

耗散三波相互作用定态的 Hopf 分岔

贺 凯 芬

(北京师范大学低能核物理研究所)

1986年11月25日收到

提 要

本文讨论了耗散的三波相互作用的一个模型。用本征值分析证明了当相空间体积收缩得足够慢时,三波相互作用的定态将出现 Hopf 分岔。从本征值得到的定态失稳的临界值和振荡频率,与解运动方程的数字实验在线性阶段符合得很好。分析结果还表明,将不会发生 pitchfork 分岔。

三波相互作用是等离子体中非线性模-模耦合最基本的过程^[1]。在存在驱动源时,例如讨论线性不稳定模式的非线性演化,一般需要研究有耗散的三波相互作用,即假设三波中有一个模式是线性增长的驱动波,另外两个是线性阻尼的。这就是所谓的驱动-阻尼(driven-damped)的三波相互作用。由于三波非线性相互作用可能在等离子体湍流中起重要作用,在最近几年研究动力论系统的混沌运动的理论时,又重新引起人们的关注。有一些工作研究了不同模型下的驱动-阻尼三波过程^[2,3]。数字实验表明,在参量空间的某些区域,的确存在着混沌运动。这些数字结果是很有意义的。它提示我们,极为复杂的等离子体湍性运动随机性的起因,有可能从最简单的三波相互作用中找到某种解释(其它的随机性起因还有,如非线性的波与粒子相互作用等)。此外,还有一些结果也值得注意,如在一些简单的三波相互作用模型中,当驱动波的增长率增加时,观察到相互作用的定态出现不稳定性振荡,其包络指数上升。对于这些数字实验的结果,目前还缺乏充分的解析分析,如定性地讨论它们的分岔行为等,这限制了我们对数字结果的深刻认识。另一方面,一些研究分岔行为的工作,又很少涉及高维非线性方程组的实例。而我们知道,湍流问题,无论是普通流体湍流,还是等离子体湍流,正是与高维的非线性相互作用相联系的。由于这些原因,三波相互作用的分岔行为,引起我们的兴趣。在本文中,我们试图就一个典型的三波相互作用模型,讨论其定态的分岔。首先,作为比较,我们简单讨论当波的线性增长率为零时,相应的一个哈密顿系统的不动点的性质,指出在不动点有纯虚的本征值。然后,在有驱动-阻尼扰动时,我们用本征值方法证明,相互作用的定态,随着驱动波增长率加大而出现的失稳,是 Hopf 分岔的结果,即线性化方程的复本征值的实部在波增长率的某一临界值处跨过虚轴。最后,将本征值方法得到的结果,与直接解轨道方程所得的结果作了比较。

本文仍以漂移波三波相互作用模型为研究对象。这个模型在数学上有较好的对称性,较之文献[2]的模型,物理意义也更明确。在一定的近似下已导出^[3],涨落电场模式

$\phi_j(t) = a_j(t)e^{ia_j(t)}$ 的振幅 $\{a_j\}$ ($j = 1, 2, 3$ 表示三个模式) 及相位之和 $\alpha \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 满足方程

$$\dot{a}_j = \gamma_j a_j - (F_j \cos \alpha - G_j \sin \alpha) a_k a_l, \quad (1)$$

$$\dot{\alpha} = \Delta\omega + \sum_{(j,k,l)} (F_j \sin \alpha + G_j \cos \alpha) \frac{a_k a_l}{a_j}. \quad (2)$$

这里 $\{j, k, l\}$ 是 $\{1, 2, 3\}$ 的轮换, $\Delta\omega$ 是线性频率失谐. 我们感兴趣的情形, 只有一个驱动波, 可设三波的线性增长率 $\gamma_1 > 0, \gamma_2 < 0, \gamma_3 < 0$, 并且要求 $\gamma \equiv \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 < 0$, 后一条件保证了流在相空间中的体积收缩, 因为

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{a_j} \frac{\partial}{\partial a_j} \left(a_j \frac{da_j}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = 2\gamma.$$

本文的讨论要从定态出发, 故取 $\{F_j\}, \{G_j\}$ 的符号满足定态存在的条件(见(9)式), 在漂移三波模型中更严格的关系 $\sum_{j=1}^3 F_j = \sum_{j=1}^3 G_j = 0$, 在本文中不是必需的.

