

FTIR-Q 开关谐振腔理论

张 镇 西 吕 宝 岭

(西北大学物理系)

1985年4月9日收到; 1985年7月24日收到修改稿

提 要

本文探讨了 FTIR-Q 开关谐振腔的基本理论. 由于该腔用多光学元件组成, 于是可用等效法, 而不用普通的方法求解. 我们利用矩阵光学和谐振腔衍射积分方程同时并用的方法, 求出了理论解, 获得该腔的非涅耳数、衍射损耗、谐振频率和间隔等值, 并与平行平面腔的结果进行了比较. 同时分析了球面腔的光学矩阵.

FTIR-Q 开关的基本结构如图 1 所示. 当外来信号加在换能器上推动棱镜时, 使空气间隙发生周期性改变. 由于抑制棱镜的移动破坏了全反射, 激光通过开关时发生部分透射和反射. 当 d 趋近于零时 ($d < 0.1 \lambda$), 腔内透射损耗很大, 不能形成振荡, 从而进行粒子数反转积累; 达到饱和时, 在压电换能器的作用下, d 猛然增大, 透射率下降, 反射率上升; 当 d 再次趋近于零时, 透射率增大, 将腔内的激光能量全部倒空, 产生一激光巨脉冲, 从而完成一次调 Q 过程^[1,2].

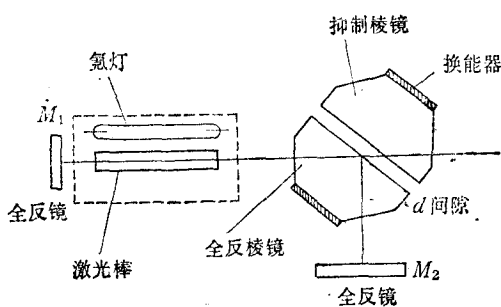


图 1

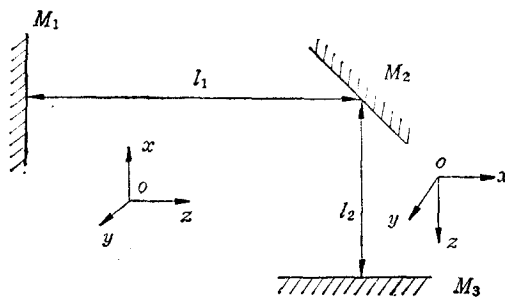


图 2

理 论 推 导

由于激光振荡是在 d 很大 ($d \gg \lambda$) 的情况下形成的, 此时透射率趋于零, 而反射率接近 1, 所以可将该腔简化成图 2 所示的谐振腔. 本文所用的光线坐标和角度的正负同文献 [3].

先讨论 M_1, M_2 为平面矩形反射镜的情况. x 方向反射矩阵 R 和传输矩阵 T , 以及谐振腔变换矩阵 D 如下表示:

$$R_1 = R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{21} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{32} = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{23} = \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这里 T^{ij} 表示由 i 传输到 j ; $-l_2, -l_1$ 表示光沿负 z 轴方向传播; l_1, l_2 表示沿正 z 轴方向传播。在反射镜 M_1 处的变换矩阵 D 表示为

$$D = R_1 T^{12} R_2 T^{23} R_3 T^{32} R_2 T^{21}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(l_1 + l_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则由 M_1 到 M_3 的传输矩阵 T 的表达式为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_1^{-1} D$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} D = D = \begin{pmatrix} 1 & 2(l_1 + l_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

关于 y 方向的光学矩阵, 由于 x, y 方向的独立性, 反射、传输和变换矩阵都与 x 方向的矩阵相同, 故 $T' = T, D = D', R = R'$.

若令 $T = \begin{pmatrix} A & B \\ \varphi & C \end{pmatrix}, T' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ \varphi' & C' \end{pmatrix}$, 并且可分离变量, 引用与之相联系的自再现方程^[3-10]

$$bU(x, y) = \frac{ik \exp(-i2kL_0)}{2\pi\sqrt{BB'}} \iint_{S'} U(x', y') \exp \left\{ -\frac{ik}{2B} (G_x x^2 + G_x' x'^2 - 2xx') \right.$$

