

实现 Mellin 变换的一种新方法

郑 师 海 杨 国 桢

(中国科学院物理研究所)

林 清 景 李 国 桢

(中国科学院一〇九厂)

1985 年 5 月 6 日收到

提 要

本文讨论了用光学系统实现 Mellin 变换的一种新方法,叙述了用计算机进行全息透镜的设计和用计算机产生二元式全息图的制造原理。实验上实现了由一组 16 个抽样点组成的一维 Mellin 变换,并可直接推广到二维情况。

一、引 言

Mellin 变换的定义为

$$M(ju, jv) = \iint_0^{\infty} f(x, y) x^{ju-1} y^{jv-1} dx dy. \quad (1)$$

Mellin 变换的一个重要特点是它的标度不变性。假设 $M_1(ju, jv)$ 是 $f_1(x, y)$ 的 Mellin 变换, $M_2(ju, jv)$ 是 $f_2(x, y) = f_1(ax, ay)$ 的 Mellin 变换,由(1)式看出

$$M_2(ju, jv) = a^{-ju-jv} M_1(ju, jv). \quad (2)$$

即标度不同的函数的 Mellin 变换,除了增加一个与标度有关的相位因子外,它们的数值相同。Mellin 变换的这一性质,已经借助于计算机广泛用于时间可变信号的网络分析、标度可变信号的相关检测和图象处理。如何用光学方法实现 Mellin 变换,成为国内外学者极为关注的研究课题。Goodman^[1] 和 MarksII^[2] 等人已分别进行了利用一个二维空间平移不变的相干光处理系统实现 Mellin 变换的研究。但是,在这种方法中光的利用效率非常低,实现二维变换是困难的。Casasent 利用光学几何变换方法^[3]和计算全息方法,进行了用坐标的对数变换加光学傅里叶变换以实现二维 Mellin 变换的研究^[4]。由于坐标的对数变换是在几何光学近似下得到的,因而所得结果有较大偏差^[4]。本文采用“利用单个全息透镜实现光学变换”的理论^[5],进行了用计算机产生的全息图实现 Mellin 变换的研究,并用光学系统实现了一维 Mellin 变换。

本文中,我们仅给出了一维的理论设计和实验结果。从(1)式看出,为了实现二维 Mellin 变换,只要将两张一维全息图的数据垂直相乘,然后用得到的数据重新刻制一张计算机产生的二维全息图,就可以实现。

二、单个全息透镜实现 Mellin 变换的理论

图 1 是用单个全息透镜实现任何给定线性变换的光学系统, 这个系统实现的线性变换为

$$\tilde{G} = G_0(l_1)HG_0(l_0), \quad (3)$$

式中 H 为全息图, $G_0(l)$ 表示光波在距离为 l 的自由传播中实现的变换, 它的传递函数由菲涅耳-基尔霍夫公式给出, 在旁轴近似和离散抽样情况下, $G_0(l)$ 的一维矩阵表示式为

$$G_0(m, n) = B$$

$$\times \exp \left[\frac{ik}{2l} \left(\frac{mx_m}{N} - \frac{nx'_m}{N'} \right)^2 \right] \quad (m = 1, 2, \dots, N, n = 1, 2, \dots, N'),$$

式中 B 为归一化常数; l 为传播距离; $k = 2\pi/\lambda$, λ 为所使用的光波波长; x_m , N 和 x'_m , N' 分别为输入平面和输出平面的孔径大小和抽样点数, 在满足

$$N = N_1 \cdot N_2,$$

$$Nl_1\lambda/(x_mx_{m2}) = 1$$

和

$$N/l_0\lambda/(x_{m1}x_m) = 1 \quad (4)$$

的条件下, 图 1 所示的光学系统全息图的计算公式为

$$H_{kk} = \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ij}[G_{ij}(l_1)]_{il} \cdot [G_0^*(l_0)]_{li}. \quad (5)$$

详见文献 [5], (4) 式中的 N_1 , N , N_2 和 x_{m1} , x_m , x_{m2} 分别为图 1 光学系统中的输入平面 P_1 、全息平面 P_2 和输出平面 P_3 的抽样点数和孔径大小, G_{ij} 为给定变换的积分核在离散抽样下的一维矩阵. 在本文中, G_{ij} 为一维 Mellin 变换积分核的离散抽样矩阵,

$$G_{ij} = \left(\frac{x_{m1}i}{N_1} \right)^{j \left(\frac{x_{m2}j}{N_2} \right)^{-1}}. \quad (6)$$

我们取如下参数:

$$x_{m1} = x_m = x_{m2} = 5.12_{m,m}, \quad N_1 = N_2 = 16.$$

利用 (3)–(6) 式, 通过计算机计算, 可以得到全息图 H_k 各抽样点的振幅和相位值,

$$H_k = A(k) \exp[j\phi(k)] \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$A(k)$ 和 $\phi(k)$ 分别表示全息图在抽样点 k 的振幅和相位值.