我们把 $\{\gamma_j\}$ 作为主要的控制参数, 分两种情形讨论.

1. $\{\gamma_j\} = \{G_j\} = 0$ 的情形 这时, 方程(1)和(2)是可积的, 它与一个哈密顿系统相对应. 在 $\{\gamma_j\} = \{G_j\} = 0$ 时, 方程(1)和(2)的不动点(以附标 f 表示)满足

$$\alpha^f = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

$$\sum_{(j,k,l)} F_j \frac{a_k a_l}{a_j} \Big|_f = \mp \Delta\omega. \quad (4)$$

这时, 三波之间能量交换达到平衡, 因此振幅不随时间变化. 由于三个定态振幅 a_1^f, a_2^f, a_3^f 只有一个约束条件, 所以在相空间 (a_1, a_2, a_3, α) 中 $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ 的截面上有无穷多个不动点.

如果我们求方程(1)和(2)在 $\{\gamma_j\} = \{G_j\} = 0$ 时的线性化本征方程, 会发现它的本征值是纯虚的(推导过程类似于后面第2节中(1), 这里不再重复, 可参考(16), (21)式), 这说明在不动点处存在一个固有频率. 那么一个自然产生的问题是, 如果有耗散扰动, 例如 $\{\gamma_j\} \neq 0$, 这种固有频率还存在吗? 它在扰动下是稳定的还是不稳定的? 如果这种固有频率在某种扰动下出现失稳, 则势必会产生 Hopf 分岔(例如参阅文献[4]). 这将是感兴趣的.

2. $\{\gamma_j\} \neq 0$ 时, 定态的 Hopf 分岔 受到上面哈密顿系统中不动点的性质的启发, 我们进一步研究 $\{\gamma_j\} \neq 0$ 的有耗散的情形. 当然, 二者情况大不相同. 二者的不动点位置就不一样, 为了区别, 我们称有耗散时的为定态 ($d/dt = 0$, 用附标 s 表示). 先讨论 $\{G_j\} = 0$ 的情形, 寻找方程(1)和(2)的定态, 证明在定态处的线性化本征方程有复共轭本征值, 当控制参数发生变化时, 它的实部由负值变为正值. 然后我们再进一步讨论 $\{G_j\} \neq 0$ 的情形.

(1) $\{\gamma_j\} \neq 0, \{G_j\} = 0$. 这时, (1)和(2)式的定态满足条件

$$\cos \alpha^s = \frac{\gamma_1 a_1^s}{F_1 a_2^s a_3^s} = \frac{\gamma_2 a_2^s}{F_2 a_3^s a_1^s} = \frac{\gamma_3 a_3^s}{F_3 a_1^s a_2^s}, \quad (5)$$

$$\sin \alpha^s \left[F_1 \frac{a_2^s a_3^s}{a_1^s} + F_2 \frac{a_3^s a_1^s}{a_2^s} + F_3 \frac{a_1^s a_2^s}{a_3^s} \right] = -\Delta\omega. \quad (6)$$

由此解出定态振幅与相角分别为

$$a_i^s = \sqrt{\frac{\gamma_k \gamma_l}{F_k F_l} \left[1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\gamma} \right)^2 \right]}, \quad (7)$$

$$\alpha^s = \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{\Delta\omega}{\gamma} \right). \quad (8)$$

与前面哈密顿系统比较, 我们看到, 主要不同点在于, 因为对振幅 $\{a_i^s\}$ 的约束条件增加了, 当参数给定时, 我们只能有一组定态解, 而不是前面哈密顿系统的无穷多组. 由 (5) 式还可以得出, 定态存在的条件为

$$\operatorname{sign}(\gamma_1 F_1) = \operatorname{sign}(\gamma_2 F_2) = \operatorname{sign}(\gamma_3 F_3). \quad (9)$$

上式中, 如果把 $\{F_j\}$ 换作 $\{G_j\}$, 则得到 $\{F_j\} = 0$ 和 $\{G_j\} \neq 0$ 时定态存在的条件.

