

Schwarzschild 黑洞整体正规 时空中的测地运动

朱 蔚 通

沈 文 达

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

(上海科学技术大学物理系)

1985 年 7 月 22 日收到

提 要

本文研究了 Schwarzschild 黑洞整体正规时空中的测地运动, 求得了无奇性内部时空中检验粒子测地方程的解析解, 并与奇性黑洞情况作了比较。

一、引 言

最近, Gonzalez-Diaz 提出了 Schwarzschild 黑洞的一个无奇性的内部解^[1]

$$d\tau^2 = (1 - r^2/R_s^2)dt^2 - (1 - r^2/R_s^2)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (r < 2M). \quad (1)$$

该解在 $r = R_s = 2M$ 处与外部解

$$d\tau^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (r > 2M) \quad (2)$$

连接, 并在 $r = 2M$ 处, 保持外部解的红外发散性质, 而在 $r = 0$ 处无奇性。表征内部物质的状态方程

$$p = -\rho \quad (3)$$

满足 Hawking 和 Ellis 提出的主能量条件^[2]。

按照我们在文献[3]中提出的整体正规解的定义, 由(1)和(2)式合成的解称为 Schwarzschild 黑洞的一个整体正规解。这就是说, 这个解在整个时空满足爱因斯坦场方程, 并且除了平庸的坐标奇点(如 $r = 2M$, $\theta = 0, \pi$)外, 是无奇性的, 而内部物质的能量-动量张量满足主能量条件, 它在物理上是合理的。这一整体正规解的概念不同于以往对黑洞的理解, 鉴于均匀体电荷分布和均匀面电荷分布的荷电黑洞的整体正规解也已在文献[3, 4]中求得, 因而研究具有这种度规的时空中检验粒子的测地运动是很自然的, 也是有必要的。

二、测地线方程及其解

奇性 Schwarzschild 几何中粒子的运动已有许多人作了研究^[5], 人们对于由线元(2)式表征的 $r > 2M$ 区域的外部时空中粒子的运动已有详尽的了解, 因此我们只需考虑由线元(1)式表述的 $r < 2M$ 区域的内部时空中粒子的运动。由线元(1)式的变分^[6]

$$\delta \left\{ (1 - r^2/R_s^2)\dot{t}^2 - (1 - r^2/R_s^2)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) \right\} d\tau = 0, \quad (4)$$

可以得到制约测地运动的运动方程

$$d[(1 - r^2/R_s^2)\dot{t}]/d\tau = 0, \quad (5)$$

$$d(r^2\dot{\theta})/d\tau = r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 \quad (6)$$

$$d(r^2 \sin^2\theta \dot{\phi})/d\tau = 0, \quad (7)$$

$$(1 - r^2/R_s^2)\dot{t}^2 - (1 - r^2/R_s^2)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) = 1 \quad (8)$$

其中 $\dot{x} \equiv dx/d\tau$, 而 $x = t, r, \theta, \phi$ 为 Schwarzschild 坐标, τ 为固有时间.

鉴于球对称性, 我们可以只考虑赤道面 $\theta = \pi/2$ 的情况.

直接积分方程(5)和(7)得到

$$\dot{t} = E(1 - r^2/R_s^2)^{-1} \quad (9)$$

和

$$\dot{\phi} = Lr^{-2} \quad (10)$$

其中积分常数 E 表示无穷远处单位静质量的能量, 积分常数 L 表示单位静质量的角动量^[5].

由方程(8), (9)和(10), 可以得到

$$\dot{r} = \pm [E^2 - (1 - r^2/R_s^2)(1 + L^2/r^2)]^{1/2}. \quad (11)$$

积分(11)式, 我们得到固有时间 τ 与径向坐标 r 的关系式

$$\begin{aligned} \tau/M &= \pm \int [y^2 + (L^2 + R_s^2 E^2 - R_s^2)y - R_s^2 L^2]^{-1/2} dy \\ &= \pm \ln \{ 2[y^2 + (L^2 + R_s^2 E^2 - R_s^2)y - R_s^2 L^2]^{1/2} + 2y \\ &\quad + L^2 + R_s^2 E^2 - R_s^2 \} + c \quad (L \neq 0) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau/M &= \pm 2 \int [r^2 + R_s^2(E^2 - 1)]^{-1/2} dr = \pm 2 \ln \{ r + [r^2 \\ &\quad + R_s^2(E^2 - 1)]^{1/2} \} + c' \quad (L = 0) \end{aligned} \quad (12')$$

其中 c 和 c' 为积分常数, (12)式中 $y = r^2$.

