

球形表面液氦薄膜涡线动力学

王 诚 泰

于 涿

(清华大学物理系)

(中国科学院理论物理研究所)

1985 年 2 月 23 日收到

提 要

本文中将液氦薄膜的涡线动力学理论推广到球形表面,并用来解释 Bishop 等人利用 Vycor 玻璃所作扭摆实验的结果.

一、引 言

当液氦膜的厚度是几个原子层(1 个原子层 $\approx 3.6 \text{ \AA}$)时,我们可把液氦膜近似地看作是一个二维体系.在温度不为零时,这种体系不可能具有长程序.但是, Kosterlitz 和 Thouless (以下简称 K-T)指出^[1],与液氦膜类似的,内部自由度数目为 2 的体系,在二维可能发生很弱的、与破坏长程序无关的相变,通常简称为 K-T 相变.这种相变是由拓扑性的元激发(涡线)引起的.单个的自由涡线能量随体系的尺寸对数发散,但正-负涡线束缚对的能量是有限的($E_p \propto \ln r/a$, r 是正-负涡线对之间的距离, a 是涡线核的半径).从自由能角度看,自由涡线只能存在于某一临界温度 T_c 以上,而在 T_c 以下只有束缚涡线对.因此, K-T 相变点就是束缚涡线对开始拆散,使系统由低温相的准长程序(关联函数幂次衰减)到高温相短程序的转变点.

K-T 相变有两个重要特征:一是在相变点上吉布斯函数及其各阶导数均连续,因而不能用热力学方法探测;二是从低温端逼近相变点时,超流面密度 ρ_s 有一个有限的跃变,这个跃变值与相变温度之比是一个普适常数,即^[2]

$$\frac{\rho_s(T_c)}{T_c} = \frac{2}{\pi} k_B \cdot \frac{m^2}{\hbar^2} \approx 3.49 \times 10^{-9} \text{ g/cm}^2 \cdot \text{K}, \quad (1)$$

式中 m 是氦 (^4He) 原子质量, k_B 是玻耳兹曼常数, $\hbar = h/2\pi$, h 是普朗克常数.

为了解释 Bishop 等人^[3]在 Mylar 聚脂膜上所做的著名扭摆实验, Ambegaokar, Halperin, Nelson 和 Siggia(简称 A-H-N-S)等人^[4]将 K-T 静态理论推广到动力学情形.他们将涡线在驱动速度场中的运动与电荷在交变外电场中的运动作形式类比,求出物理本征周期 P 的相对变化 $2\Delta P/P$ 和能量耗散 Q^{-1} (Q 是品质因素)分别为

$$\frac{2\Delta P}{P} = \frac{A}{M} \cdot \rho_s^0 \cdot \text{Re}[\varepsilon^{-1}(\omega)], \quad (2)$$

$$Q^{-1} = \frac{A}{M} \cdot \rho_s^0 \cdot \text{Im}[-\varepsilon^{-1}(\omega)], \quad (3)$$

式中 A 是液氦膜的面积, M 是扭摆质量, ρ_s^0 是未重整化的超流面密度, $\varepsilon(\omega)$ 是有效介电

常数. 理论计算与实验结果符合得很好^[3]. 应用涡线动力学理论还可以解释持续流衰减, 第三声吸收, 热导实验及扭摆实验的非线性效应等^[5].

以上的讨论都是针对平面液氮膜的. Bishop 等人还利用多孔的 Vycor 玻璃作了类似的扭摆实验, 其结果与聚脂膜情况很不相同. 在实验中没有测量到能量耗散, 本征周期 ΔP 随温度 T 的变化是连续的. 作者认为这些现象是 Vycor 玻璃三维性质导致的效应. 我们对此持不同的看法. 最近, Kotsubo 与 Williams 将 K-T 静态理论推广到球面情形, 用来解释装有压紧的 Al_2O_3 粉末容器中第三声实验结果. 他们也试图解释 Vycor 玻璃扭摆实验^[6], 但是结果并不理想.

本文将涡线动力学理论推广到球形表面, 并从理论上解释了 Vycor 玻璃扭摆实验^[6]的结果, 说明在 Vycor 玻璃上液氮层的超流相变仍是二维 K-T 相变, 它与 Mylar 膜液氮相变的差别是由 Vycor 玻璃中孔隙的尺寸效应引起的.

