

研究简报

反常、Chern-Simons 上链

王世坤

吴可

(中国科学院应用数学研究所)

(中国科学院理论物理研究所)

侯伯宇

郭汉英

(西北大学现代物理研究所) (中国科学院理论物理研究所, 西北大学现代物理研究所)

1984 年 9 月 14 日收到

提 要

本文提出一种联络空间上同调的概念, 建立这种上同调群与 Chern-Simons 型示性类系列的同态关系, 给出它们在反常、Wess-Zumino 有效作用与 Schwinger 项等问题上的应用; 从而概括了 Faddeev, 宋行长, Zumino 等人最近关于这些问题的探讨.

最近, 本文部分作者推广了 Chern-Simons 第二特征类的概念, 定义了 Chern-Simons 型特征类系列, 证明了这个示性类系列的一个重要性质, 即第 k 阶 Chern-Simons 上链的上边缘是一第 $k+1$ 阶 Chern-Simons 上链的外微分; 并指出它们在有关反常的一系列问题上有重要的应用^[1]. 与此同时, Faddeev 从 Cartan 的 Lie 群上同调理论的角度^[2]对这些问题以及流代数中反常对易子的 Schwinger 项^[3]进行了讨论^[4], 宋行长¹⁾和 Zumino²⁾从不同的角度对于 Faddeev 的处理也进行了分析, 从而引起了广泛的兴趣.

本文将在文献[1]的基础上引入联络空间的一种上同调的概念, 并建立相应的上同调群与 Chern-Simons 上链^[1]的同态关系. 同时给出在非 Abel 反常^[5]、规范不变的 Wess-Zumino 项^[6]以及 Schwinger 项等问题上的应用. 我们将指出, Faddeev 所采用的 Lie 群上同调是我们所引入的联络空间的上同调的特殊情形. 而且, 宋行长与 Zumino 的方法也可以由本文的方法得到. 事实上, 由于 Chern-Simons 上链本身具有拓扑意义, 因而可以直接赋予非 Abel 反常、规范不变 Wess-Zumino 有效作用以及反常对易子的 Schwinger 项等以具体的拓扑意义; 并可以处理有边流形上的这类问题. 同时, 由于 Chern-Simons 上链中可以含有多个不同的联络, 因而可以讨论较复杂的、如既有右手又有左手规范场的情形, 而这些都是文献[4—6]的方法所难以处理的.

我们将首先定义一种由不同的联络组成的多项式的上边缘算子 Δ , 引入相应的上同

1) 私人通讯, (1984).

2) 1984 年 9 月 8 日在中国科学院理论物理研究所作的报告.

调的概念,然后考察这个上边缘算子对 Chern-Simons 上链的作用,并进而考查一种退化的 Chern-Simons 上链,即除了一个任意联络之外,包含一恒为零的联络,同时其余的联络都是平联络的情形. 指出对于这种退化的 Chern-Simons 上链可以定义另一个上边缘算子 Δ' . 在考察有关的物理运用之后,我们讨论与 Faddeev, 宋行长,以及 Zumino 所采用的方法的关系.

设 A 为联络 1-形式

$$A = A_\mu^a T_a dx^\mu, \quad (1)$$

F 为曲率 2-形式(略去外乘记号)

$$F = dA + A^2. \quad (2)$$

设 $R^{(k)}(A^0, \dots, A^{k-1})$ 为任意 k 个不同的联络所组成的多项式, 称为第 $k-1$ 阶 R 上链. 定义作用在 R 上链上的上边缘算子 Δ 为

$$\Delta R^{(k)}(A^0, \dots, A^{k-1}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j R^{(k)}(A^0, \dots, A^{j-1}, \hat{A}^j, A^{j+1}, \dots, A^k), \quad (3)$$

其中 $\hat{A}^j$ 表示 A^j 在 $R^{(k)}$ 上链中不出现. 显然易证

$$\Delta^2 = 0. \quad (4)$$

若 $\Delta R^{(k)} = 0$, 则算子 $R^{(k)}$ 为第 $k-1$ 阶 R 上闭链. 进而可以按照通常的上同调理论引入与此上边缘算子 Δ 相应的联络空间中 R 上链的上同调关系, 以及上同调群 H_Δ .

