

一维单峰映象中高周期序列的 普适常数与普适函数

王光瑞

陈式刚

(应用物理与计算数学研究所)

(中国科学院物理研究所)

1985年1月7日收到

提 要

本文讨论与计算了描述高周期序列临界行为的普适函数 $h(x)$, $D(x)$ 及普适常数 δ , κ ; 给出了 R^{*n} , $(RL)^{*n}$, $(RL^2)^{*n}$, $(RLR^2)^{*n}$, $(RL^2R)^{*n}$ 和 $(RL^3)^{*n}$ 序列的 δ , κ , $h(x)$, $D(x)$ 的计算结果.

一、引 言

一维单峰映象对研究耗散系统具有典型的意义. 耗散使得状态空间中的体积在演化过程中不断地收缩, 会在某些截面中形成接近一维的截迹. 这使一维映象的许多性质具有普适性, 而与系统的具体性质无关. 在一维映象中, 周期运动构成混沌运动的骨架, 因此仔细研究周期运动是有重要意义的. 自从 M-S-S^[1] 和 Derrida^[2] 关于单峰映象 U 序列与内部相似性等结构普适性的研究, 以及 Feigenbaum^[3,4] 对其度量普适性的重整化群分析以来, 虽然人们对一维映象已作过大量数值实验和解析探讨^[5,6], 但这里仍有不少有待阐明的问题. 其中一个有意思的问题是能否与怎样把 Feigenbaum 的重整化群分析推广到内部相似性给出的高周期序列. 我们在文献[6]中已研究过这个问题, 并给出了单峰映象中高周期序列的标度函数 $g(x)$ 和标度常数 α . 本文将在这个基础上研究标度函数 $h(x)$, $D(x)$ 与标度常数 δ , κ .

在含参数 μ 的单峰映象

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) \quad (1)$$

中, 具有典型意义的是二次映象:

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2. \quad (2)$$

参数 μ 在 $[0, 2]$ 区间上取值, 它把线段 $(-1, 1)$ 映象到自身. 映象(1)式具有可数无穷多种倍周期序列 $P * Q^{*n}$, 其中 P , Q 都是 U 序列中的基本字. Q^{*n} 序列的标度性质对任意基本字 P 的 $P * Q^{*n}$ 序列具有普遍性. 对 $Q = R$ 的情形, Feigenbaum 等人进行过详细的研究; 我们将把这个研究推广到 Q 为高周期的情况. 对于 $Q = R, RL, RL^2, RLR^2, RL^2R, RL^3$ (它们对应 $2^n, 3^n, 4^n$ 和三种不同的 5^n 周期) 等情形作了数值计算, 并通过这些研究澄清一些有普遍意义的概念. 这些序列在 $n \rightarrow \infty$ 时(在原点 $x = 0$

附近)的标度性质由 Feigenbaum 的重整化群方程:

$$g(x) = \alpha g(K) \left(\frac{x}{\alpha} \right) \quad (3)$$

及条件 $g(0) = 1, g'(0) = 0$

描述.

当 $K = 2, 3, 4, 5$ 时分别对应 $2^n, 3^n, 4^n, 5^n$ 四种不同情况. 通过下面讨论, 我们将看到, 每个基本字 Q 各有自己的标度常数 α , 收敛速率 δ , 噪声强度常数 κ 和普适函数 $g(x), h(x), D(x)$. 在文献[6]中, 曾利用超稳定周期轨道计算过 δ . 本文将由求解本征值方程得到它们. 这个方法对 K 的值没有限制. 但由于 $g(x)$ 的计算精度随 K 增大而迅速降低, 所以本文所有的数值计算只做到 $K = 5$.