二、动力学方程

在平面内涡线的运动是由 Magnus 力与摩擦力的平衡决定的^[4]. 在超流速场 $\mathbf{V}_s$ 中, 由于涡线核上、下两侧合成流速不同, 产生了压强差, 导致作用于涡线的 Magnus 力, 该力的方向与涡线轴及 $\mathbf{V}_s$ 相垂直. 涡线相对于正常速度场 $\mathbf{V}_n$ 的运动导致拖曳力 (即摩擦力), 该力既有平行于 $\mathbf{V}_n$ 的分量, 也有垂直于 $\mathbf{V}_n$ 的分量. A-H-N-S 根据这两个力的平衡导出自由涡线的运动方程, 与束缚涡线对的朗之万方程, 及相对应的福克-普朗克方程. 我们认为, 这个推导的基本思想, 包括涡线对的动力学方程是适用于球形表面的. 但是球面上单个涡线是在 Magnus 力、拖曳力与重力沿球面切线方向分量的平衡下导出的运动方程, (重力垂直球面的分量与球面上支撑力相抵消), 并在此基础上导出涡线对的朗之万方程. 我们着重讨论温度在 T_c 附近与小于 T_c 时球面薄膜上的 ΔP 与 Q^{-1} , 在此温度范围, 涡线是成对出现的, 所以我们以涡线对的朗之万方程为出发点, 适当考虑球形表面的几何效应.

涡线对相对运动服从的朗之万方程为^[4]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{2D}{k_B T} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} + \boldsymbol{\eta}, \quad (4)$$

式中 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ 是正-负涡线对的距离矢量, D 是扩散系数, U 是涡线对的相互作用解及在外部速度场中的能量之和, 表达式在下面给出. $\boldsymbol{\eta}$ 是高斯型涨落力, 服从

$$\langle \eta^\alpha(t) \cdot \eta^\beta(t') \rangle = 4D\delta_{\alpha\beta} \cdot \delta(t - t'). \quad (5)$$

设 $\Gamma(\mathbf{r}', t)$ 代表单位面积涡线对距离为 $\mathbf{r}'$ 的数密度, 它随时间变化满足的福克-普朗克方程为^[4]

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{r}', t)}{\partial t} = \frac{2D}{k_B T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \cdot \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} \Gamma \right] + 2D \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mathbf{r}'^2}. \quad (6)$$

可以证明, 在半径为 R 的球面上, 设正涡线处于 $\theta = 0$ 处, 负涡线处于 $\mathbf{r}(R, \theta, \varphi)$ 处, 涡线对分布函数 $\Gamma(\mathbf{r}, t)$ 满足的方程与(6)式相同, 只需要将 $\mathbf{r}'$ 改成 $\mathbf{r}$ 即可. $\mathbf{r}'$ 到 $\mathbf{r}$ 坐标系的变换及上述结论的证明见附录.

前面已经提到,为表述方便常将涡线对的运动用等价的偶极子运动来代替.这两者的对应关系^[4]为

$$2q^2 = 2\pi\rho_s^0 \cdot \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2, \quad (7)$$

式中 q 是等效电荷的电量. 在球形表面上,流场沿球面切线方向,相应的“外电场”只有沿 θ 方向的分量,因而偶极子的总能量为

$$U(\mathbf{r}, t) = U_0(\theta) + \delta U(\theta, t) + 2E_c, \quad (8)$$

式中 E_c 是涡线核能量,涡线对相互作用能为^[7]

$$U_0(\theta) = q^2 \int_{2\theta_c}^{\theta} \frac{d\theta'}{\varepsilon(\theta') \tan \frac{1}{2}(\theta' - \theta_c)}, \quad (9)$$

$$\delta U(\theta) = -q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = qR\theta E \cdot e^{i\omega t}, \quad (10)$$

其中 $\theta_c = a/R$, $r' = R\theta$, $\varepsilon(\theta)$ 是介电常数,它表示距离小的偶极子对于所研究的偶极子的屏蔽效应. 与平面情形类似,未重整化超流面密度与重整化超流面密度 ρ_s 的关系为

$$\rho_s = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\rho_s^0}{\varepsilon(\theta)}. \quad (11)$$

在交变外场作用下,可引入一个与频率有关的动力学介电常数 $\varepsilon(\omega)$,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \varepsilon(\omega, \theta) \\ &= 1 + 4\pi q \int_{2\theta_c}^{\pi} d^2r \frac{R\theta}{2} \cdot \frac{\delta\Gamma}{\delta E}. \end{aligned} \quad (12)$$