如果多项式 R 取为文献 [1] 中所引入的 Chern-Simons 型示性类的 Q 多项式, 称为 Chern-Simons Q 上链

$$Q_r^{(k)}(A^{i_0}, \dots, A^{i_{k-1}}; \Delta_{k-1}) = \frac{r!}{(r-k+1)!} \int_{\Delta_{k-1}} dt_1 \cdots dt_{k-1} P(\eta^{i_{i_0}}, \dots, \eta^{i_{i_{k-1}}}; F_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}^{r-k+1}), \quad (5)$$

其中 Δ_{k-1} 为 $R_{k-1}(t)$ 中的 $k-1$ 维单形, $P(F)$ 为 r 阶特征多项式, 而 $0 \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq 1$, 且

$$A_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}} = A^{i_0} + t_1 \eta^{i_1 i_0} + \dots + t_{k-1} \eta^{i_{k-1} i_0}, \quad \eta^{ij} = A^i - A^j, \quad (6)$$

$$F_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}} = d A_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}} + A_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}^2, \quad (7)$$

d 是定义在 $M^{2r-k+1} \times R_{k-1}(t)$ 上的外微分, M^{2r-k+1} 为底流形. 显然, $d = d_{(x)} + d_{(t)}$, 其中 $d_{(x)}$ 与 $d_{(t)}$ 为分别定义在 M^{2r-k+1} 与 $R_{k-1}(t)$ 上的外微分运算.

文献 [1] 证明了 Chern-Simons Q 上链的一个重要性质:

$$\sum_{\substack{\Delta_{k-1}^{(i)} \in \partial \Delta_k}} Q_r^{(k)}(A^{i_0}, \dots, A^{i_{k-1}}; \Delta_{k-1}^{(i)}) = d Q_r^{(k+1)}(A^{i_0}, \dots, A^k; \Delta_k). \quad (8)$$

显然, 利用上边缘算子 Δ 的定义, 上式即

$$\Delta Q_r^{(k)}(A^0, \dots, A^{k-1}; \Delta_{k-1}) = d Q_r^{(k+1)}(A^0, \dots, A^k; \Delta_k), \quad (9)$$

这就是文献 [1] 对 (8) 式所作说明的含意. 下面, 我们利用 Cartan 关于 Lie 导数与外微分关系的一个公式^[10]来证明这一性质. 用 i^m 记 $i\left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$, L^m 记 $L\left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$, 则利用 Cartan 公式易证

$$(-)^{k_i k-1} \circ \dots \circ i^1 \circ d_{(x)} + d_{(x)} \circ i^{k-1} \circ \dots \circ i^1$$

$$\begin{aligned}
&= L^{k-1} \circ i^{k-2} \circ \dots \circ i^1 - i^{k-1} \circ L^{k-2} \circ i^{k-3} \circ \dots \circ i^1 + \dots \\
&\quad + (-1)^k i^{k-1} \circ i^{k-2} \circ \dots \circ L^1
\end{aligned} \tag{10}$$

将上式作用于 $P(F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^r)$ 上, 左边给出

$$\begin{aligned}
&d_{(x)} \circ i^{k-1} \circ \dots \circ i^1 P(F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^r) \\
&= r d_{(x)} \circ i^{k-1} \circ \dots \circ i^2 P(\eta^{1,0}, \dots, F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^{r-1}) \\
&= r(r-1) \dots (r-k+2) dP(\eta^{1,0}, \dots, \eta^{k-1,0}, F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^{r-k+1}),
\end{aligned}$$

右边其中一项给出

$$\begin{aligned}
&i^{k-1} \circ i^{k-2} \circ \dots \circ L^j \circ i^{j-1} \circ \dots \circ i^1 P(P_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^r) \\
&= i^{k-1} \circ \dots \circ i^{j+1} \circ L^j P(\eta^{1,0}, \dots, \eta^{j-1,0}, F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^{r-j+1}) \cdot r(r-1) \dots (r-j+2) \\
&= i^{k-1} \circ \dots \circ i^{j+1} \frac{\partial}{\partial t_j} P(\eta^{1,0}, \dots, \eta^{j-1,0}, F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^{r-j+1}) \cdot r(r-1) \dots (r-j+2) \\
&= r \dots (r-k+3) \frac{\partial}{\partial t_j} P(\eta^{1,0}, \dots, \eta^{j,0}, \dots, \eta^{k,0}, F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^{r-k+2}),
\end{aligned}$$