三波相互作用的定态, 有的是稳定的, 如一些计算机模拟所表明的那样. 这时, 三波间仍存在着能量交换, 只是能量交换达到了平衡. 现在我们分析, 在什么条件下定态会出现失稳. 为此, 我们将 (1) 和 (2) 式线性化, 求在定态时的本征方程, 得到

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 - \lambda & -\frac{\gamma_1 a_1}{a_2} & -\frac{\gamma_1 a_1}{a_3} & q_1 \\ -\frac{\gamma_2 a_2}{a_1} & \gamma_2 - \lambda & -\frac{\gamma_2 a_2}{a_3} & q_2 \\ -\frac{\gamma_3 a_3}{a_1} & -\frac{\gamma_3 a_3}{a_2} & \gamma_3 - \lambda & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

式中

$$p_i \equiv \left[-\frac{F_i a_k a_l}{a_j^2} + \frac{F_k a_l}{a_k} + \frac{F_l a_k}{a_l} \right] \sin \alpha|_s, \quad (11)$$

$$q_j \equiv F_j a_k a_l \sin \alpha|_s. \quad (12)$$

假设 $|\gamma_j| \ll |F_j|$ 和 $|\Delta\omega|$, 我们可以把 (10) 式等号左端展开到 $\{\gamma_j\}$ 的一级. 在展开中注意, 定态解 (5) 和 (6) 式也是 $\{\gamma_j\}$ 的函数, 幸而在矩阵中出现的 $\{a_i^s\}$ 在分子分母上总是幂次相同, 而且在 $\{\gamma_j\}$ 很小时, $\sin \alpha^s = 1 + O(\gamma^2)$. 这样, 我们可以在展开中把 $\{\alpha_i^s\}$, $\sin \alpha^s$ 当作零级量, 简化了计算. 在展开到 $\{\gamma_j\}$ 的一级后, (10) 式化为

$$\lambda \left\{ \lambda^3 - 2\gamma\lambda^2 - \sum_{i=1}^3 p_i q_i \lambda + \sum_{(i,k,l)} \gamma_i \left[p_k q_k + p_l q_l + p_i a_i \left(\frac{q_k}{a_k} + \frac{q_l}{a_l} \right) \right] \right\} = 0. \quad (13)$$

由 (13) 式得到 λ 的一个解为 $\lambda_1 = 0$, 在余下的三次方程中, 令 $\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}$, 在零级上有

$$\lambda^{(0)3} - \sum_{i=1}^3 p_i q_i \lambda^{(0)} = 0. \quad (14)$$

解得

$$\lambda_2^{(0)} = 0 \quad (15)$$

和

$$\lambda_{3,4}^{(0)} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^3 p_i q_i}, \quad (16)$$

以 (11) 和 (12) 式代入, 得

$$R = \sum_{j=1}^3 p_j q_j = \sum_{(j,k,l)} \left\{ -\frac{F_j^2 a_k^2 a_l^2}{a_j^2} + F_j F_k a_l^2 + F_j F_l a_k^2 \right\} \sin^2 \alpha, \quad (17)$$

$$= \left\{ -\frac{F_1^2 a_2^2 a_3^2}{a_1^2} - \left(\frac{F_2 a_3}{a_2} - \frac{F_3 a_2}{a_3} \right)^2 a_1^2 + 2F_1 F_2 a_3^2 + 2F_1 F_3 a_2^2 \right\} \sin^2 \alpha. \quad (18)$$