二、重整化群方程的迭代解法

在文献[6]中我们曾把 Feigenbaum 建议的求解重整化群方程的迭代方法付诸实施, 并取得了很好的结果. 这个方法的基本思想是用迭代和对坐标逐次重新标度的办法来逼近标度函数 $g(x)$. 它的逻辑思想简单, 在原则上适用于求解任意高周期序列所对应的标度函数 $g(x)$. 求解过程如下: 采用 Lagrange 插值公式

$$g(x) = \sum_{i=0}^N g(x_i) \frac{\prod_{j \neq i}^N (x^2 - x_j^2)}{\prod_{j \neq i}^N (x_i^2 - x_j^2)}. \quad (4)$$

实际计算中, 我们取: $N = 4, x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$; 并且 $g(x_0) = 1$. 在下一节中, 我们将把 Feigenbaum 关于线性迭代算子的谱理论^[3], 推广到任意 K 的情况, 根据这个理论, 迭代 $g_{k+1} = \alpha_k g_k^{(K)} \left(\frac{x}{\alpha_k} \right)$ 将会消除拓扑共轭变换带来的自由度, 使 g_k 趋向标度函数. 另一方面, 由于线性迭代算子存在 $\delta > 1$ 的本征值, 如果控制参数不刚好取在临界点 μ_∞ 上, 迭代的结果将以 $g_k(x) = g(x) - \delta^k h(x)$ 的方式偏离标度函数 $g(x)$. 对于 $f(0) = 1$ 的单峰映象, 其控制参数可选为 x 的标度系数 λ , 并以选定的接近临界点的初值 λ_0 , 用 $f(\lambda_0 x)$ 为迭代的初始函数:

$$g_0(x) = f(\lambda_0 x) = 1 - \mu \lambda_0^2 x^2.$$

如果选择 μ 为已知的临界点的近似值, 则可以让 $\lambda_0 = 1$. 为了使迭代能逼近临界点与标度函数 $g(x)$, 我们在每次迭代后对 x 重新标度,

$$g_k(x) \rightarrow g_k(\lambda x), \quad g_{k+1}(x) \rightarrow g_{k+1}(\lambda x). \quad (5)$$

选 λ_k 使在 $x = 1$ 处,

$$g_k(\lambda_k) = g_{k+1}(\lambda_k) = \alpha_k(\lambda_k) g_k^{(K)} \left(\lambda_k, \frac{1}{\alpha_k(\lambda_k)} \right) \quad (6)$$

成立. 这里

$$g_k^{(K)}(\lambda, x) = g_k(\underbrace{\lambda g_k(\lambda g_k(\lambda g_k(\lambda x) \cdots))}_{K \uparrow g_k}), \quad (7)$$

$$\alpha_k(\lambda) = \frac{1}{g_k^{(K)}(\lambda, 0)}. \quad (8)$$

确定 λ_k 之后, 让

$$g_{k+1}(x) = \alpha_k(\lambda_k) g_k^{(K)}\left(\lambda_k, \frac{x}{\alpha_k(\lambda_k)}\right), \quad (9)$$

它给出 $k+1$ 次迭代的结果. 具体计算时 $g_k^{(n)}(x)$ 用 (4) 式实现, 迭代只给出 4 个点的 $g_{k+1}(x_j)$ 值, 由 (4) 式它定义了 $g_{k+1}(x)$. 当 $g_k(x)$ 收敛到不动点以后, 还可以取 $\lambda_{\infty} = \prod_k \lambda_k$ 作为 λ_{∞} 的较好的近似值, 这样, 由 $\mu \lambda_{\infty}^2$ 可得 μ_{∞} 值. (多次迭代后, $\mu \left(\prod_k \lambda_k\right)^2$ 不严格逼近 μ_{∞}). 对于具有同一 K 值的不同基本字的序列 (例如 $K=5$ 的 RLR^2, RL^2R, RL^3 三个序列), 迭代所得的不动点 $g(x)$ 完全由初值 μ 的选择所决定.

计算表明, 迭代可以很快收敛到相邻两次结果的相对误差小于 10^{-M} , 这里 M 是计算机允许的位数, 本文计算中 $M=13$. 作为误差估计, 当插值公式的点数较少时, 可以认为主要的误差是忽略 $x^{2(N+1)}$ 项引起的, 根据前 N 项系数的变化情况可以估计 $x^{2(N+1)}$ 系数的量级. 当 $N=4$ 时, 这样估计得到的误差为: $\delta g(x) = e \cdot x^{10}$ (在 $RL, RL^2, RLR^2, RL^2R, RL^3$ 情况下, e 分别为 $10^{-6}, 10^{-10}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-5}$). 进而可以根据 (8) 式估计 α 的误差: $\delta \alpha = \alpha^2 \delta g^{(K)}(0)$. 有了不动点 $g(x)$ 的 $g(0), g(0.25), g(0.5), g(0.75), g(1)$ 值之后, 通过 4 式让 $g(x) = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8$, 可求得 A, B, C, D 之值. $RL, RL^2, RLR^2, RL^2R, RL^3$ 情况的 A, B, C, D 及 α 之值列于表 1 中. (为了后面需要, 把 Feigenbaum 对 R 情况下的计算结果也列于表 1 中).