其余项可以类似处理. 两边在 $\Delta_{k-1}(t)$ 上积分得

$$\begin{aligned}
&d \int_{\Delta_{k-1}} dt_1 \dots dt_{k-1} P(\eta^{1,0}, \dots, \eta^{k,0}, F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^{r-k+1}) \\
&= \sum (-1)^j \int_{\Delta_{k-1}} \frac{\partial}{\partial t_j} P(\eta^{1,0}, \dots, \eta^{j,0}, \dots, \eta^{k,0}, F_{0,t_1,\dots,t_{k-1}}^{r-k+2}) dt_1 \dots dt_{k-1}.
\end{aligned}$$

进而利用文献[1]的技巧即可证明(9)式.

(9)式表明, 我们有如下的 Chern-Simons Q 上链系列

$$Q_r^{(1)} \xrightarrow{d^{-1}\Delta} Q_r^{(2)} \xrightarrow{d^{-1}\Delta} Q_r^{(3)} \xrightarrow{d^{-1}\Delta} \dots \xrightarrow{d^{-1}\Delta} Q_r^{(2r)} \tag{11}$$

如果底流形 M^{2r-k+1} 没有边界, 则由 Stokes 公式, (9)式在 M^{2r-k+1} 上的积分给出第 $k-1$ 阶 Chern-Simons 上闭链. 即若定义 Chern-Simons q 上链

$$\int_{M^{2r-k+1}} Q_r^{(k)}(A^0, \dots, A^{k-1}; \Delta_{k-1}) \equiv q_r^{(k)}(A^0, \dots, A^{k-1}; \Delta_{k-1}, M^{2r-k+1}), \tag{12}$$

则

$$\Delta q_r^{(k)}(A^0, \dots, A^{k-1}; \Delta_{k-1}, M^{2r-k+1}) = 0, \tag{13}$$

即 Chern-Simons q 上链是上闭链.

取 $k=1$, 如文献[1]指出, 我们有

$$Q_r^{(1)}(A^0) = P(F^r), \tag{14}$$

$$Q_r^{(2)}(A^0, A^1; \Delta_1) = r \int_0^1 dt_1 P(A^1 - A^0, F_{0,t_1}^{r-1}), \tag{15}$$

则(8)与(9)式共同给出

$$\begin{aligned}
\Delta Q_r^{(1)}(A^i; \Delta_0^{(i)}) &= P(F_1^r) - P(F_0^r) \\
&= dQ_r^{(2)}(A^0, A^1; \Delta_1) \quad (i=0, 1).
\end{aligned} \tag{16}$$

这就是著名的 Chern-Weil 同态公式. 显然, 类似 Chern 对 Weil 同态的证明^[8,9], 可以得到 Chern-Simons q 上闭链与由上边缘算子 Δ 定义的上同调群 H_Δ 之间的同态关系.

下面, 我们给出一种特殊的 R 上链及一种退化的 R 上链, 分别记作 R_S 上链与 R_F 上链.

R_s 上链 取

$$\begin{aligned} A^0 &= A, \\ A^1 &= Ag_1 \equiv g_1^{-1}Ag_1 + g_1^{-1}dg_1, \\ &\dots\dots\dots \\ A^k &\equiv Ag_1 \cdots g_k \equiv (g_1 \cdots g_k)^{-1}A(g_1 \cdots g_k) + (g_1 \cdots g_k)^{-1}d(g_1 \cdots g_k), \end{aligned} \quad g_i \in \text{Lie 群 } G \quad (17)$$

则上边缘算子 Δ 对第 k 阶 R_s 上链的作用为

$$\begin{aligned} \Delta R_s^{(k+1)}(A^0, \dots, A^k) &\equiv \Delta R_s^{(k+1)}(A; g_1 \cdots g_k) \\ &= R_s^{(k+1)}(Ag_1, g_2 \cdots g_k) - R_s^{(k+1)}(A; g_1g_2, g_3 \cdots g_k) + \dots \\ &\quad + (-1)^i R_s^{(k+1)}(A; g_1, \dots, g_i g_{i+1}, g_{i+2} \cdots g_k) + \dots \\ &\quad + (-1)^k R_s^{(k+1)}(A; g_1 \cdots g_{k-1}), \end{aligned} \quad (18)$$