我们只考虑到对外场的线性响应,可将分布函数 Γ 写为

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \Gamma_0(\theta) + \delta\Gamma(\theta, t), \quad (13)$$

其中 $\Gamma_0(\theta) = \frac{1}{a^4} \exp[-U_0(\theta)/k_B T]$ 是平衡分布, $\delta\Gamma(\theta, t)$ 满足的方程为

$$\frac{\partial \delta\Gamma}{\partial t} = \frac{2D}{k_B T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\frac{\partial \delta U}{\partial \mathbf{r}} \Gamma_0 + \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}} \delta\Gamma \right] + 2D \frac{\partial^2 \delta\Gamma}{\partial \mathbf{r}^2}. \quad (14)$$

为计算方便,将 $\delta\Gamma$ 写成

$$\delta\Gamma(\theta, t) = -\frac{\delta U(\theta, t)}{k_B T} \Gamma_0(\theta) \cdot g(\theta, \omega), \quad (15)$$

式中 $g(\theta, \omega)$ 是响应函数,它表示距离 ($R\theta$) 不同的偶极子对交变外场的响应程度. 利用半径固定为 R 的球面微分算子的表达式,及(9), (10), $\Gamma_0(\theta)$ 与 $\delta\Gamma(\theta, t)$ 的表达式,经运算与化简得到

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 g(\theta, \omega)}{d\theta^2} + \frac{dg(\theta, \omega)}{d\theta} \left(\cot\theta + \frac{2}{\theta} - \frac{1}{k_B T} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right) \\ &- g(\theta, \omega) \left[\frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{k_B T} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial \theta} - \cot\theta \right) - \frac{i\omega R^2}{2D} \right] \\ &+ \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{k_B T} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial \theta} - \cot\theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

后面我们将看到 $g(\theta, \omega)$ 随 θ 的变化很缓慢,因而可略去导数项,近似求得

$$g(\theta, \omega) = \frac{1}{1 - i \frac{\omega R^2}{2D} f^{-1}(\theta)}, \quad (17)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot \left[\frac{\pi K(\theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta - \theta_c)} - \cot \theta \right], \quad (18)$$

$$\text{式中} \quad K(\theta) = K_0 / \varepsilon(\theta), \quad (19)$$

$$K_0 = \frac{\rho_s^0}{k_B T} \cdot \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2. \quad (20)$$

从方程(18)看出, 当球面半径 $R \rightarrow \infty$, $\theta = r/R \ll 1$,

$$f^{-1}(\theta) \approx c \cdot \frac{r^2}{R^2}, \quad (21)$$

其中 c 是数量级为 1 的常数. 因此方程(17)退化到平面情形的相应公式^[4]. 从(17)与(18)式可以看出, 当 $\theta \rightarrow \pi$, $f(\theta) \rightarrow \infty$, $g(\theta, \omega) = 1$. 这一点在物理上是合理的, 因为它对应平面几何中 $r \rightarrow \infty$ 的情形, 而在 $r \rightarrow \infty$ 的极限情况涡线对之间没有作用力. 考虑到(17)式中扩散系数 $D \sim 10^{-4} \text{cm}^2/\text{s}$, $\omega \sim 10^4 \text{s}^{-1}$, $R \approx 10^{-6} \text{cm}$, 则 $g(\theta, \omega)$ 的虚部 $\leq 10^{-4}$ 可忽略, 因而 $g(\theta, \omega) \approx 1$. 这就证明了我们前面忽略 g 的导数项是合理的. 从物理上看, 这是因为在半径小的球面上, 涡线对的距离远小于扩散长度 $r_D \approx \left(\frac{2D}{\omega} \right)^{1/2}$, 因此不能达到弛豫共振. 这是球面与平面情形的重要差别.

将 $g(\theta, \omega)$ 的表达式(17)代入(12)式, 可以求出交变场中的介电常数为

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 + 4\pi^3 \cdot \gamma_0^2 \cdot (2\theta_c)^{-4} \cdot K_0 \cdot \int_{2\theta_c}^{\pi} \theta^2 \cdot \sin \theta \cdot e^{-U_0(\theta)/k_B T} \cdot g(\theta, \omega) d\theta \\ &= 1 + \int_{2\theta_c}^{\pi} \frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta} g(\theta, \omega) d\theta, \end{aligned} \quad (22)$$

式中

$$\gamma_0 = \exp(-E_c/k_B T). \quad (23)$$

假设 $\omega = 0$, 则(22)式退化到静态介电常数的表达式^[7]

$$\varepsilon(\theta) = 1 + 4\pi^3 \cdot \gamma_0^2 \cdot (2\theta_c)^{-4} \cdot K_0 \cdot \int_{2\theta_c}^{\theta} \theta'^2 \sin \theta' \cdot e^{-U_0(\theta')/k_B T} d\theta'. \quad (24)$$

在下一节用我们求得的结果, 分析 Bishop 等人用 Vycor 玻璃所作的扭摆实验^[6].