由(9)式, (11)式和 $\dot{t} = \dot{r} dt/dr$, 得到坐标时间 t 与径向坐标 r 的关系式

$$\begin{aligned} t/M &= \mp R_s^2 E \int z^{-1} [z^2 - (L^2 + R_s^2 E^2 + R_s^2)z + R_s^4 E^2]^{-1/2} dz \\ &= \begin{cases} \pm \ln \left(\frac{2\sqrt{cX}}{z} + \frac{2c}{z} + b \right) + D_1 & c > 0, \Delta < 0, \\ \pm \operatorname{Arsh}(bz + 2c/z\sqrt{\Delta}) + D_2 & c > 0, \Delta > 0, (L \neq 0) \\ \pm \ln \frac{bz + 2c}{z} + D_3 & c > 0, \Delta = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $z \equiv R_s^2 - r^2$, $X \equiv z^2 + bz + c$, $b \equiv -(L^2 + R_s^2 E^2 + R_s^2)$, $c \equiv R_s^4 E^2$, $\Delta = 4c - b^2$, 而 D_1, D_2, D_3 为积分常数.

对于 $L = 0$ 的情况, $\Delta = -(E^2 - 1)^2 < 0$, $c > 0$, 径向测地运动 ($r < 2M$) 由下式描述:

$$t/M = \pm \ln \left(\frac{2\sqrt{cX}}{z} + \frac{2c}{z} + b \right) + D_1. \quad (13')$$

这里 $X = z^2 - R_i^2(E^2 + 1)z + R_i^4E^2$, $b = -(E^2 + 1)R_i^2$, $c = R_i^4E^2$.

利用 $\dot{r} = dr/d\tau = r' L r^{-2}$ 和(11)式,可以得到轨道方程

$$r = \sqrt{2} L R_i / \{ (L^2 + R_i^2 E^2 - R_i^2) \pm [4 R_i^2 L^2 + (L^2 + R_i^2 E^2 - R_i^2)^2]^{1/2} \sin [2(\phi - \alpha)] \}^{1/2}, \quad (14)$$

其中

$$\alpha = \left(\mp \frac{1}{2} \right) \arcsin \{ (R_i^2 E^2 - L^2 - R_i^2) / [4 R_i^2 L^2 + (L^2 + R_i^2 E^2 - R_i^2)^2]^{1/2} \}. \quad (15)$$

它是由 $r = R_i$ 时 $\phi = 0$ 而得到的.

三、讨 论

首先我们来讨论检验粒子在 Schwarzschild 整体正规时空中运动的有效势.

与 $r > 2M$ 的情况^[5]类同,可以把(11)式右边方括号内的第二项定义作有效势 $V(r)$ 的平方,于是(11)式可改写成

$$\dot{r}^2 = E^2 - V^2(r), \quad (16)$$

而

$$V(r) = [(1 - r^2/R_i^2)(1 + L^2/r^2)]^{1/2}. \quad (17)$$

有效势 $V(r)$ 随 r/M 的变化示于图1. 为了便于比较,在图上也画出了由线元(2)式得出的在 $r > 2M$ 区域的有效势曲线. 由线元(1)和(2)式给出的有效势曲线可以看到,除了在 $r > 2M$ 区域的 $(r/M)_+ = 6/[1 + \sqrt{1 - 12L^{-2}M^2}]$

和

$$(r/M)_- = 6/[1 - \sqrt{1 - 12L^{-2}M^2}]$$

处,势能分别具有极大值和极小值外,在 $r = 2M$ 处,势能具有最小值 $V(2M) = 0$. 而在 $r < 2M$ 区域存在着势垒. 比较 $L/M = 4$ 和 $L/M = 4.33$ 的曲线,可以看到总的轨道角动量较小时,势垒较低,而且除了 $L = 0$ 时 $V(0) = 1$ 取有限值外,对于任何 L ,只要 $L \neq 0$,都有 $V(0) \rightarrow \infty$. 与奇性黑洞的情况不同,在 $r = 2M$ 处,粒子可以是稳定的.