由 $g_k(x) = g(x) - \delta^k h(x)$ 可见, 如果在一逼近 $g(x)$ 的 $g_k(x)$ 基础上, 利用 $g_{k+1} = \alpha g_k^{(K)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ 继续迭代 (不对坐标重新标度, α 保持不变), 可以给出 $g_k(x)$, 这样由 $h(x) = \Delta g_k$ 可得 $h(x)$ 的 Lagrange 插值公式的系数 $h(0), h(0.25), h(0.5), h(0.75), h(1)$. 利用 $\Delta g_{k+1}/\Delta g_k = \delta$ 可得到 δ . 由于这种方法 $g(x)$ 的误差较大, 致使 $h(x)$ 及 δ 值只对 3^n 的结果较好; 而对 RL^3 情况, 几乎不能得到可信的结果.

三、线性算符 $\mathcal{L}$ 的本征函数与本征值

重整化群方程 (3) 可通过非线性算子 L 写为:

$$g(x) = Lg(x) = \alpha g^{(K)}\left(\frac{x}{\alpha}\right). \quad (10)$$

在临界点的邻域, 许多性质可以用 L 的线性化算符 $\mathcal{L}$ 表示出来. 算符 L 对任意函数 $f(x)$ 的作用为

$$Lf(x) = \alpha f^{(K)}\left(\frac{x}{\alpha}\right). \quad (11)$$

如 $f(x)$ 接近不动点 $g(x)$, 可令

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad (12)$$

其中 $g(x)$ 满足 (10) 式, $h(x)$ 是一级小量. 把 (12) 式代入 (11) 式, 只取一级量且利用

(10)式可得

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \alpha f^{(K)}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\ &= g(x) + \alpha \left[h\left(g^{(K-1)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) + g'\left(g^{(K-1)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h\left(g^{(K-2)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + g'\left(g^{(K-1)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) g'\left(g^{(K-2)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdots g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right] \\ &= g(x) + \mathcal{L}h(x), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h(x) &= \alpha \left[h\left(g^{(K-1)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) + g'\left(g^{(K-1)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h\left(g^{(K-2)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + g'\left(g^{(K-1)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) g'\left(g^{(K-2)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdots g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

对于线性算子 $\mathcal{L}$, 可求解其本征值问题,

$$\mathcal{L}h(x) = \delta h(x), \quad (14)$$

δ 为本征值.

Feigenbaum 找到了 $\mathcal{L}$ 的本征值 $\delta > 1$ 的本征函数 $h(x)$ 及本征值 $\delta = \alpha^{1-\rho} \leq 1$ 所对应的本征函数

$$\phi_\rho = g^\rho(x) - x^\rho g'(x),$$

并推测它们构成完备系.

不难检验, 对于任意高周期序列, 除了 $\delta > 1$ 的本征函数外, $\phi_\rho = g^\rho(x) - x^\rho g'(x)$ 仍是(14)式的解. 对任何实数 ρ , ϕ_ρ 都是本征值方程(14)的相应于本征值 $\alpha^{1-\rho}$ 的本征函数. 如果把所讨论的函数限于整函数构成的空间, 则 ρ 是大于或等于零的整数. 如果只讨论极值位于 $x = 0$ 的函数空间, 则 $\rho \geq 1$. 如果进一步把讨论限制在对称函数空间中, 则只出现 $\rho \geq 1$ 的奇数的本征函数. 在这样的空间中 h 与 ϕ_ρ 构成完备系. 这是因为通过用 $\phi_\rho (\rho = 1, 2, \cdots)$ 逐次消去 $h(x)$ 的最低次项可得 x 最低次幂逐次升高的函数序列, 由这样的函数序列可渐近地组成 $x^n (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$.