用定态解 (7) 和 (8) 式代入上式, 求得

$$R = (\Delta\omega)^2 \left\{ 1 - \frac{2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)}{\gamma^2} \right\}. \quad (19)$$

前已说明, 只有一个驱动波, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2, \gamma_3 < 0$, 利用这些符号容易说明

$$\gamma^2 - 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = -\gamma_1^2 + 2\gamma_1(\gamma_2 + \gamma_3) - (\gamma_2 - \gamma_3)^2 < 0. \quad (20)$$

因此

$$\lambda_{3,4}^{(0)} = \pm iQ, \quad (21)$$

$$Q = \sqrt{\left| \sum_{j=1}^3 p_j q_j \right|} = |\Delta\omega| \sqrt{\frac{2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)}{\gamma^2} - 1} \text{ 是实数.}$$

也可以利用定态存在条件 (9) 式, 得到 F_1 与 F_2, F_3 反号, 直接从 (18) 式证明 R 是负定的. 在第 1 节

$$\{\gamma_j\} = \{G_j\} = 0$$

的情形下, 本征方程与这里的零级方程 (14) 相同, 只是相应的系数要用无耗散时不动点的解 (3) 和 (4) 式来替代. 因为 $\{\gamma_j\} = 0$, 可直接利用 (18) 式, 再根据 $\{F_j\}$ 的符号规定, 证明在哈密顿条件下本征值是纯虚数. 这一点我们在第 1 节中已经提到了.

让我们回到有耗散的情形. 在一级上, 我们得到方程

$$\left(3\lambda^{(0)2} - \sum_{j=1}^3 p_j q_j \right) \lambda^{(1)} - 2\gamma \lambda^{(0)2} + 4 \sum_{(j,k,l)} \gamma_j F_k F_l a_j^2 \sin^2 \alpha = 0, \quad (22)$$

对应于 $\lambda_2^{(0)}$, 有解

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{4 \sum_{(j,k,l)} \gamma_j F_k F_l a_j^2 \sin^2 \alpha}{\sum_{j=1}^3 p_j q_j} \bigg|_s = -\frac{12\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) - \gamma^2}. \quad (23)$$

显然, 根据 $\{\gamma_j\}$ 的符号, $\lambda_2^{(1)}$ 是负定的. 这样, $\lambda_2 = \lambda_2^{(0)} + \lambda_2^{(1)} = \lambda_2^{(1)}$ 是负的实本征值, 不会引起 pitchfork 分岔.

对应于 $\lambda_{3,4}^{(0)} = \pm iQ$, 求得

$$\lambda_{3,4}^{(1)} = \gamma - \frac{2 \sum_{(j,k,l)} \gamma_j F_k F_l a_j^2 \sin^2 \alpha}{\sum_{j=1}^3 p_j q_j} \bigg|_s = \gamma + \frac{6\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) - \gamma^2}, \quad (24)$$

式中等号右端第一项 $\gamma \leq 0$, 而第二项是正定的. 所以, 在 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ 从负的方向趋近于零的过程中, $\lambda_{3,4}^{(1)}$ 必然在某组 $\{\gamma_j\}$ 值处由负变为正.

这样, 我们就求得了一对共轭复本征值

$$\lambda_{3,4} = \lambda_{3,4}^{(1)} \pm iQ, \quad (25)$$

它的实部随着 $|\gamma|$ 减小, 将跨过虚轴, 由负变为正. 这表明耗散三波相互作用, 当其相空

间体积收缩得足够慢时,将会出现 Hopf 分岔. 原来稳定的频率将变得不再稳定. 失稳的频率 $\Omega(\{\gamma_j\})$ 正比于三波的线性频率失谐 $\Delta\omega$, 并且随着 $\gamma \rightarrow -0$ 而迅速增大至无穷.