为了更清楚地看出 $r < 2M$ 区域在物理上如何与 $r > 2M$ 区域相连接,我们根据上述计算结果考察检验粒子的径向测地运动.

在观察者固有参考系中,对于时空由线元(2)式描述的奇性黑洞,径向坐标 r 随固有时间 τ 的变化由如下方程描述^[5]:

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} r_{\max}(1 + \cos \eta) \\ \tau = (r_{\max}^3/8M)^{1/2}(\eta + \sin \eta) \end{cases} \quad (18)$$

其中 $r_{\max} \equiv 2M/(1 - E^2)$, $-\pi \leq \eta \leq \pi$. (18)式描述在 $\tau = -\pi(r_{\max}^3/8M)^{1/2}$ 从 $r = 0$ 沿径向射出的检验粒子在 $\tau = 0$ 达到最大半径 $r_{\max}$, 然后又在 $\tau = \pi(r_{\max}^3/8M)^{1/2}$ 回到 $r = 0$ 的测地运动. 图2中实线表示这种运动的径迹.

对于由线元(1)和(2)式描述的无奇性时空(除平庸的坐标奇点 $r = 2M$ 外), $r < 2M$ 和 $r > 2M$ 区域径向坐标 r 随固有时间 τ 的变化分别由(12')和(18)式给出. 为了与奇性解进行比较,(12')式中的积分常数 c' 借助(18)式加以确定. 在(11)式中,令

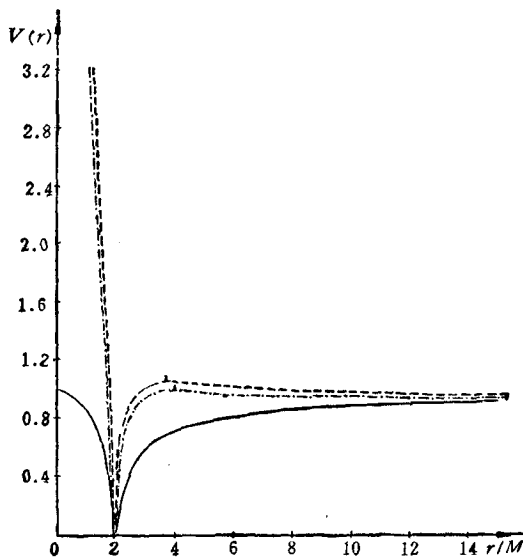


图1 检验粒子运动的有效势 $V(r)$ 与 r/M 的依赖关系
实线—— $L/M = 0$; 点虚线—— $L/M = 4$;
虚线—— $L/M = 4.33$

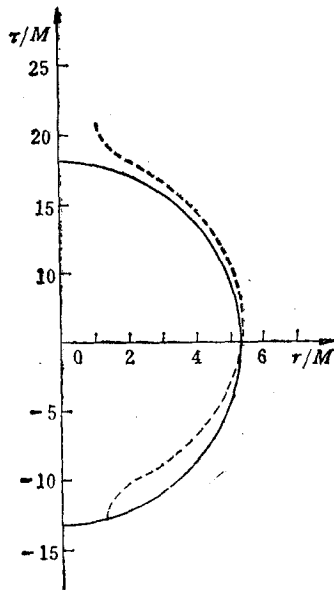


图2 在观察者共同坐标系中检验粒子的径向测地运动
实线——奇性 Schwarzschild 几何中的 τ/M 与 r/M 的
依赖关系; 虚线——整体正规 Schwarzschild 几何中
 τ/M 与 r/M 的依赖关系

$L = 0$, 由 $\dot{r} = 0$ 得出检验粒子可达到的最小半径 $r_{\min} = (1 - E^2)^{1/2} R_s$, 然后由 (18) 式定出奇性 Schwarzschild 几何中对应于 $r_{\min}$ 值的固有时间 $\tau_{\min}$. 我们把 $\tau_{\min}$ 取作检验粒子在整体正规时空中运动的初始时间, 其运动径迹由图2中的虚线给出. 由实线和虚线可以看到, 对于具有同样能量的检验粒子, 在两种时空中它们可以达到相同的最大半径 $r_{\max} = 2M/(1 - E^2)$, 但不能达到相同的最小半径, 粒子在 $r > 2M$ 区域的运动径迹由 $r > 2M$ 的时空几何决定, 内部时空几何对外部运动的影响只是使同一 r 处固有时间取不同的值, 而并不改变从 $r = 2M$ 到 $r = r_{\max}$ 再回到 $r = 2M$ 所需的总的固有时间和径迹的形状. 当然, 由于内部时空几何的

