^*, \quad (54)$$

即 R^* 为上链, 而 $\tilde{Q}^*$ 为上边缘.

四、结论 规范群上同调的上闭链系列(α^k 系列)

Q 系列是规范群上链密度, 将它对相应维数底流形积分, 得规范群上链 α 系列

$$\alpha^k(A; g_1, \dots, g_k) = 2\pi \int_M Q_{2n-k-1}^k(A_0, A_1, \dots, A_k), \quad (55)$$

它是规范势 A 及 K 个规范群元的泛函. 利用底流形区间 Nerve 与联络空间 Simplex 的联系, 用 Q 系列的差映射(20)式, 可自然地引入作用在泛函 α^k 上的上同调算子 Δ

$$\begin{aligned} \Delta \alpha^k(A; g_1, \dots, g_{k+1}) &= \alpha^k(A; g_1, g_2, \dots, g_{k+1}) - \alpha^k(A; g_1 g_2, g_3, \dots, g_{k+1}) + \dots \\ &+ (-1)^j \alpha^k(A; g_1, g_2, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_{k+1}) + \dots \\ &+ (-1)^{k+1} \alpha^k(A; g_1, g_2, \dots, g_k). \end{aligned} \quad (56)$$

(15), (19), (27) 式为上式的简单特例. 易证由上式所定义的运算满足 $\Delta^2 = 0$, 故可利用上同调语言, 如 α^k 满足 $\Delta \alpha^k = 0, (\text{mod } 2\pi)$, 则 α^k 称为 k -上闭链, 如 α^k 本身可表为 $\Delta \alpha^{k-1}$, 则 α^k 称为 k -上边缘链. 上边缘链必为上闭链, 称为平庸的上闭链.

由第二节的计算表明, 当(55)式中被积流形为紧致流形(与 S^{2n-k-1} 同胚)时,

$$\alpha^k(A; g_1, \dots, g_k) = 2\pi \int_{S^{2n-k-1}} Q_{2n-k-1}^k(A_0, A_1, \dots, A_k), \quad (57)$$

$$\Delta \alpha^k(A; g_1, \dots, g_{k+1}) = 2\pi \int_{S^{2n-k-1}} \Delta Q_{2n-k-1}^k(A_0, A_1, \dots, A_{k+1}) = 2\pi Z, \quad (58)$$

这时, α^k 为 k -上闭链. 上式将各阶上闭链标志的拓扑障碍与指数 Z 相联系, 当 $Z \neq 0$ 时, 为非平庸 k -上闭链. 由上节分析知道 α^k 的具体形式一般很复杂, 它在恒等元附近无穷小邻域, 即其无穷小形式, 相当于规范代数上同调闭链^[11]. 导致规范群生成元(流)的各阶反常. 仍以 $n=3$ 为例, $4(=2n-2)$ 维流形上规范群 1-上闭链所代表泛函即 W-Z 作用量, 当 $v \rightarrow 0$ 时其主要项

$$\alpha_1(A; e + v) = \frac{-i}{24\pi^2} \int_{S^4} \text{Tr } v d \left(A d A + \frac{1}{2} A^3 \right), \quad (59)$$

给出流的 4 维散度的非阿贝耳反常, 它的存在与李群 G 的 π_4 非平庸有关. 类似, 在恒等元无穷小邻域 2-上闭链的主要项

$$\alpha_2(A; e + v, e + v) = \frac{-i}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}(A(dv)^2), \quad (60)$$

给出 3 维规范流的等时对易关系中反常 Schwinger 项. 完全类似, 当我们进一步分区, 可导致 3-上闭链, 它在恒等元无穷小邻域的主要项

$$\alpha_3(A; e + v, e + v, e + v) = \frac{-i}{24\pi^2} \int_{S^2} \text{Tr}(v(dv)^2), \quad (61)$$

给出 2 维规范流的 Jacobi 等式的反常项. 由本文分析可看出, 它们都有共同的整体拓扑根源, 这点与平移群上同调^[10]不同, 后者群流形即底流形, 而各阶上同调拓扑障碍另外引入(各维量子化单极), 一般不能与 Atiyah-Singer 指数定理相关. 对平移群上同调, 我们将另文详细分析.

感谢 R. Jackiw 与 B. Zumino 教授寄来他们的手稿。作者之一(侯伯元)感谢郭汉英教授提醒注意 Čech 上同调。

参 考 文 献

- [1] R. Jackiw, 文集 "Relativity, Groups and Topology II" Les Houches 1983, B. S. De Witt and R. Stora 主编 North Holland, (1984); B. Zumino, 同上文集.
- [2] 段一士、葛墨林、侯伯宇, 西北大学学报, (1975), 38; 物理学报, 25(1976), 514; *Scientia Sinica*, 21, (1978), 446; 侯伯宇, 物理学报, 26(1977), 83.
- [3] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.*, 37B (1971), 95; E. Witten, *Nucl. Phys.*, B223 (1983), 422.
- [4] Chou K. C. (周光召), Guo H. Y. (郭汉英), Wu Ke (吴可) and Song X. C. (宋行长), *Phys. Lett.*, 134B (1984), 67.
- [5] R. Stora, LAPP-TH-94, Cargese Lectures, (1983); L. Borona and P. Cotta-Ramusino, *Comm. Math. Phys.*, 87 (1983), 589; L. Alvarez-Gume and P. Ginsparg, 哈佛预印本, HUTP-83/AO81.
- [6] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 81 (1984), 2597.
- [7] L. D. Faddeev, *Phys. Lett.*, 145B (1984), 81; L. D. Faddeev, S. L. Shatashvili, *Theor. Math. Phys.*, 60 (1984), 206.
- [8] R. Jackiw, MIT 预印本, CTP 1209.
- [9] Hou B. Y. (侯伯宇) and Hou B. Y. (侯伯元), *Chinese Phys. Lett.*, 2 (1985), 49.
- [10] 郭汉英、吴可、王世坤, 北京预印本, AS-ITP-84-035.
- [11] 郭汉英、侯伯宇、王世坤、吴可, AS-ITP-84-041; NWU-IMP-84-4; AS-ITP-84-039; NWU-IMP-84-5; 宋行长, BNL 预印本.
- [12] B. Zumino, Santa Barbara 预印本 NSF-ITP-84-150.
- [13] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Physics Report*, 66 (1980), 213.
- [14] 侯伯宇等, 西安预印本, NWU-IMP-84-9; NWU-IMP-85-1; D. G. Boulware, S. Deser and B. Zumino, Santa Barbara CA93106.

THE TOPOLOGICAL MEANING OF ANOMALIES AND THE ČECH-DE RHAM COHOMOLOGY FOR GAUGE GROUP

WANG PEI

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu)

HOU BO-YUAN

(Department of Physics, Neimonggu University, Huhahaote)

HOU BO-YU

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian)

ABSTRACT

In this paper we analyze the topological obstruction in gauge group cohomology. By means of Čech-de Rham double complex, we have used the region subdivision method to go over each order obstructions of operation d^{-1} , and each order cocycle is connected with the index Z , so the global topological meaning of cocycle for gauge group has been clarified.