三、结果与讨论

前面已经提到, Vycor 玻璃的实验结果与 Mylar 聚脂膜上实验结果很不一样, 一是没有耗散, 二是本征周期的变化 ΔP (由(2)式看出它正比于超流面密度)在相变点上连续. 文献[6]的作者用下面关系拟合实验的结果, 即

$$\Delta P(T) \sim \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\xi},$$

$\xi \approx 0.635$, 与大块样品的相应数值 $\xi \approx 0.674$ 接近. 鉴于这些事实, 他们认为在 Vycor

玻璃中液氮层的超流相变表现的是三维相变的效应。但是,他们没有解释为什么相变温度不同于三维的相变温度,而且相变温度与膜的厚度有关。他们曾提到这是一种渗流型的转变,但没有进一步说明。值得注意的是在 Mylar 膜的实验中 ΔP 的变化也是连续的,这是动力学效应的结果^[4]。因此,由 ΔP 连续变化这一点不足以否定 K-T 相变的可能性。

我们认为,将 Vycor 玻璃的实验解释为球面几何尺寸的效应更为合理。Vycor 玻璃中有许多相互连通的、尺寸均匀的小孔,其半径约为 $150 \text{ \AA}$ ^[7]。当扭摆转动时,近似地可认为液氮沿球形内表面运动。因此,本文讨论的模型基本适用。根据(2)与(3)式,本征周期与耗散的变化分别正比于 $\varepsilon^{-1}(\omega)$ 的实部与虚部,根据(22)与(17),(18)式得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) &= 1 + \int_{2\theta_c}^{\pi} \frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta} \cdot [\operatorname{Re} g(\theta, \omega)] d\theta \\ &\simeq \lim_{\theta \rightarrow \pi} \varepsilon(\theta), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) \simeq \frac{\omega R^2}{2D} \cdot \int_{2\theta_c}^{\pi} f^{-1}(\theta) \cdot \frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (26)$$

(25)式表明,我们可以用球面静态 K-T 理论的结果来近似地计算本征周期的变化,而能量耗散 Q^{-1} 是一个很小的量。根据 Vycor 玻璃的实验数据^[6], $\frac{A}{M} \rho_s^0 \simeq 10^{-4}$, 而(26)式中积分的数量级 $\lesssim 1$, 故 $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$ 的数量级 $\lesssim 10^{-4}$, 因此 $Q^{-1} \leq 10^{-8}$ 。在 Mylar 实验中^[3] $Q^{-1} \sim 10^{-6}$ 。相比之下,在 Vycor 实验中测量不到耗散是自然的,因而要能观测到耗散,必须在更高频率下作实验。

Kotsubo 和 Williams^[7] 试图用球面静态 K-T 理论的结果解释 Vycor 实验,但是他们没有证明为什么可以用静态理论。他们推导的公式是正确的,但数值计算不对,导致结果并不理想,理论曲线在 T_c 附近的变化比实验平缓得多。数值计算的错误看来是由于逐点迭代没有自洽造成的。我们用五种不同的方法求解了积分方程组^[7]

$$K^{-1}(\theta) = K_0^{-1} + 4\pi^3 y_0^2 \cdot (2\theta_c)^{-4} \cdot \int_{2\theta_c}^{\theta} \theta'^2 \sin \theta' \cdot e^{-U(\theta')} d\theta', \quad (27)$$

$$U(\theta) = \int_{2\theta_c}^{\theta} \frac{\pi K(\theta') d\theta'}{\tan \frac{1}{2}(\theta' - \theta_c)}. \quad (28)$$

(文献[7]中 $U(\theta)$ 是以 kT 为单位)得到的结果都相同。我们把计算出的 $K(\theta = \pi)$ 随 K_0 变化的曲线画于图 1 中,三条曲线分别对应: $R = 150 \text{ \AA}$, $500 \text{ \AA}$ 与 $1 \mu\text{m}$ 的情形。