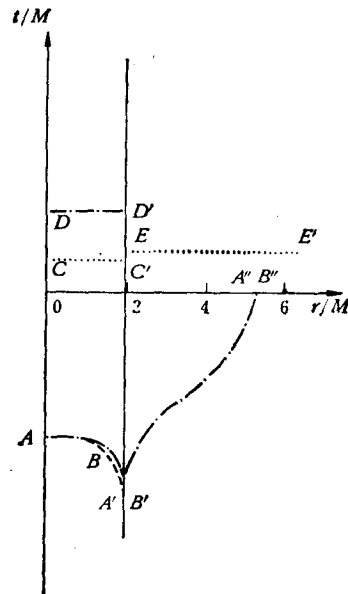


图3 Schwarzschild 坐标时间 t/M 与径向坐标 r/M 的依赖关系 $AA'A''$ ——奇性 Schwarzschild 几何中的类时测地线 ($E = 0.744$); CC' 和 EE' ——该几何中的类时和类空测地线 ($E = 0$); $BB'B''$ ——整体正规 Schwarzschild 几何中的类时测地线 ($E = 0.744$) (其中 $B'B''$ 与 $A'A''$ 重合); DD', EE' ——该几何中的类空测地线 ($E = 0$)

不同, 两者的内部运动径迹并不相同.

最后, 我们考察粒子在两种几何中的 r/M 随坐标时间 t/M 的变化.

图 3 的曲线 $AA'A''$ 表示奇性 Schwarzschild 几何中从 $r = 0$ 出发的类时测地线^[7], 曲线 $BB'B''$ 表示整体正规 Schwarzschild 几何中从 $r = r_{\min}$ 出发的检验粒子的类时测地线. 显然, 在 $r > 2M$ 区域内, 两种测地线是相同的, 但在内部区域, 两者的出发位置和形状都不相同.

值得指出的是, $r < 2M$ 区域内的不同时空几何有时会影响测地线的类时性质. 例如, 图 3 中的曲线 CC' 表示奇性 Schwarzschild 几何中的测地线, 它是类时的^[7], 而同样能量的检验粒子在无奇性时空中的测地运动, 却具有类空的性质(曲线 DD'). 曲线 EE' 是它们在 $r > 2M$ 时空中的类空测地线.

至于 r 与 ϕ 角的依赖关系, 我们得到了 $r < R_s$ 区域内的解析表达式(14), 依赖于参量 L 和 E , 可以得到 r^2 的椭圆、双曲和抛物线型的轨道. 但由于 $r < R_s$, ϕ 的取值受到一定的限制. 事实上, 由于内部势垒的效应, 一个由 R_s 处进入内部的粒子只有部分轨道按照(14)式的轨道运动, 接着就回到由线元(2)式描述的 $r > R_s$ 的时空中去, 内外轨道的联结可借助数值积分.

利用所得的结果, 我们在原则上可以通过考察检验粒子的运动. 来探知黑洞内部的度规, 判明奇性的真实与否.

参 考 文 献

- [1] P. F. Diaz. Gonzalez, *Lett. Nuovo Cimento*, **32**(1981), 161.
- [2] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1973).
- [3] Shen Wenda (沈文达) and Zhu Shitong (朱蔚通), *General Relativity and Gravitation*, **17** (1985), 739.
- [4] Shen Wenda (沈文达) and Zhu Shirong (朱蔚通), *Nuovo Cimento* **85B**(1985), 142.
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, 656—667, W. H. Freeman and Company San Francisco.
- [6] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill Book Company, New York, second, (1975), 199.
- [7] 见文献[5] 825 页.

GEODESIC MOTION IN THE GLOBALLY REGULAR SPACE-TIME OF A SCHWARZSCHILD BLACK HOLE

ZHU SHI-TONG

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

SHEN WEN-DA

(Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology)

ABSTRACT

The geodesic motion in the globally regular space-time of a Schwarzschild black hole is studied. The analytic solutions of the geodesic equations for a test particle inside the space-time without singularity are derived. Our results are compared with the ones for the black hole with singularity.