$$\left. - \frac{ik}{2B} (G_y y^2 + G_y' y'^2 - 2yy') \right\} dx' dy'.$$

这方程是谐振腔某一反射面上的模所满足的方程, 它与 M_1, M_2 的形状有关. 其中 b 为常数, $U(x, y)$ 为模所满足的场分布函数, 参数 $G_x = C - 2Bc_N, G_x' = A - 2Bc_0, G_y = C' - 2B'e_N, G_y' = A' - 2B'e_0$ ^[3], $c_0, e_0; c_N, e_N$ 是 M_1 和 M_3 的表面方程中的系数. 积分方程中 L_0 的表达式为: $L_0 = \sum_i^n n_i L_i$ ^[3]. 对于无源腔, $L_0 = l_1 + l_2$; 对于有源腔, 若

激活介质的折射率为 n , 长度为 L , 则 $L_0 = (l_1 + l_2) + (n - 1)L$. 现在取 M_1 和 M_3 皆为 $2a \times 2b$ 的矩形平面反射镜, 那么 M_1, M_3 的表面方程为: $S_0 = S_3 = \text{常量}$, 由此得出 $G_x = G_x' = G, G_y = G_y' = G', e_N = c_N = d_N = e_0 = c_0 = d_0 = 0$, 积分方程化简为

$$bU(x, y) = \frac{ik \exp(-i2kL_0)}{2\pi\sqrt{BB'}} \iint_{S'} U(x', y') \exp \left\{ -\frac{ik}{2B} (Cx^2 + Ax'^2 - 2xx') \right.$$

$$\left. - \frac{ik}{2B'} (A'y^2 + C'y'^2 - 2yy') \right\} dx' dy'.$$

在 x, y 两方向上, 因为 $T = T', D = D'$, 且 $T = \begin{pmatrix} 1 & 2(l_1 + l_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T = D = \begin{pmatrix} A & B \\ \varphi & C \end{pmatrix},$$

所以 $A = A' = C = C' = 1$, $B = B' = 2(l_1 + l_2)$, $L_0 = l_1 + l_2$ (无源腔), 故

$$bU(x, y) = \frac{ik \exp[-2ik(l_1 + l_2)]}{4\pi|l_2 - l_1|} \iint_{S'} U(x'y') \times \exp\left\{-\frac{ik}{2B}[(x - x')^2 + (y - y')^2]\right\} dx' dy'.$$

为求此方程的本征值和本征函数, 令 $b = b_m \cdot b_n$, $U(x, y) = U_m(x) \cdot U_n(y)$, 则方程的本征解如下^[3]:

$$U_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left[\frac{m\pi x}{2a}\left(1 + \frac{i-1}{\sqrt{\pi C}}\right)\right] & m = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left[\frac{m\pi x}{2a}\left(1 + \frac{i-1}{\sqrt{\pi C}}\right)\right] & m = 2, 4, 6, \dots; \end{cases}$$

$$U_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \cos\left[\frac{n\pi x}{2b}\left(1 + \frac{i-1}{\sqrt{\pi D}}\right)\right] & n = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \sin\left[\frac{n\pi x}{2b}\left(1 + \frac{i-1}{\sqrt{\pi D}}\right)\right] & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$$

本征值为

$$b_{mn} = \exp\left(\frac{i\alpha_m^2}{2C} + \frac{i\beta_n^2}{2D}\right) \cdot \exp[-ik2(l_1 + l_2)], \quad (1)$$

其中 $\alpha_m = \frac{m\pi}{2}\left(1 + \frac{i-1}{\sqrt{\pi C}}\right)$, $\beta_n = \frac{n\pi}{2}\left(1 + \frac{i-1}{\sqrt{\pi D}}\right)$. 该腔的非涅耳数 N_x, N_y 为^[9]

$$N_x = \frac{C}{2\pi}, \quad N_y = \frac{D}{2\pi},$$

也就是 $N_x = \frac{2\pi}{2\pi} \cdot \frac{a^2}{\lambda B} = \frac{a^2}{\lambda B} = \frac{a^2}{2\lambda(l_1 + l_2)}$, $N_y = \frac{2\pi}{2\pi} \cdot \frac{b^2}{\lambda B'} = \frac{b^2}{\lambda B'} = \frac{b^2}{2\lambda(l_1 + l_2)}$.