这就是 Faddeev^[4] 与 Zumino^[6] 所引用的 Lie 群上同调的边缘算子对第 k 阶上链的作用。显然, 此时 R_s 上链中的 $A^0, \dots, A^k$ 均在。联络 A 在 Lie 群 G 作用下生成的一条轨道上。

R_F 上链 取

$$A^0 = 0, \quad A^1 = A, \quad A^2 = g_1 dg_1^{-1}, \dots, \quad A^k = g_1 g_2 \cdots g_k d(g_1 g_2 \cdots g_k)^{-1}, \quad (19)$$

则由 R 上链得到一退化的 R_F 上链, 对于 R_F 上链除了上边缘算子 Δ 之外, 还可以定义一与之相关的上边缘算子 Δ' :

$$\Delta' R_F^{(k+1)} \equiv \Delta R_F^{(k+1)} - R_F^{(k+1)}(0, A^2, \dots, A^{k+1}). \quad (20)$$

注意到

$$\begin{aligned} &R_F^{(k+1)}(A, g_1 dg_1^{-1}, g_1 g_2 d(g_1 g_2)^{-1}, \dots, g_1 \cdots g_k d(g_1 \cdots g_k)^{-1}) \\ &= R_F^{(k+1)}(Ag_1, 0, g_2 dg_2^{-1}, g_2 g_3 d(g_2 g_3)^{-1}, \dots, g_2 \cdots g_k d(g_2 \cdots g_k)^{-1}), \end{aligned} \quad (21)$$

则易见在算子 Δ' 作用下, 第 k 阶退化上链 $R_F^{(k+1)}$ 的行为与算子 Δ 作用下, 第 $k-1$ 阶特殊上链 $R_s^{(k)}$ 的行为一致, 亦即与 Faddeev 引入的第 $k-1$ 阶上链 $\alpha^{k-1}(A; g_1 \cdots g_{k-1})$ 一致。

当多项式 R 取为特征多项式时, 我们也可以得到与之相应的特殊的 Chern-Simons Q_s 上链与 q_s 上闭链, 以及退化的 Chern-Simons Q_F 上链与 q_s 上闭链。

最后, 我们以 $r=3$ 时的 Chern-Simons 上链 $Q_3^{(k)}$ 为例, 说明有关的物理应用。显然,

$$Q_3^{(1)} = P(F^3)$$

相应于第 3 Chern 类, 而 S^4 上规范不变的 Wess-Zumino 有效作用量中的 T 项与 W 项^[6,8,9] 分别可由第 1 阶上链 $Q_3^{(2)}(v^{-1}dv, 0)$ 在 5 维盘 Q^5 上的积分, $2Q^5 = S^4$, 以及第 2 阶 Chern-Simons 上链 $Q_3^{(3)}(v^U A_L, A_R, 0) + Q_3^{(3)}(A_L, v^{-1}dv, 0)$ 在 S^4 上的积分得到。而且, $Q_3^{(3)}(v^U A_L, A_R, 0) + Q_3^{(3)}(A_L, v^{-1}dv, 0)$ 按 $v^{-1}dv$ 对无限小参数的幂次展开, 其零级项是 Bardeen 引入的抵消项 $R_3^{[3]}$, 一级项是 Bardeen 的不对称反常^[5], 二级项应相应于具有左右规范时的 Schwinger 项。如前所述, 可以同时处理具有左、右规范场的情况是本文引入的方法的一个特点。在 Faddeev 与 Zumino 的处理中并不具有这一特点。当然, 采用本文的方法同样可以得到他们的结果。例如, Faddeev 得到等时反常对易子的 Schwinger 项时, 相当于利用了本文的退化的 3-上链 $Q_3^{(4)}(A, g_1 dg_1^{-1}, g_1 g_2 d(g_1 g_2)^{-1}, 0)$ 。

有关这些物理内容的详细分析以及进一步的应用我们将另文发表。

作者感谢宋行长与 Zumino 在他们的工作发表之前通知我们,并将 Faddeev 的工作作了介绍。

参 考 文 献

- [1] Guo Han-ying, Wu Ke and Wang Shi-kun, Preprint AS-ITP-84-035, (1984).
- [2] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton, (1956).
- [3] R. Jackiw, in Lectures on Current Algebra and Its Applications, Princeton, (1972).
- [4] L. D. Faddeev, Operator Anomaly for Gauss Law, Preprint, (1984).
- [5] W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, **184**(1969), 1848. D. J. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D6**(1972), 477.
- [6] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.*, **37B**(1971), 95. E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B223**(1983), 422.
- [7] S. S. Chern, Complex Manifolds Without Potential Theory, Springer, (1979), 30.
- [8] K. C. Chou, H. Y. Guo, K. Wu and X. C. Song, *Phys. Lett.*, **134B**(1984), 67.
- [9] K. C. Chou, H. Y. Gou, X. Y. Li, K. Wu and X. C. Song, Preprint, AS-ITP-84-018.
- [10] H. Cartan, In Colloque de Topologie (Espaces fibrés) Bruxelles, (1950).