为了与 Vycor 实验比较,我们使用通常的模型^[6,7],即:球面上有一层固态氮(约 1.47 个原子层),固态层上面是液态层。未重整化超流面密度与体密度 ρ_s^b 的关系为

$$\rho_s^0 = \rho_s^b (d - 1.47) \times 3.6 \text{ \AA}, \quad (29)$$

式中 d 是液氮层的厚度。在 $R = 150 \text{ \AA}$ 的情形,我们计算了在不同厚度时 $\frac{\hbar^2}{m^2 k_B} \rho_s$ 随温度 T 变化的曲线,与 Vycor 实验数据^[6]同时画在图 2 上。为了标度,我们令 $d = 2.3$ 对应 $\Delta P(0) \approx 60 \times 10^{-3}$ 的一条曲线。此外,没有任何可调节的参数。从图 2 看出,理论与

实验结果符合很好。

综上所述,我们得出的结论是: Vycor 玻璃的扭摆实验结果可以用球形表面上的涡线动力学 K-T 理论来解释,实验中没有耗散和超流面密度在相变点 T_c 连续都是二维的球形表面几何尺寸的效应,并不是三维连通的结果。

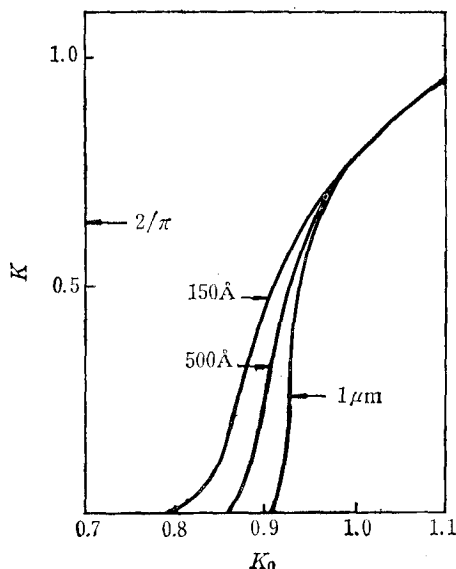


图 1

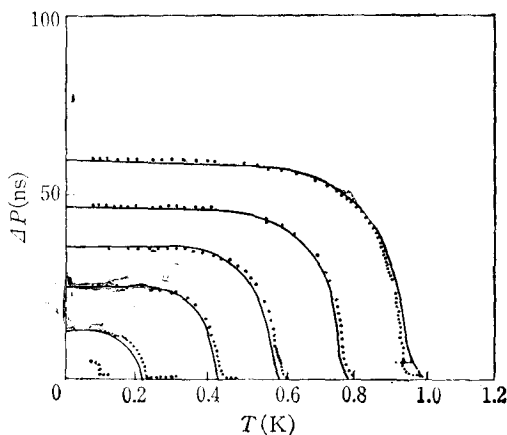


图 2

附 录

在球形表面液氦薄膜上,正、负涡线都处于以 o 为圆心,以 R 为半径的球面上。设正涡线位于 $\theta = 0$ 处,负涡线位于 $\mathbf{r}(R, \theta, \varphi)$ 处,正-负涡线之间位置矢量为 $\mathbf{r}'(r' = R \cdot \theta)$ 。我们证明,在以 o 为圆心的球坐标系中,分布函数 $\Gamma(\mathbf{r}, t)$ 服从的方程为

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{2D}{k_B T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \Gamma(\mathbf{r}, t) \right] + 2D \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2}. \quad (\text{A.1})$$

设以正涡线 o' 为中心的原坐标系是 r', θ', φ' , 而以球面中心 o 为圆心的新坐标系是 r, θ, φ , 如附录图示,这两个坐标系坐标之间的关系为

$$\begin{aligned} r'^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta, \\ r \cdot \sin \theta &= r' \sin \theta', \\ \varphi' &= \varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

将上式两边对 θ' 求导数,解出

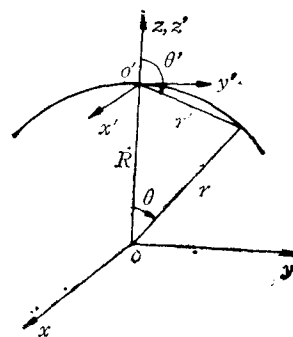
$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta'} = \frac{1}{r} (r - R \cos \theta), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta'} = -R \sin \theta. \quad (\text{A.4})$$