下面讨论如何解方程(14), $h(x)$ 的本征方程(14)是一个线性方程, 类似于 $g(x)$ 的处理, 令

$$h(x) = \sum_{i=0}^N h_i x^{2i} \quad h_0 = 1, \quad (15)$$

其中 h_i 是待求常数. 把(15)式代入(14)式归纳整理后得

$$\sum_{i=0}^N \left[E_i(x_j) - \frac{\delta}{\alpha} x_j^{2i} \right] h_i = \frac{\delta}{\alpha} - E_0(x_j) \quad j = 0, 1, 2, \cdots, N, \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} E_i(x_j) &= \left(g^{(K-1)}\left(\frac{x_j}{\alpha}\right) \right)^{2i} + g'\left(g^{(K-1)}\left(\frac{x_j}{\alpha}\right)\right) \left(g^{(K-2)}\left(\frac{x_j}{\alpha}\right) \right)^{2i} + \cdots \\ &\quad + g'\left(g^{(K-1)}\left(\frac{x_j}{\alpha}\right)\right) g'\left(g^{(K-2)}\left(\frac{x_j}{\alpha}\right)\right) \cdots g'\left(g^{(2)}\left(\frac{x_j}{\alpha}\right)\right) \left(g\left(\frac{x_j}{\alpha}\right) \right)^{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + g' \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) g' \left(g^{(K-2)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) \cdots g' \left(g^{(2)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) \\
 & \times g' \left(g \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) \left(\frac{x_j}{\alpha} \right)^{2i}.
 \end{aligned} \quad (17)$$

我们选 $N = 4$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1$. 显然, (16) 式即为 4 个未知数 h_i 的线性代数方程组的本征值问题. (实为五个未知数的线性齐次方程的本征值问题, 但我们已选 $h_0 = 1$) δ 为待求本征值. 利用表 1 中给定的 $g(x)$, α , 可求解方程组 (16), 所得的 δ 与 h_i 也列于表 1. 作为比较, 我们还用 Feigenbaum 对 R^* 所得的 $g(x)$ 计算了相应的 δ , h_i . δ 值与文献 [4] 的结果很好地符合. 由表 1 可见, 我们所计算得到的 δ 与文献 [10] 中的结果一致; h_i 其数值随足标增大迅速降低, 这表明 $h(x) = \sum_i h_i x^{2^i}$ 展开的合理性.

四、描述噪声强度的普适函数与普适常数

实际情况中, 系统内部的热涨落, 系统外部的干扰, 数值计算中的舍入误差等等都表现为噪声, 它使高周期分叉中的周期点变为线段, 因而不能被观察到, 这样就根本地改变了 μ 轴上混沌区内混沌运动与周期运动的分布 [7-9].

在一维映象中噪声对迭代的影响可用方程

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu) + \xi_n \quad (18)$$

来描述. 其中 ξ_n 是高斯型随机变量.

仿照 $(R^*)^j (j \rightarrow \infty)$ [3, 4] 情况讨论, 假设噪声很小, 每次迭代后可以对它线性化, 把高次项略去. 如果在 $n \rightarrow \infty$ 时噪声行为具有标度性质, 则在 K^n 次迭代后, 在 $x = 0$ 的邻域 (18) 式收敛到

$$\alpha^n [g(\alpha^n x) + \xi \kappa^n D(\alpha^n x)], \quad (19)$$

其中 $D(x)$ 为描述噪声强度随 x 分布的函数, 它是与 $f(x)$ 的形式无关的普适函数; κ 是噪声强度的标度因子, 它又是一个普适常数.

根据标度性质 (19) 式将 $g(x) + \xi D(x)$ 对自身作 $K-1$ 次迭代之后, 它应与 $n=1$ 时的 (19) 式相等, 利用独立随机变量之和的强度是它们各自强度平方和它开方的性质, 最后得 $D(x)$ 所满足的本征值方程

$$\begin{aligned}
 \kappa D(x) = & \alpha \left\{ \left[g' \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) D \left(g^{(K-2)} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) \right]^2 \right. \\
 & + \left[g' \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) g' \left(g^{(K-2)} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) D \left(g^{(K-3)} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) \right]^2 \\
 & + \cdots + \left[g' \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) g' \left(g^{(K-2)} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) \cdots g' \left(g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) D \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right]^2 \\
 & \left. + \left[D \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