CHERN-SIMONS COCHAIN AND ANOMALY

WANG SHI-KUN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

WU KE

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

HOU BO-YU

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an)

GUO HAN-YING

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

(Institute of Modern Physics, Northwest University)

ABSTRACT

In this paper, we define a coboundary operator acting on the cochain in gauge potential space and establish a formula about Chern-Simons coboundary. The result can be employed to obtain the non-abelian anomaly, the gauge invariant Wess-Zumino effective action and the Schwinger term etc. We show that the present approach covers Faddeev's, Song's, and Zumino's approaches.

大统一对禁闭弱作用规范模型的限制

张新民 薛晓舟

(新乡师范学院物理系)

1984 年 11 月 12 日收到

提 要

本文基于两个条件: $10^{14}\text{GeV} \leq M_u \leq 10^{19}\text{GeV}$, $300\text{GeV} \leq A_{\text{hc}} \leq 1\text{TeV}$, 得到在禁闭弱作用规范模型中 $SU(N)$ 超色规范群满足 $N \leq 3$; 大统一规范群的可能候选者为: $SU(N)$ $N \geq 7$, $SU(N) \times SU(N)$ $N \geq 4$, $SO(14)$ 和 $SO(18)$.

近年来,实验上发现了一些偏离标准模型的实验事实. 例如: 大分支比过程 $Z^0 \rightarrow l^+l^- \gamma^{[1]}$. 为了解释这种现象,一种可能性是认为夸克、轻子以及 $W^\pm$, Z^0 粒子是复合的^[2], 这类模型的基本思想是: (1)夸克和轻子是复合的; (2)弱作用是一种超色作用(束缚亚夸克成夸克和轻子的相互作用)的剩余相互作用, $W^\pm$, $W^3(Z^0)$ 是复合的矢量粒子,低能有效弱作用,其包括 $W^\pm$, $W^3(Z^0)$ 玻色子,夸克和轻子具有整体 $SU(2)$ 不变性; (3)电磁作用破坏 $SU(2)$ 不变性, γ 光子与 W^3 混合形成 Z^0 粒子, $M_{Z^0}^2 = M_{W^3}^2/(1 - \lambda^2)^{[3]}$, 其中 λ 是超色混合强度参数. $\sin^2\theta_w = (e/g)\lambda^{[3]}$, e 是电磁耦合常数, g 是超色剩余作用耦合常数, λ 是超色混合强度参数. 而色胶子耦合到亚夸克、夸克和轻子上不破坏 $SU(2)$ 对称性.

由以上可知, $M_{Z^0}^2$, $\sin^2\theta_w$ 都联系到与超色力性质紧密相关的超色混合强度参数 λ . 然而,我们对超色力性质除了具有禁闭性质的假设外知道的还很少. 本文从大统一的角度来讨论超色力的性质,探讨可能的超色规范群.

另外,为了解决大统一理论中所存在的问题,如: 规范系列问题;代的问题等. 人们试图从更深一层次实行相互作用的统一. 例如: 禁闭弱作用大统一理论^[4]. 然而这种模型存在着统一能标高于 10^{19}GeV 的严重问题. 其原因何在? 禁闭弱作用大统一模型可能的候选者有哪些? 本文也将讨论这些内容.

一个成功的禁闭弱作用大统一模型(不包括引力作用)首先为了与质子寿命实验不矛盾,必须满足 $10^{14}\text{GeV} \leq M_u \leq 10^{19}\text{GeV}$. 其次,由于在禁闭弱作用模型中, $W^\pm$, Z^0 是复合的矢量粒子,要产生 $W^\pm$, Z^0 合理的质量,复合标度 A_{hc} 不能比费密弱作用常数 $G_F^{-1/2} \sim 300\text{GeV}$ 大很多,所以 $300\text{GeV} \leq A_{\text{hc}} \leq 1\text{TeV}$.