(2) $\{\gamma_j\}, \{G_j\}$ 都不等于零. 这时, 从方程 (1) 和 (2), 得到定态相角 α' 满足的方程为

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_j \left(\frac{F_j \sin \alpha' + G_j \cos \alpha'}{F_j \cos \alpha' - G_j \sin \alpha'} \right) = -\Delta\omega. \quad (26)$$

α' 可以用常规方法在计算机上解出. 定态振幅用 α' 表示为

$$a_i^2 = [\gamma_k \gamma_l / (F_k \cos \alpha' - G_k \sin \alpha')(F_l \cos \alpha' - G_l \sin \alpha')]^{1/2}. \quad (27)$$

本征方程仍取 (10) 式的形式, 只是 p_j, q_j 的表达式化为 (我们加一撇, 以区别于 $\{G_j\} = 0$ 的情形)

$$\begin{aligned} p_i' \equiv & -(F_j \sin \alpha + G_j \cos \alpha) \frac{a_k a_l}{a_i^2} + (F_k \sin \alpha + G_k \cos \alpha) \frac{a_l}{a_k} \\ & + (F_l \sin \alpha + G_l \cos \alpha) \frac{a_k}{a_l} \Big|_s, \end{aligned} \quad (28)$$

$$q_i' \equiv (F_j \sin \alpha + G_j \cos \alpha) a_k a_l \Big|_s. \quad (29)$$

这样

$$\begin{aligned} R' \equiv \sum_{j=1}^3 p_j' q_j' = & -(F_1 \sin \alpha + G_1 \cos \alpha)^2 \frac{a_2^2 a_3^2}{a_1^2} \\ & - \left[(F_2 \sin \alpha + G_2 \cos \alpha) \frac{a_3 a_1}{a_2} - (F_3 \sin \alpha + G_3 \cos \alpha) \frac{a_1 a_2}{a_3} \right]^2 \\ & + 2(F_1 \sin \alpha + G_1 \cos \alpha)(F_2 \sin \alpha + G_2 \cos \alpha) a_3^2 \\ & + 2(F_1 \sin \alpha + G_1 \cos \alpha)(F_3 \sin \alpha + G_3 \cos \alpha) a_2^2. \end{aligned} \quad (30)$$

上式等号右端前两项是负定的, 现在看后两项的符号. 从定态方程 (26), 在 $\left\{ \left| \frac{G_i}{F_i} \right| \right\} \ll \left| \frac{\gamma}{\Delta\omega} \right|$

和 $\left\{ \left| \frac{\gamma}{\gamma_j} \right| \right\}$ 近似下, 导出

$$\operatorname{ctg} \alpha' \approx -\frac{\gamma}{\Delta\omega} + O\left(\left\{ \frac{G_i}{F_i} \right\}\right), \quad (31)$$

因此, 只要 $|\Delta\omega| \geq |\gamma|$, 就有 $|\operatorname{ctg} \alpha'| \leq 1$. 在 (30) 式的最后两项中就有

$$|F_j \sin \alpha'| \gg |G_j \cos \alpha'|, \quad (j = 1, 2, 3),$$

这两项的符号将由 $F_1 F_2 \sin^2 \alpha'$ 和 $F_1 F_3 \sin^2 \alpha'$ 决定, 根据定态存在条件 (9) 式, F_1 与 F_2, F_3 反号. 这样, 我们就在近似条件下证明了, (30) 式最后两项也是负定的. 从而 R' 也是负定的. 条件 $\{|G_j|\} \ll \{|F_j|\}$ 在物理上是合理的, 因为 $\{G_j\}$ 来自电子密度涨落的耗散部分, 只要 γ 不十分接近于零, 上面的假设不难实现. 实际上, 在相反的极限下,

$$|G_j| \gg |F_j|,$$

我们同样地可以证明 (30) 式最后两项中 $|G_j \cos \alpha'| \gg |F_j \sin \alpha'|$, 该项仍是负定的.

