

广义 Noether 恒等式及其应用

李 子 平

(北京工业大学应用物理系)

1985 年 7 月 5 日收到

提 要

本文导出非不变性作用量系统的广义 Noether 恒等式并给出它的应用。

—

Noether 第二定理指出,当系统的作用量在含任意函数的无穷小变换下不变,这时就存在含 Euler-Lagrange 表达式的微分恒等式(即 Noether 恒等式)。这里讨论更一般的情况,即假使作用量在上述变换下发生变更,我们导出此情形下的广义 Noether 恒等式并给出它的应用。指出非不变性拉氏量系统,在一定条件下,系统也具有 Dirac 约束。

二

设系统的拉氏量为 $\mathcal{L}(x, \phi, \phi_\mu^a)$, 其中 $x = (r, it)$, $\phi_\mu^a = \partial_\mu \phi^a$ ($a = 1, 2, \dots, n$), 系统的作用量 $I = \int_D \mathcal{L} dQ$. 在无穷小变换

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow x'_\mu = x_\mu + R_{i\mu} \varepsilon^i, \\ \phi^a &\rightarrow \phi^{a'} = \phi^a + S_i^a \varepsilon^i \end{aligned} \quad (1)$$

下,设拉氏量的变更为

$$\delta \mathcal{L} = U^{ai} P_{ai} \varepsilon^i, \quad (2)$$

其中 $\varepsilon^i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 为任意函数, U^{ai} 为 x, ϕ^a, ϕ_μ^a 的函数, $R_{i\mu}, S_i^a, P_{ai}$ 为微分算子

$$\begin{aligned} R_{i\mu} &= a_{i\mu} + a_{i\mu\nu} \partial_\nu + \dots + a_{i\mu\nu\dots\rho} \partial_\nu \dots \partial_\rho, \\ S_i^a &= b_i^a + b_{i\nu}^a \partial_\nu + \dots + b_{i\nu\dots\rho}^a \partial_\nu \dots \partial_\rho, \\ P_{ai} &= c_{a,i} + c_{a,i\nu} \partial_\nu + \dots + c_{a,i\nu\dots\rho}^a \partial_\nu \dots \partial_\rho. \end{aligned} \quad (3)$$

假设系数函数 a, b, c 及其他函数足够光滑,在变换 (1) 式下,作用量的改变为^[1]

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_D E_a (S_i^a - \phi_\mu^a R_{i\mu}) \varepsilon^i dQ + \int_\Sigma d\sigma_\mu \left[\left(\mathcal{L} \delta_{\mu\nu} - \phi_\nu^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu^a} \right) R_{i\nu} \varepsilon^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu^a} S_i^a \varepsilon^i \right] = \int_D U^{ai} P_{ai} \varepsilon^i dQ, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 E_a 为 Euler-Lagrange 表达式, Σ 为区域 D 的边界, 由于 $\varepsilon^i(x)$ 的任意性, 可选 $\varepsilon^i(x)$ 使 (4) 式中的表面项为零, 于是就有

$$\int_D [E_a(S_i^a - \phi_{i\mu}^a R_{i\mu}) - U_{a,i} P_{a,i}] \varepsilon^i dQ = 0. \quad (5)$$

对 (5) 式左端多次施行分部积分, 仍利用 $\varepsilon^i(x)$ 的任意性, 使边界项为零, 然后根据变分学的基本引理, 得

$$\tilde{S}_i^a(E_a) - \tilde{R}_{i\mu}(E_a \phi_{i\mu}^a) - \tilde{P}_{a,i}(U_{a,i}) = 0, \quad (6)$$

其中 $\tilde{S}_i^a$, $\tilde{R}_{i\mu}$, $\tilde{P}_{a,i}$ 分别为 S_i^a , $R_{i\mu}$, $P_{a,i}$ 的伴随算子, 定义为

$$\int_D g S_i^a f dQ = \int_D f \tilde{S}_i^a g dQ + [\cdot]_\Sigma, \quad (7)$$

其中 f, g 为区域 D 上足够光滑的函数, $[\cdot]_\Sigma$ 为表面项. 类似的表达式对 $R_{i\mu}$, $\tilde{R}_{i\mu}$ 以及 $P_{a,i}$, $\tilde{P}_{a,i}$ 也成立. (6) 式就是在无限连续群下变更性问题中的广义 Noether 恒等式(或者称广义 Bianchi 恒等式).