设禁闭弱作用大统一群为 G , 破缺方案为 $G \xrightarrow{M_u} SU_{\text{hc}}(n) \times SU_c(3) \times U_{\text{em}}(1)$, 其中 $SU_{\text{hc}}(n)$ 是超色规范群, $SU_c(3)$ 是色规范群, $U_{\text{em}}(1)$ 是电磁作用规范群.

作重整化群分析:

用 α_i 表示 $SU(i)$ 的精细结构常数. 在大统一能标 $c\alpha_{\text{cm}} = \alpha_1 = \alpha_n = \alpha_c = \alpha$, c 是

归一因子。把能标分为如下两个区域:

$$\mu \sim M_u \quad (1/\alpha_i(\mu)) - (1/\alpha_i(M_u)) = (b_i/4\pi) \ln(\mu^2/M_u^2)$$

来自于统一的假设:

$$b_n = 1/3[11n - F], \quad b_c = 1/3[33 - F], \quad b_1 = -F/3,$$

其中 F 是费密子对 b_i 的贡献, b_1 是对应于重新归一了的 $U(1)$ 群.

$$\mu \sim \Lambda_{hc} (1/\alpha_i(\mu)) - (1/\alpha_i(\Lambda_{hc})) = (b_i/4\pi) \ln \mu^2/\Lambda_{hc}^2,$$

$$b_c = 1/3[33 - 4N],$$

$$b_{cm} = -4/3 \sum_i Q_i^2,$$

其中 N 指复合的轻质量费密子的代数, 而 Q_i 是夸克或轻子的电荷算符.

在理论中不引入 Higgs 场, 大统一群的破缺可以通过亚夸克场的玻色凝聚而实现.

由 α_c 及 α_{hc} 的演化得到

$$N = (1/4 \ln(10\Lambda_{hc}))(33 \ln(10M_u) - 11n \ln(M_u/\Lambda_{hc})).$$

在上面计算中, 已选取 $1/\alpha_c(0.1\text{GeV}) = 1$, 在 $1\text{TeV} \geq \Lambda_{hc} \geq 300\text{GeV}$, $10^{19}\text{GeV} \geq M_u \geq 10^{14}\text{GeV}$ 条件下, 要使复合出的代数与现实实验不矛盾, 必须有 $N \geq 3$, 计算表明 $n \leq 3.40 - 3.70$ 取其整数解有 $n \leq 3$.

$SU(3)^{[5]}$, $SU(2)^{[6]}$, $U(1)^{[7]}$ 作为超色群的亚夸克模型都有探讨.

由奇数个自旋为 $1/2$ 的粒子可以束缚成自旋半整数的复合体可知, 超色群是 $SU(3)$.

对于 $SU_{hc}(3)$, 十分有趣的是与强子物理相对比. 在强子物理中, 强子间的强作用是夸克间 $SU_c(3)$ 作用的剩余相互作用; 在亚夸克模型中, 夸克和轻子间的弱作用是亚夸克超色作用的剩余作用, 而这种超色作用也同样用 $SU(3)$ 群描述.

强子间的强作用具有 $SU(2)$ 对称性, 而夸克和轻子间的弱作用也具有 $SU(2)$ 对称性; 强子间的 $SU(2)$ 是非手征性的, 而夸克和轻子间的 $SU(2)$ 是具有手征性的. 但是 QCD 的手征破缺是以 Goldstone 形式实现, 而 QHD 中的手征对称性则一定以 Wigner 方式实现.

现在讨论统一模型. 由于 $\Lambda_{hc} \gg \Lambda_c$ 是实验上所要求的, 对于 $G \xrightarrow{M_u} SU_{hc}(3) \times SU_c(3) \times U_{cm}(2)$ 破缺方案要满足 $\Lambda_{hc} \gg \Lambda_c$, 必须对亚夸克所填表示进行非常细致的选择, 使在第一步破缺时有一部分亚夸克对群 $SU_{hc}(3)$ 是实表示, 不对 b_{hc} 贡献, 但这种选择的可能性往往是很小的.