三、计算机产生全息图的设计和制造

我们采用计算机产生二元式全息图的方案制造全息透镜^[6]. 在 x 方向利用类似于参考波同物体函数干涉的方法记录相位信息, 在 y 方向采用改变条纹高度来储存振幅信息. 条纹的高度通过计算

$$y(l, x) = l dy \pm dy \cdot A(x)/2 \quad (7)$$

得到。式中 $dy = x_m/N2$, $l = 1, 2, \dots, N1$, 以及 $A(x)$ 为全息图物波的振幅分布函数。 x 方向条纹的中心位置通过解下面的方程:

$$(x/T) + \phi(x)/2\pi = n \quad (8)$$

得到。 $1/T$ 为全息图的载频, $\phi(x)$ 为物波的相位分布函数。为了利用 (8) 式求解条纹的位置, 必须解决两个问题。

首先必须选择合适的载频 $1/T$ 。在我们前面给定的设计条件下, 全息图平面到输出平面之间的距离为 161.8 mm。在不考虑光瞳衍射情况下, 零级和正负一级的空间宽度分别都是 5.12 mm, 要使零级和正负一级分开, 载频 $1/T$ 必须大于 50/mm, 我们取 100/mm。

其次必须知道全息图相位分布的解析表达式。然而利用 (5) 式, 用计算机得到的全息图是离散的各抽样点的相位值, 即相位变化仅为 $(-\pi \rightarrow \pi)$ 。为此, 我们采用文献 [6] 的方法将各抽样点的相位值从 2π 的余数中, 进行了数字恢复。

我们知道, 对于任意一点的相位, 叠加 $2m\pi$ 相位 (m 为整数), 不会影响实验结果。因此可以利用叠加 $2m\pi$ 的方法进行数字恢复。设某点的实际相位值为 $\Phi(k\Delta x)$, Δx 为抽样步长, 将其除以 2π

$$\Phi(k\Delta x)/2\pi = m + \phi(k\Delta x)/2\pi,$$

式中 m, k 为整数, $\phi(k\Delta x)$ 为 $\Phi(k\Delta x)$ 被 2π 整除后的余数。计算机计算结果仅保留了余数 $\phi(k\Delta x)$ 。由于所设计的全息图是满足抽样定理的, 所以 $\phi(k\Delta x)$ 由一个抽样点 k 变化到下一个抽样点 $k+1$, 一般小于 π , 只有那些 $\Phi(k\Delta x)/2\pi$ 的整数部分, 从 m 变化到 $m+1$ 的两点之间才大于 π 。为此, 我们作

$$\Phi(k\Delta x) = \phi(k\Delta x) + 2m\pi \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

当 $\phi(k\Delta x) - \phi[(k+1)\Delta x] > \pi$ 时, 取 $m = m+1$;

当 $\phi(k\Delta x) - \phi[(k+1)\Delta x] < -\pi$ 时, 取 $m = m-1$ 。

将上面计算的 $\Phi(k\Delta x)$ 值作为全息图的相位, 然后利用这些离散点相位值, 以及拉格朗日三点插值公式

$$\phi'(k\Delta x) = \sum_{k=i}^{i+2} \left(\prod_{\substack{j=i \\ j \neq k}}^{i+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) \Phi(k\Delta x),$$

$$x_i = (i-1)\Delta x, \quad x < x_{i+1}. \quad (9)$$

对于给定的每一 x 值, 求出 $\phi'(k\Delta x)$, 将 $\phi'(x)$ 代入 (8) 式中, 令

$$n - (x/T) - \phi'(k\Delta x)/2\pi < \varepsilon,$$

ε 为我们给定的计算精度, 此时的 x 值即为我们要求的条纹中心, 并通过此 x 值, 利用 (9) 式让 $\Phi(k\Delta x) = A(k\Delta x)$, 求出相应的