矩形平面腔的衍射损耗等于

$$L_{mn} = 1 - \exp\left(-\frac{2\alpha_1\alpha_2}{C} - \frac{2\beta_1\beta_2}{D}\right). \quad (2)$$

这里 $\alpha = \alpha_i + i\alpha_2$; $\beta = \beta_i + i\beta_2$.

对于非涅耳数很大的腔, 即 C, D 值很大的腔,

$$L_{mn} \approx \left(\frac{2}{\sqrt{\pi C^3}}\right)\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi D^3}}\right)\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2.$$

附加的相位移动

$$\Delta_{mn} = \arg(b_{mn}) = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} + \frac{\beta_2^2 - \beta_1^2}{2D} + 2k(l_1 + l_2).$$

该谐振腔的谐振频率

$$\nu_{mnq} = \frac{qv}{2(l_1 + l_2)} - \frac{v}{4\pi C(l_1 + l_2)}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 - \frac{v}{4\pi D(l_1 + l_2)}\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2. \quad (3)$$

v 为光速. 由于本征值存在腔长引起的相位移因子, 故谐振频率有很大改变, 其频率间隔也同样增大.

现讨论 M_1, M_3 为球面镜的情况. 由于 M_2 的位置使光束偏离一直角, 故腔内的光束是非傍轴光线. M_2 的反射矩阵 $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 若 M_1, M_3 的曲率半径分别为 r_1, r_3 , 腔长为 l_1, l_2 , 则该腔的变换矩阵 D 为

$$D = R_1 T^{12} R_2 T^{23} R_3 T^{32} R_2 T^{21} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r_1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{r_3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ \varphi & C \end{pmatrix},$$

其中

$$A = 1 + \frac{2(l_1 + l_2)}{r_3}, B = \frac{2(l_1 + l_2)^2}{r_3} + 2(l_1 + l_2), \\ \varphi = -\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_3} \left(1 - \frac{2(l_1 + l_2)}{r_1} \right), \\ C = 2 \left[1 - \frac{2(l_1 + l_2)}{r_1} \right] \left[1 + \frac{(l_1 + l_2)}{r_3} \right] - 1.$$

现判断该腔的稳定性, 若属于稳定腔, 则

$$|\text{Sp}(D)| \leq 2.$$

当 $r_1 = r_3 = R$ 时,

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2(l_1 + l_2)}{R} & \frac{2(l_1 + l_2)^2}{R} + 2(l_1 + l_2) \\ -\frac{4(l_1 + l_2)}{R^2} & 1 - \frac{2(l_1 + l_2)}{R} - \frac{4(l_1 + l_2)^2}{R} \end{pmatrix}.$$

令 $l_1 + l_2 = L$, 则 $\text{Sp}(D) = 2 - \frac{4L^2}{R^2}$, 稳定腔要求 $|\text{Sp}(D)| \leq 2$, 故得 $-R \leq L \leq R$,

这就要求稳定对称球面腔的长度不得大于球面镜的曲率半径.

当 $r_1 = -r_3 = R$ 时, $\text{Sp}(D) = 2 + \frac{4(l_1 + l_2)}{r_3} - \frac{4(l_1 + l_2)}{r_1} - \frac{4(l_1 + l_2)^2}{r_1 r_3}$, 稳定腔要求, $-2 \leq \text{Sp}(D) \leq 2$, 解得 $l_1 + l_2 \leq 2R$. 当取 $r_1 = -r_3 = R$, $l_1 + l_2 = 2R$ 时, 该腔为一等效共心腔; 取 $r_1 = r_3 = R$, $l_1 + l_2 = R$ 时为一等效共心腔.

我们可以写出球面镜的表面方程为

$$S_i(x_i, y_i) = (x_i^2 + y_i^2)/2r_i \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$

对此方程, 利用变换矩阵 D 求得传输矩阵 T , 以及 G_x, G_y 等参数的表达式和 c_i, e_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) 的值, 引用上述求解方法, 将几何光学的矩阵表示式和积分方程相联系, 就可求解, 从而得出腔的一些参数.