其中 κ 为本征值, $D(x)$ 为本征函数. 如果把 (20) 式的两边都平方, 可见它是 D^2 的线性

表 1

$2^n(R)$	$3^n(RL)$	$4^n(RL^2)$	$5^n(RLR^2)$	$5^n(RL^3R)$	$5^n(RL^4)$
$\alpha = -2.502907876$	$\alpha = -9.277341747$	$\alpha = -38.81910389$	$\alpha = -20.12838127$	$\alpha = 45.80480119$	$\alpha = -160.0230927$
$A = -1.527632997$	$A = -1.874308657$	$A = -1.97140411$	$A = -1.623915517$	$A = -1.872725665$	$A = -1.9931919210$
$B = 0.1048151943$	$B = 0.0938363652$	$B = 0.0299862827$	$B = -0.0117005348$	$B = 0.0106228366$	$B = 0.007808485$
$C = 0.0267056735$	$C = -0.0002519955$	$C = -0.0001354147$	$C = 0.0031525530$	$C = 0.0005024008$	$C = -0.0000539135$
$D = -0.0035274139$	$D = -0.0000509494$	$D = 0.0000004534$	$D = -0.0000498001$	$D = -0.0000048115$	$D = 0.0000239507$
$\delta = 4.669298979$	$\delta = 55.24702605$	$\delta = 981.5956162$	$\delta = 255.544493$	$\delta = 1287.088961$	$\delta = 16929.61292$
$h_1 = -0.3256518828$	$h_1 = -0.1284164925$	$h_1 = -0.0328676366$	$h_1 = -0.0033803257$	$h_1 = -0.0150700981$	$h_1 = -0.0079989011$
$h_2 = -0.0505527152$	$h_2 = 0.0014262762$	$h_2 = 0.0002458130$	$h_2 = -0.0055311410$	$h_2 = -0.0008196555$	$h_2 = 0.0000165552$
$h_3 = 0.0145594194$	$h_3 = 0.0001439215$	$h_3 = -0.0000002260$	$h_3 = 0.0001596654$	$h_3 = 0.0000176980$	$h_3 = -0.0000000037$
$h_4 = -0.0008811569$	$h_4 = -0.0000042461$	$h_4 = -0.0000000017$	$h_4 = 0.0000017293$	$h_4 = -0.000000147$	$h_4 = -0.0000000055$
$\kappa = 6.621266328$	$\kappa = 89.52207217$	$\kappa = 1558.735266$	$\kappa = 431.9114176$	$\kappa = 2182.637419$	$\kappa = 26457.68376$
$D_1 = -0.2187811701$	$D_1 = -0.1950537417$	$D_1 = -0.0605817877$	$D_1 = 0.0288003194$	$D_1 = -0.0222901851$	$D_1 = -0.015611867$
$D_2 = -0.0796649401$	$D_2 = 0.0101908178$	$D_2 = 0.0013202713$	$D_2 = -0.0111855086$	$D_2 = -0.0014948385$	$D_2 = 0.0000920265$
$D_3 = 0.0278754825$	$D_3 = 0.0016600490$	$D_3 = -0.0000123272$	$D_3 = 0.0000692985$	$D_3 = 0.0000499586$	$D_3 = -0.0000002478$
$D_4 = -0.0011004969$	$D_4 = -0.0000262675$	$D_4 = 0.0000000441$	$D_4 = 0.0000392021$	$D_4 = 0.0000000152$	$D_4 = -0.0000000103$

本征值方程. 可以检验, 对于 $D^2(x)$ 的本征值方程除文献[7]中讨论的对应最大本征值 κ 的本征函数 $D^2(x)$ 外, 还有相应于本征值 $\kappa^2 = \alpha^{2-\rho}$ 的本征函数 $\varphi_\rho = g^\rho(x) - x^\rho [g'(x)]^2$. 对 φ_ρ 可作与 ψ_ρ 同样的讨论, 不同的是对极值位于 0 的整函数空间中的函数, ρ 也可以为 0, 所以, κ 有两个大于 1 的本征值. 在对称函数空间中 ρ 只能取偶数值. 但由 $D^2(x) > 0$ 的要求, $\varphi_\rho(x)$ 在一般情况下不是(20)式的解, 因而没有物理意义. 求得的最大本征值 κ 所对应的 $D^2(x)$ 都满足 $D^2(x) > 0$ 的要求.