$A(x)$ 值。到此, 我们可以通过适当的装置进行全息图的制造了, 在 x 方向的条纹宽度, 我

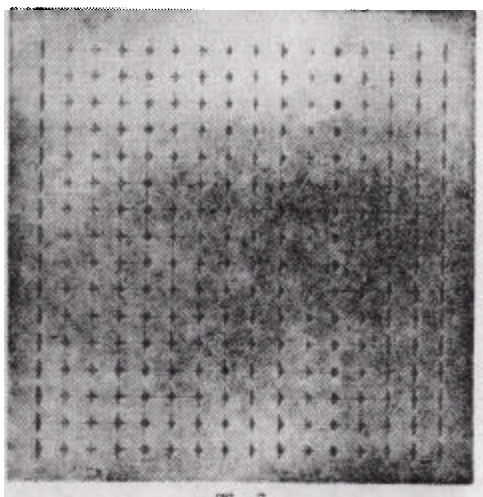


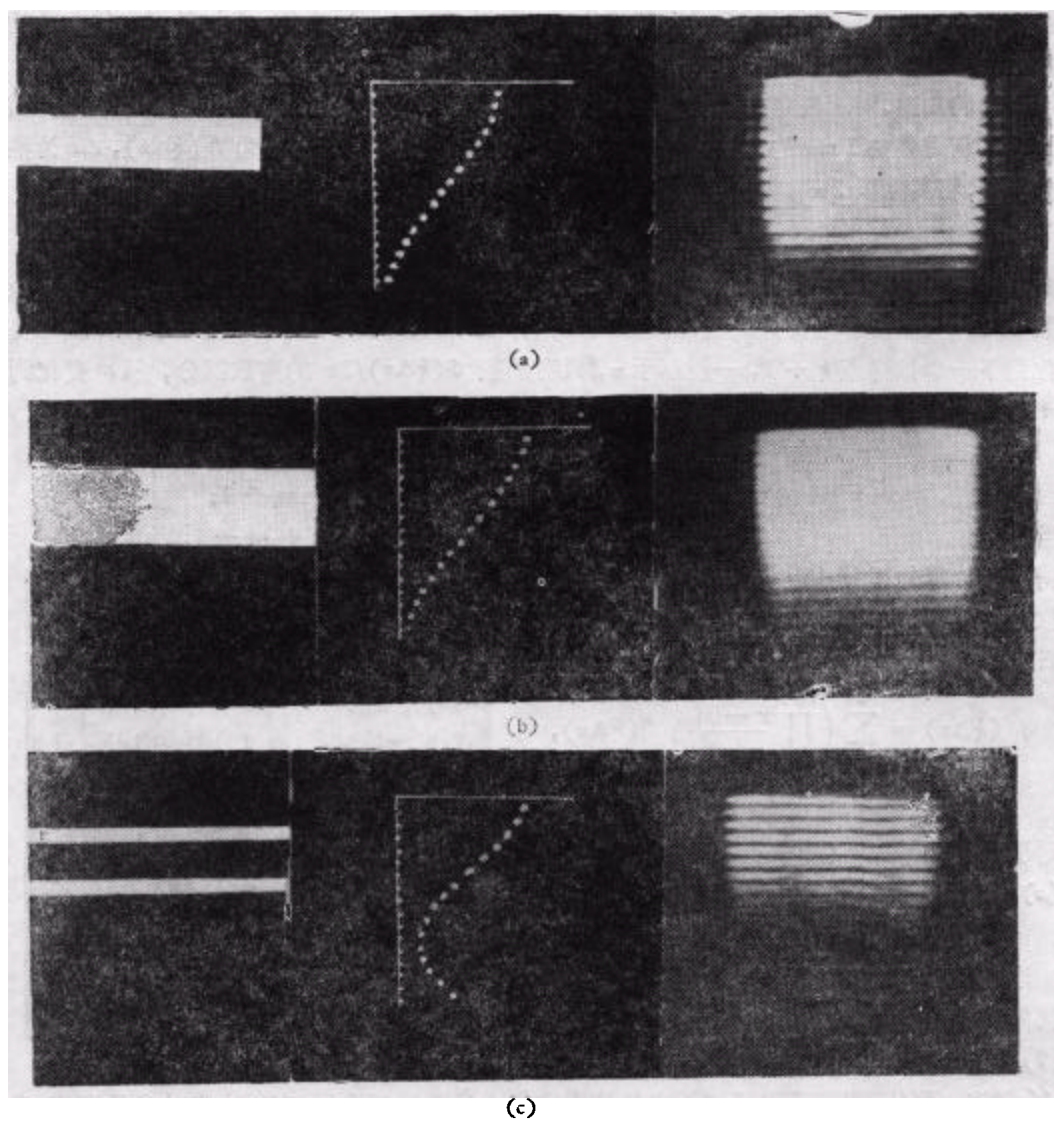
图 2

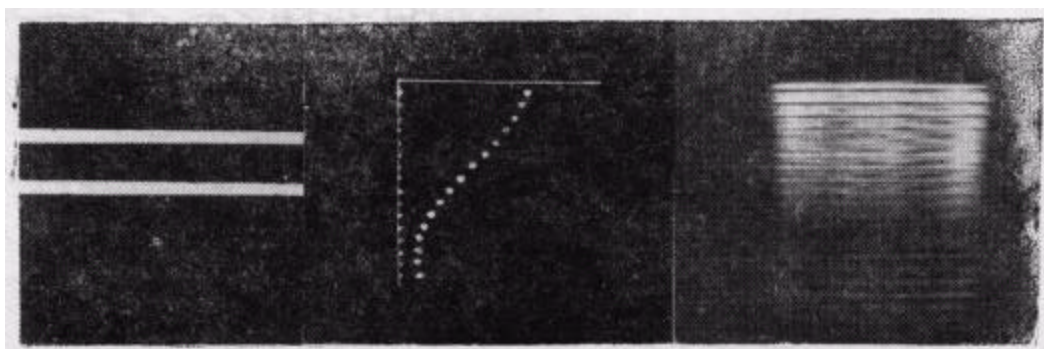
们取为 $T/2$ 。图 2 是全息图的放大照片。

四、实验结果

利用图 2 所示的全息图,将它放置到图 1 的光路中,用 He-Ne 激光器准直扩束照明输入平面,取 $l_0 = 2589 \text{ mm}$, $l_1 = 161.2 \text{ mm}$, 用不同的狭缝放到 P_1 平面做输入,得到了预期的 Mellin 变换结果。图 3 给出的是一组实验结果,其中左边的图是输入狭缝,右边图中的 16 条明暗不同的线,对应着预定的输出结果,中间的曲线是数字计算的 Mellin 变换结果,即

$$M(I) = \sum_{J=1}^{N_1} f(J) \left(\frac{Jx_{m1}}{N_1} \right)^{j \frac{x_{m2}l}{N_2} - 1}$$





(d)

图 3

$$(I = 1, 2, \dots, N_2),$$

式中符号定义同前, $f(J)$ 为输入函数 $f(x)$ 的抽样. 图 3 (a) 的狭缝宽度为 0.64 mm, 狭缝中心离坐标原点的距离为 0.64 mm. 图 3 (b) 的狭缝宽度为 0.96 mm, 狭缝中心离坐标原点的距离为 0.96 mm. 图 3 (c), (d) 是单缝宽度为 0.16 mm 的双缝, 两单缝之间的中心距离为 0.64 mm, 图 3 (c) 双缝中心距坐标原点距离为 0.8 mm, 图 3 (d) 中心距坐标原点为 0.96 mm.

五、讨 论

我们讨论了用单个振幅相位全息透镜所组成的光学系统和计算机产生的二元式全息图实现 Mellin 变换, 它将为实现光学一般变换寻找一条新的途径. 计算机全息图已发展到比较成熟的程度, 光的利用效率又比较高, 从而有可能使本方法走向实用. 本文仍属于原理性的实验, 由于对全息图的加工精度要求相当高, 制作二维全息透镜花费相当昂贵, 目前力不从心, 所以没有实现二维的全息透镜系统实验. 从实验结果上看, 振幅分布的高频部分有一定的误差, 这是由于加工的困难, 全息图振幅的动态范围不可能做得很大. 从图 2 看出, 有一部分区域全息图已被置零. 此外, 计算机产生的二元式全息图, 虽然避免了迂回相位误差和某些抽样孔径的重叠, 但由于在计算条纹中心位置时采用了插值, 因而或多或少也会带来一定误差, 本文设计仅考虑了使输出孔径内的振幅相位分布满足给定变换, 孔径外的分布则未予考虑. 从实验结果看, 高频部分孔径外还存在一定噪声, 低频部分孔径外的噪声已用孔径光栏作了限制.

参 考 文 献

- [1] J. W. Goodman, *Appl. Opt.*, **16**(10) (1977), 2609.
- [2] R. J. Marks II *et al.*, *Appl. Opt.*, **18**(6) (1979), 754.
- [3] L. J. Cutrona, Recent Developments in Coherent Optical Technology, in *Optical and Electro-Optical Information Processing*, Eds. J. T. Tippett *et al.*, MIT Press, Cambridge, (1965), ch. 6.
- [4] D. Casasent, *Proc. IEEE.*, **65**(1) (1977), 77.
- [5] 杨国桢, 物理学报, **30**(1981), 1340.
- [6] Wai-Hon Lee, *Appl. Opt.*, **18**(1) (1979), 3661.

A NEW METHOD FOR PERFORMING OPTICAL MELLIN TRANSFORM

ZHENG SHI-HAI YANG GUO-ZHEN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

LIN QING-JING LI GUO-ZHEN

(109 Factory, Academia Sinica)

Abstract

This paper describes a new method for performing Mellin transform. The principle of design of holographic lens and the method for making binary computer-generated holograms are given. A 1-dimensional Mellin transform with sixteen sampling spots is performed by the experiment. The method can be directly extended to the 2-dimensional case.