讨 论

1. 本征值 b_{mn}

对一般矩形平行平面谐振腔 $b_{mn} = \exp\left(\frac{i\alpha_m^2}{2C} + \frac{i\beta_n^2}{2D}\right)$, 但在 FTIR-Q 开关谐振腔中 $b_{mn} = \exp\left(\frac{i\alpha_m^2}{2C} + \frac{i\beta_n^2}{2D}\right) \cdot \exp[-2ik(l_1 + l_2)]$, 多出一相位因子 $\exp[-2ik(l_1 + l_2)]$, 其原因是 FTIR-Q 开关谐振腔中作为 Q 开关的全反棱镜所致. 它表示无元件腔和有元件腔的本质差别所在, 使得谐振腔的谐振频率, 相位移动都有所变动. 相位移动改变 $2k(l_1 + l_2)$, 其中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波矢量, $l_1 + l_2$ 为谐振腔总长度.

由 (1) 式可得

$$b_{mn} = \exp\left(-\frac{\alpha_1\alpha_2}{C} - \frac{\beta_1\beta_2}{D}\right) \cdot \exp\left[\frac{i(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{2C} + \frac{i(\beta_1^2 - \beta_2^2)}{2D}\right] \cdot \exp[-2ki(l_1 + l_2)],$$

其中 $\exp\left(-\frac{\alpha_1\alpha_2}{C} - \frac{\beta_1\beta_2}{D}\right)$ 是振幅衰减因子, 可见与无元件腔相同, 所以有元件腔与无元件腔的振幅衰减因子相等.

2. 谐振频率 ν_{mnq}

由 (3) 式可得

$$\nu_{mnq} = \frac{qv}{2(l_1 + l_2)} - \frac{\nu}{4\pi(l_1 + l_2)} \left[\frac{1}{C} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{D} \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \right].$$

由横模的附加相位移动 Δ_{mn} 所引起的谐振频率的改变值 $\Delta\nu_{mn}$ 为

$$\Delta\nu_{mn} = \frac{\nu}{4\pi(l_1 + l_2)} \left[\frac{1}{C} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{D} \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \right].$$

纵模频率间隔 $\Delta\nu_q$ 为

$$\Delta\nu_q = \frac{\nu}{2(l_1 + l_2)}.$$

可见它与一般平行平面腔的纵模间隔一致.

3. 衍射损耗

$$L_{mn} = 1 - |b_{mn}|^2 = 1 - \exp\left[-\frac{2\alpha_1\alpha_2}{C} - \frac{2\beta_1\beta_2}{D}\right]. \quad (2)$$

其中 $C = 2\pi(a^2/\lambda B)$, $D = 2\pi(b^2/\lambda B')$, $B = B' = 2L_0 = 2(l_1 + l_2)$. 由于这一谐振腔由相互成一定夹角的两部分组成, 故腔长较一般腔长, 菲涅耳数 C, D 值均减小, 所以 L_{mn} 增大. 在 C, D 值很大的情况下, 即 $C, D \gg 1$ 时,

$$L_{mn} \approx \left(\frac{2}{\sqrt{\pi C^3}}\right) \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi D^3}}\right) \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2.$$

参 考 文 献

- [1] 张镇西、张智勇、程向明, 光学学报, **5**(1984), 450.
- [2] 张镇西, 物理, **10**(1982), 596.
- [3] 方洪烈, 光学谐振腔理论, 科学出版社, (1981).
- [4] P. Baues, *Opto-Electron.*, **1**(1969), 37.
- [5] S. A. Collins, *J. Opt. Soc. Am.*, **60**(1970), 1168.
- [6] J. A. Arnaud, *Bell. Syst. Tech. J.*, **49**(1970), 2311.
- [7] J. A. Arnaud, *J. Opt. Soc. Am.*, **61**(1971), 751.
- [8] J. A. Arnaud, *Progress in Optics*, Vol. 11, New York, (1973).
- [9] H. 韦伯, 激光谐振腔, 华中工学院出版社, (1983).
- [10] 周炳琨等编, 激光原理, 国防工业出版社, (1980).

THE THEORY OF FTIR-Q SWITCH RESONATOR

ZHANG ZHEN-XI LÜ BAO-LING

(Department of Physics, Northwest University, Xi'an)

ABSTRACT

In this paper, the fundamental theory of FTIR-Q switch resonator is developed. The resonator is composed of many optical elements, it cannot be solved by the conventional method. Combining matrix optics with integral equations of diffractions of optical resonator, we obtain a theoretical solution, which gives out a lot of quantities, such as Fresnel number, diffraction losses, resonance frequency and its interval, etc., that can be compared with the result of parallel plane resonator.