再将 (A.2) 式两边对 r' 求导数,得到

$$\frac{\partial r}{\partial r'} = \frac{1}{R - r \cos \theta} \cdot \left[\frac{1}{r'} R r \sin^2 \theta - r' \cos \theta \right], \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r'} = \frac{1}{r(R - r \cos \theta)} \cdot \left[r' \sin \theta - \frac{r \sin \theta}{r'} (r - R \cos \theta) \right]. \quad (\text{A.6})$$



附录图

利用(A.3)式到(A.6)式,可将拉普拉斯算子 ∇'^2 对 $U(r, \theta, \varphi)$ 的作用变换到新坐标系,证出(A.1)式.

$$\begin{aligned} \nabla'^2 U &= \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial}{\partial r'} \right) U + \frac{1}{r'^2 \sin \theta'} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sin \theta' \frac{\partial}{\partial \theta'} \right) U \\ &\quad + \frac{1}{r'^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta'} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi'^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

对(A.7)式等号右边各导数运算,得到

$$\frac{\partial U}{\partial \theta'} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta'} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} = \frac{1}{r} (r - R \cos \theta) \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta'^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta'} \right) \right]_r \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta'} + \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta'} \right) \right]_\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \\ &= \frac{1}{r^2} (r - R \cos \theta)^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \left[\frac{R \sin \theta}{r} - \frac{2R^2 \sin \theta \cdot \cos \theta}{r^2} \right] \frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{2}{r'} \frac{\partial U}{\partial r'} = \frac{2}{r'} \left[\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial r'} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r'} \right] = \frac{\sin \theta}{R^2 (1 - \cos \theta)} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r'^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial r'} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r'} \right) \right]_r \cdot \frac{\partial r}{\partial r'} + \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r'} \right) \right]_\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r'} \right\} \\ &= \frac{1}{2R^2} (1 + \cos \theta) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{4} \frac{\sin^3 \theta}{R^2 (1 - \cos \theta)^2} - \frac{\sin^3 \theta}{2R^2 (1 - \cos \theta)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^3 \theta \cdot \cos \theta}{R^2 (1 - \cos \theta)^3} + \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{R^2 \cdot (1 - \cos \theta)^2} \cdot (1 - 2 \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{2R^2 (1 - \cos \theta)} - \frac{\sin^3 \theta}{4R^2 (1 - \cos \theta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

运算中需注意 $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$, 因为 $r = R = \text{const}$, 运算最后要利用 $r = R$, $r'^2 = 2R^2(1 - \cos \theta)$ 进行化简才得到(A.8)–(A.11)式. 将(A.8)–(A.11)式代入(A.7)式进行运算化简,得到

$$\nabla'^2 U = \nabla^2 U, \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{A.13})$$

其中 ∇^2 是在半径 $r = R$ 三维球面上的拉普拉斯算子.

用类似的方法对梯度的点积 $\nabla' U \cdot \nabla' \Gamma$ 进行坐标变换,得到

$$\begin{aligned} \nabla' U \cdot \nabla' \Gamma &= \nabla U \cdot \nabla \Gamma \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

将(A.12),(A.14)式代入正文的(6)式,则得到(A.1)式.

参 考 文 献

- [1] J. M. Kosterlitz, and D. J. Thouless, *J. Phys.*, C6(1973), 1181; J. M. Kosterlitz, *J. Phys.*, C7(1974), 1046.
- [2] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.*, 39(1977), 1201.
- [3] D. J. Bishop and J. D. Reppy, *Phys. Rev.*, B22(1980), 5171.
- [4] V. Ambegaokar, B. I. Halperin, D. R. Nelson and E. Siggia, *Phys. Rev.*, B21(1980), 1806.
- [5] 请参阅综述 Yu Lu, to appear in Review of Chinese Sciences, Physics Reviews, 科学出版社, (1985).
- [6] D. J. Bishop, J. E. Berthold, J. M. Parpia and J. D. Reppy, *Phys. Rev.*, B24(1981), 5047.
- [7] V. Kotsubo and G. A. Williams, *Phys. Rev. Lett.*, 53(1984), 691.

VORTEX DYNAMICS OF SUPERFLUID HELIUM FILMS ON SPHERICAL SURFACES

WANG CHENG-TAI

(Department of Physics, Tsinghua University)

YU LU

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The vortex dynamics of superfluid helium films at the Kosterlitz-Thouless phase transition is generalized to the case of spherical surfaces and is applied to interpret the torsional oscillator experiments of Bishop et al. on Vycor glass.