(13) 式中最后一项现在化为

$$S' \equiv \sum_{(i,k,l)} 4\gamma_j (F_k \sin \alpha + G_k \cos \alpha)(F_l \sin \alpha + G_l \cos \alpha) a_i^2 \Big|_s. \quad (32)$$

用类似的讨论可证明,在 $\{|F_j|\} \gg \{|G_j|\}$ 和 $|\Delta\omega| \geq |\tau|$ 的条件下, S' 是正定的.

这样,在 $\{G_j\} \approx 0$ 时,采用第2节中(1)同样的近似解法,求得 $\lambda'_1 = 0$ 和另外三个非零本征值为

$$\lambda'_2 = S'/R', \quad (33)$$

这是一个负定的实本征值,和

$$\lambda'_{3,4} = \tau - \frac{S'}{R'} \pm i\sqrt{R'}, \quad (34)$$

它是复共轭的本征值,并且在 $\tau \rightarrow -0$ 的过程中,它的实部

$$\text{Re } \lambda'_{3,4} = \tau - \frac{S'}{R'}$$

必在某组 $\{\tau_i\}$ 处由负变为正. 当 τ_2, τ_3 固定时, Hopf 分岔的临界值 τ_1^c 可以从

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \frac{S'(\tau_1, \tau_2, \tau_3)}{R'(\tau_1, \tau_2, \tau_3)} = 0 \quad (35)$$

解出,失稳的频率由

$$\omega' = \sqrt{R'} \quad (36)$$

决定.

在图 1(a), (b) 上,我们画出了方程(13)的计算机解作为 τ 的函数,固定 $\tau_2 = -0.25$, $\tau_3 = -0.02$, $\{F_j\} = \{0.06, -0.056, -0.004\}$, 在图 1(a) 中,取 $\{G_j\} = 0$, 在图 1(b) 中,取 $\{G_j\} = \{-0.0225, 0.02, 0.0025\}$. 虚线给出的是实本征值 λ_2 , 在两种情形下都是负的. 实线是复共轭本征值的实部 $\text{Re } \lambda_{3,4}$. 我们看到,当 τ_1 增加时(即 τ 由负方向逼近于零),在两种情形下, $\text{Re } \lambda_{3,4}$ 都是从负值几乎线性地增加,变为正值. 在 $\{G_j\} \approx 0$ 时, $\text{Re } \lambda_{3,4}$ 变号的临界值 τ_c 更靠近 -0 , 表明它比较地不容易发生 Hopf 分岔. 点划线是虚部的绝对值 $|\text{Im } \lambda_{3,4}|$, 在 $\{G_j\} = 0$ 时,随着 $\tau \rightarrow -0$, $|\text{Im } \lambda_{3,4}| \rightarrow \infty$. 这从(21)式就可以看出来,这表明 Hopf 分岔后振荡的频率(线性近似值),随 $\tau \rightarrow -0$ 迅速增至无穷. 而如果 $\{G_j\} \approx 0$, 在 $\tau = 0$ 时, $|\text{Im } \lambda_{3,4}|$ 还保持有限(~ 3). 所以非零 $\{G_j\}$ 的引入(在漂移波物理中,这相当于考虑了电子密度涨落对流的耗散部分)有效地抑制了高频振荡的出现(至少在线性阶段是如此). 我们还计算了 $\{|G_j|\} \gg \{|F_j|\}$ 的例子,所得的结果定性地与上面完全一致.

上述结果与直接解运动方程(1)和(2)的时间演化作了比较,所用参数与本征值分析时的相同. 固定 τ_2, τ_3 不变,改变 τ_1 , 在 τ_1 一定的范围内,定态是稳定的,继续增加时,定态失稳,出现了振荡(参见图 2). 在 $\{G_j\} = 0$ 时,直接解运动方程得到的定态失稳的临界值 $\tau_1^c \approx 0.238$ (对应于 $\tau^c \approx -0.032$), 而本征值分析得到的

$$\tau_1^c \approx 0.24 (\tau^c \approx -0.030).$$

在对应于图 1(b) $\{G_j\} \approx 0$ 的情形时,这两个值分别为 ~ 0.245 ($\tau^c \approx -0.025$) 和

$$\sim 0.248 (\tau^c \approx -0.022).$$

两种情形下符合得都很好. 更具有说服力的是将定态失稳后的振荡频率与复本征值的虚部 $|\text{Im } \lambda_{3,4}|$ 作比较. 由于方程(1)和(2)是非线性的,定态失稳后,随着振荡幅度的加大,频率也会随之改变,从数字计算看它不断增加. 因此,为了与线性本征值分析的结果