另一种方法是改换破缺途径. 例如:

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{M_u} SU(n) \times SU_c(3) \times U(1) \\ &\xrightarrow{\Lambda_n} SU_{hc}(3) \times SU_c(3) \times U_{cm}(1), \end{aligned}$$

其中 $SU(n)$ 是属于 G 的任何子群, 只要求 $n > 3$.

由重整化群分析可知,

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_n &= [1 - (1/\alpha_c(\mu)) + ((11n - 33)/6\pi) \ln M_u \\ &\quad - (7/2\pi) \ln \Lambda_{hc}/\mu] 6\pi/(11n - 33). \end{aligned}$$

在上面计算中已取低能复合粒子为三代.

要求

$$\Lambda_{hc} \leq \Lambda_n \leq M_u,$$

$$\text{即 } \ln M_u \geq [1 - 1/\alpha_c(\mu) + ((11n - 33)/6\pi)\ln M_u - (7/2\pi)\ln \Lambda_{hc}/\mu]6\pi/(11n - 33) \\ \geq \ln \Lambda_{hc}.$$

取 $\alpha_c(0.1\text{GeV}) = 1$, 得 $n \geq 3.40 - 3.69$, 取其整数解为 $n \geq 4$, 由此得到最小的 $SU(N)$ 禁闭弱作用大统一模型规范群是 $SU(7)$, 其破缺方案为

$$SU(7) \xrightarrow{\Lambda_7} SU(4) \times SU_c(3) \times U(1) \\ \xrightarrow{\Lambda_4} SU_{hc}(3) \times SU_c(3) \times U_{em}(1),$$

取低能复合粒子为三代, $\alpha_c(0.1\text{GeV}) = 1$ $\Lambda_7: 10^{14} - 10^{19}\text{GeV}$ 得中间破缺标度 Λ_4 为 $10^6 - 10^{12}\text{GeV}$.

如果我们认为禁闭弱作用大统一群是半单群, 即 $G = G_1 \times G_2$, 由前面的讨论可知, 假设限制到 $SU(N) \times SU(N)$, 不难得出最小的大统一群为 $SU(4) \times SU(4)$, 而破缺步骤如下:

$$SU(4) \times SU(4) \rightarrow SU(4) \times SU_c(3) \times U(1) \\ \rightarrow SU_{hc}(3) \times SU_c(3) \times U_{em}(1).$$

如果我们再限制到具有渐近自由的 $SO(4m + 2)$ 群, 则可能的大统一群为 $SO(14)$ 和 $SO(18)$.

对中国科学院高能物理研究所杜东生同志的有益讨论表示衷心的感谢。感谢我院物理系老师鲁公儒、万陵德的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] UA2 Collab. (CERN), P. Bagnaia *et al.*, *Phys. Lett.*, **129B**(1983), 130; UA1 Collab. (CERN), G. Arnison *et al.*, *Phys. Lett.*, **126B**(1983), 398.
- [2] U. Baur, H. Fritzsch and H. Faissner, *Phys. Lett.*, **135B**(1984), 313; R. D. Peccei, *Phys. Lett.*, **136B**(1984), 121.
- [3] P. Chen and J. J. Sakurai, *Phys. Lett.*, **110B**(1982), 481.
- [4] Kuang, Y.-P and S. S.-H. Tye, *Phys. Rev. D* **26**(1982), 1718.
- [5] H. Harari and N. Seiberg, *Phys. Lett.*, **100B**(1981), 41.
- [6] L. F. Abbott and E. Farhi, *Phys. Lett.*, **101B**(1981), 69; *Nucl. Phys. B* **189**(1981), 547.
- [7] J. C. Pati, Institute of Physics at Bhubaneswar (Orissa, India) Preprint, (1980).

CONSTRAINT ON THE GAUGE MODELS OF CONFINING WEAK INTERACTIONS FROM THE GRAND UNIFICATION

ZHANG XIN-MIN XIU XIAO-ZHOU

(Department of Physics, Xinxiang Teather's College)

ABSTRACT

In this paper, under the conditions: 10^{14} GeV $\leq M_* \leq 10^{19}$ GeV, 300 GeV $\leq \Lambda_{hc} \leq 1$ TeV, we show that, in the models of confining weak interaction, the hypercolor gauge groups $SU(N)$ satisfy $N \leq 3$, and grand unification gauge groups are possibly $SU(N)$ $N \geq 7$, $SU(N) \times SU(N)$ $N \geq 4$, $SO(14)$ and $SO(18)$.