下面介绍如何解线性方程(20), 类似于对 $g(x)$ 的处理, 仍令

$$D^2(x) = \sum_{i=0}^4 D_i x^{2i}, \quad D_0 = 1, \quad (21)$$

其中 D_i 是待求常数. 把(21)式代入(20)式归纳整理后得

$$\sum_{i=1}^N \left[H_i(x_j) - \frac{\kappa^2}{\alpha^2} x_j^{2i} \right] D_i = \frac{\kappa^2}{\alpha^2} - H_0(x_j), \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} H_i(x_j) = & \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right)^{2i} + \left[g' \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) \right]^2 \left(g^{(K-2)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right)^{2i} + \dots \\ & + \left[g' \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) g' \left(g^{(K-2)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) \dots g' \left(g^{(2)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) \right]^2 \left(g \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right)^{2i} \\ & + \left[g' \left(g^{(K-1)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) g' \left(g^{(K-2)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) \dots g' \left(g^{(2)} \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) g' \left(g \left(\frac{x_j}{\alpha} \right) \right) \right]^2 \\ & \times \left(\frac{x_j}{\alpha} \right)^{2i}. \end{aligned} \quad (23)$$

仍与求 $g(x)$ 时类似, 我们仍取 $N=4$, $x=x_0=0$, $x=x_1=0.25$, $x=x_2=0.5$, $x=x_3=0.75$, $x=x_4=1$, 显然(22)式即为 4 个未知数 D_i 的线性代数方程组的本征值问题, κ 为待求本征值. 利用表 1 中给定的 $g(x)$, α , 求解方程组(22)可以有各种办法. 关于 3^n , 4^n , 5^n 情况下所计算得到的 κ , D_i 的结果亦列于表 1 中, 由表 1 可见, 在 2^n 情况下, 所得到的 κ 值与文献[7]中一致. 其他情况下的结果都是新的. 在各种情况下, 计算所得到的 D_i 数值随足标的增大迅速减小, 说明 $D^2(x)$ 的展开是可取的; $\kappa > \alpha$ 的本征值只有一个, 如表 1 中所给. ($\kappa \leq \alpha$ 的本征值为 α , 1 , α^{-1} , α^{-2} , 是明确的, 故表 1 中略去).

作者对郝柏林教授、曾婉真同志热心的讨论, 谨致谢忱.

参 考 文 献

- [1] N. Metzopolis, M. L. Sten, P. R. Stein, *J. Combinatorial Theory (A)*, **15**(1973), 25.
- [2] B. Derrida, A. Gerois, Y. Pomeau, *Ann. In st. Henri Poincaré*, **29A**(1978), 305.
- [3] M. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **19**(1978), 25.
- [4] M. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **21**(1979), 669.
- [5] 王友琴、陈式刚, 物理学报, **33**(1984), 341.
- [6] Zeng Wan-zhen (曾婉真), Hao Bai-jin (郝柏林), Wang Guang-rui (王光瑞), Chen Shi-gang(陈式刚), *Commun in Theory Phys.*, **3**(1984), 283.
- [7] J. Crutchfield, M. Nauenberg, J. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, **46**(1981), 933.
- [8] B. Shraiman, C. E. Wayne, P. C. Martin, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1981), 935.
- [9] 陈式刚, 自然杂志, **6**(1982), 661.
- [10] Shau-jin Chang, John Mccown, *Phys. Rev.*, **A30**(1984), 1149.

UNIVERSAL CONSTANTS AND UNIVERSAL FUNCTIONS OF PERIOD-N-TUPLING SEQUENCES IN ONE-DIMENSIONAL UNIMODAL MAPPINGS

WANG GUANG-RUI

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing)

CHEN SHI-GANG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the universal functions $h(x)$, $D(x)$, and the universal constants δ , κ , which describe the critical behavior of the period-n-tupling sequences, are discussed and Calculated. The numerical results of δ , κ , $h(x)$, $D(x)$ for R^{*n} , $(RL)^{*n}$, $(RL^2)^{*n}$, $(RLR^2)^{*n}$, $(RL^2R)^{*n}$ and $(RL^3)^{*n}$ are obtained.