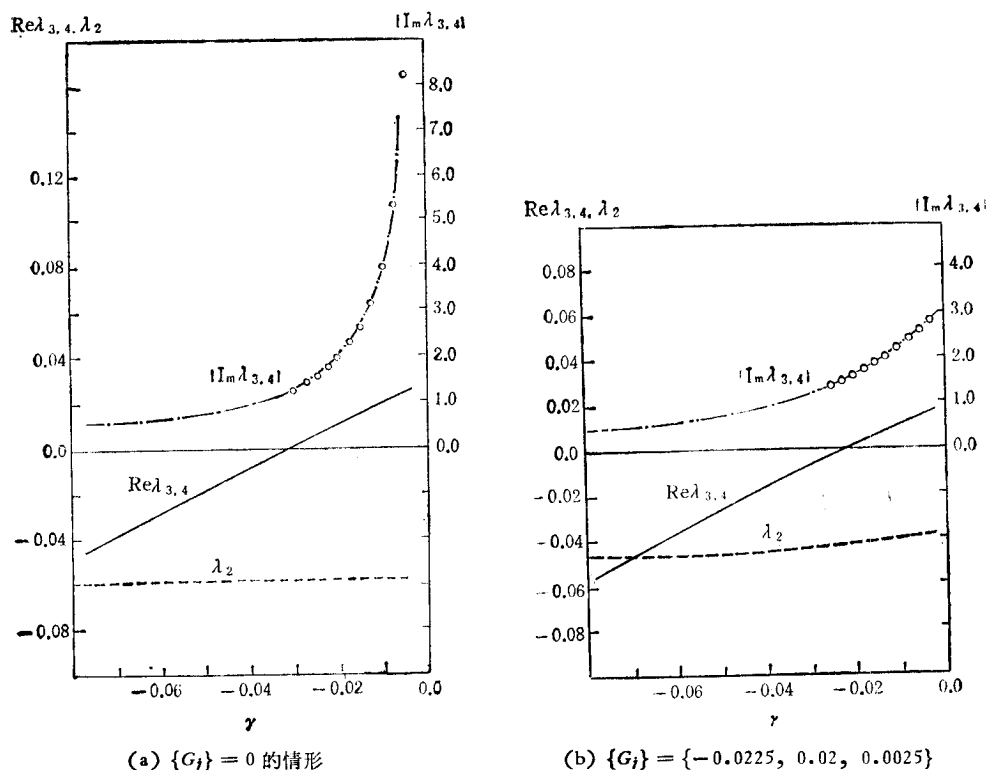


图 1 实本征值 λ_2 (虚线), 共轭复本征值的实部 $\text{Re } \lambda_{3,4}$ (实线) 和虚部的绝对值 $|\text{Im } \lambda_{3,4}|$ (点划线) 作为空间体积的变化率 γ 的函数。注意: 当 γ 从负增加到零的过程中, $\text{Re } \lambda_{3,4}$ 变号; 图上的小圆圈是从直接解运动方程 (1) 和 (2) 得到的定态失稳时振荡频率的平均值 $\bar{\omega}(\gamma)$, 与本征值的虚部符合得很好