三

重质量杨-Mills 场的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A_\mu^a, \quad (8)$$

其中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (9)$$

而 f_{bc}^a 为规范群的结构常数. 在规范变换

$$A_\mu^a = A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b \varepsilon^c + \partial_\mu \varepsilon^a \quad (10)$$

下, $\mathcal{L}$ 是非规范不变的. 此时广义 Noether 恒等式 (6) 导致

$$D_\mu(D_\nu F_{\mu\nu}^a + m^2 A_\mu^a) - m^2 \partial_\mu A_\mu^a = 0, \quad (11)$$

其中 D_μ 代表协变微商, 对任意带群指标的函数 ϕ^a , 有

$$D_\nu \phi^a = \partial_\nu \phi^a - g f_{\beta\gamma}^a A_\nu^\beta \phi^\gamma. \quad (12)$$

由 (11) 式可得

$$D_\mu D_\nu F_{\mu\nu}^a = 0. \quad (13)$$

重质量杨-Mills 场在规范变换下的广义 Noether 恒等式与无质量杨-Mills 场在规范变换下的 Noether 恒等式相同. 对于重质量矢量场 ($g=0$) 在规范变换下的广义 Noether 恒等式(或广义 Bianchi 恒等式)为 $\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu}^a = 0$, 它与电磁场在规范变换下的 Noether 恒等式(或 Bianchi 恒等式)相同.

沿着系统运动的“轨线”,

$$D_\nu F_{\mu\nu}^a + m^2 A_\mu^a = 0. \quad (14)$$

此时, (11) 式化为

$$\partial_\mu(\partial_\nu F_{\mu\nu}^a + f_{bc}^a A_\nu^b F_{\mu\nu}^c + m^2 A_\mu^a) - m^2 \partial_\mu A_\mu^a = 0. \quad (15)$$

由于 $\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu}^a = 0$, 上式给出

$$\partial_\mu f_{bc}^a = 0, \quad (16)$$

其中

$$j_{\mu}^a = f_{bc}^a A_{\nu}^b F_{\mu\nu}^c. \quad (17)$$

因此,沿着系统运动的“轨线”,广义 Noether 恒等式给出杨-Mills 守恒流,而不是文献[2]中的 Lorentz 条件。

四

规范不变的拉氏量是奇异的,此系统具有 Dirac 约束。这里我们进一步指出,如果拉氏量可分解为两部分之和,其中一部分具有变换不变性,而另一部分是不含微商的项,那么这样的拉氏量也是奇异的,此系统也具有 Dirac 约束。

设拉氏量 $\mathcal{L}$ 可分解为 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_0$ 在变换下不变,而 $\mathcal{L}_1$ 不含 ϕ^a 的微商,在内部变换

$$\begin{aligned} x_{\mu} &\rightarrow x'_{\mu} = x_{\mu}, \\ \phi^a &\rightarrow \phi'^a = a_i^a \varepsilon^i + b_{\mu i}^a \partial_{\mu} \varepsilon^i \end{aligned} \quad (18)$$

下, $\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_0 + \delta \mathcal{L}_1$, 此时广义 Noether 恒等式(6)化为

$$a_i^a E_a^i - \partial_{\mu} (b_{\mu i}^a E_a^i) = 0, \quad (19)$$

其中 E_a^i 为 $\mathcal{L}_0$ 的 Euler-Lagrange 表达式。由(19)式可知 $\mathcal{L}_0$ 的 Hessian 矩阵是奇异的^[3],又 $\mathcal{L}_1$ 不含 ϕ^a 的微商,所以 $\mathcal{L}$ 的 Hessian 矩阵也是奇异的, $\mathcal{L}$ 为奇异拉氏量,系统具有 Dirac 约束。

例如,重质量杨-Mills 场的拉氏量(8)式在规范变换(10)式下,就具有上述性质,重质量杨-Mills 场的拉氏量是奇异拉氏量,具有 Dirac 约束。

参 考 文 献

- [1] 李子平,物理学报, **30** (1981), 1599; **33**(1984), 814.
- [2] Л. Г. Юсифьян, Н. П. Коноплева, ДАН, **198** (1971), 1036.
- [3] K. Sundermeyer, Constrained Dynamics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Printed in Germany, (1982), p. 27.

THE GENERALIZED NOETHER'S IDENTITIES AND ITS APPLICATIONS

LI ZI-PING

(Department of applied Physics, Beijing Polytechnic University)

ABSTRACT

We have generalized second Noether's theorem to the case in which the action integral is not invariant under the infinitesimal transformation involving arbitrary functions, and we give some application for the massive Yang-Mills fields.