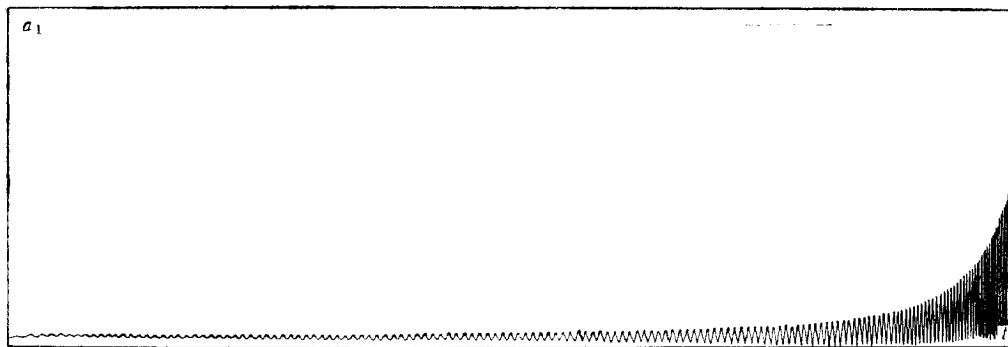


图 2 定态失稳时, 振幅 a_1 随时间 t 的演化

比较, 我们必须在定态附近分析, 以保持线性近似的合理性。为此, 我们在计算轨道时, 从定态解 (7) 和 (8) 式或 (26) 和 (27) 式出发, 加微扰, 测量失稳的最初几个 (~ 5) 周期, 这时线性近似还可以应用。从它计算出线性近似下平均振荡频率 $\bar{\omega} = 2\pi/\bar{T}$, 对应于不同的 γ 值, 可以有不同的 $\bar{\omega}(\gamma)$, 其结果在图 1(a), (b) 上用小圆圈标出。我们看到, 它们和复本征值的虚部 $|\text{Im } \lambda_{3,4}(\gamma)|$ 曲线符合得非常好。(在图 1(b) 上有个别小圆圈出现在失稳的临界点之前, 这是因为, 初始受到扰动的稳定的定态, 在趋向定态的过程中亦有振

荡,其振幅不断衰减,我们依然可以测出 $\bar{Q}$). 这样我们可以确信, γ_1 增加引起定态失稳出现的振荡,的确是本文讨论的 Hopf 分岔的结果. 本文开始提到的其它模型,如文献 [2], 是本文的一个特例,在数字实验中观察到的定态随驱动波增长率加大而出现的无界振荡,同样地也可以得到解释. 在较复杂的模型中,如我们曾研究的漂移三波相互作用与离子声波耦合的模型,如果耦合常数不为零,当相空间收缩率 $|\gamma| \rightarrow 0$ 时,代替耦合常数为零时包络指数上升的振荡,我们观察到有界的混沌运动^[5,6]. 本文讨论的 Hopf 分岔的机制,很有可能在这种模型中仍起重要作用. 为了弄清这一点,需要作进一步的研究.

感谢黄祖洽教授的关心和指导.

参 考 文 献

- [1] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, *Nonlinear Plasma Theory*, revised and ed. by T. M. O'Neil and D. L. Book, Benjamin, New York, (1969), p. 5.
- [2] J. M. Wersinger, J. M. Finn and E. Ott, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 1142.
- [3] P. W. Terry and C. W. Horton, *Phys. Fluids* **25** (1982), 491.
- [4] H. Haken, *Advanced Synergetics*, (1983), p. 230.
- [5] He Kaifen, D. Biskamp, *Phys. Letters*, **108A** (1985), 347.
- [6] D. Biskamp, He Kaifen, *Phys. Fluids*, **28** (1985), 2172.

HOPF BIFURCATION FROM STEADY STATE OF DISSIPATIVE THREE-WAVE INTERACTION

HE KAI-FEN

(Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University)

ABSTRACT

With the analysis of eigenvalues, it is found that a Hopf bifurcation would occur from the steady state of a dissipative three-wave interaction, so long as the contraction rate of its volume in phase space is low enough. The critical value of the contraction rate and the frequencies of the oscillation obtained from the eigenvalues are in good agreement with the results of solving the dynamic equations in the linear stage. It is also shown that no pitchfork bifurcation would occur.