

手征 QCD₂ 模型的有效拉氏量和质量生成*

张 耀 中

(西北大学现代物理研究所)

1986年9月22日收到

提 要

利用路径积分方法,研究了(1+1)维带 γ 耦合的规范理论. 通过进行一非阿贝耳手征变量变换和选择更一般的正规化算子,精确解出了费密子行列式,证明了理论中可以存在玻色子的质量生成机制. 除了一质量项外,得到的解也包含有一规范化的 Wess-Zumino-Witten 反常作用量泛函和一些别的非定域项.

近年来,两维场论模型引起了广泛的注意^[1-2]这是因为在两维中计算较简单,且在一些情况下,模型是精确可解的.

在所有两维场论模型中,对 Schwinger 和手征 Schwinger 模型的研究尤为广泛^[6-8],特别是近年来 Jackiw 和 Rajaraman 提出^[9],尽管手征 Schwinger 模型是反常的,它仍产生一自洽的和么正的理论. 他们的论证是建立在如下事实的基础之上: 当我们应用特定的正规化方式来计算量子费密子行列式时,存在有一些不确定性. 这些不确定性导致手征 Schwinger 模型中的矢量玻色子获得质量.

另一方面,在 Hagen^[10] 和 Das^[11] 近来的文章中,通过分析和计算,他们得出了与 Jackiw 和 Rajaraman 不同的结论,即在手征 Schwinger 模型中,没有不确定性,因此无质量生成. 这样理论是不自洽的.

近来,Harada 等人^[12]重新考查了手征 Schwinger 模型. 应用路径积分和流正规化方法,计算了理论的有效拉氏量,证明了 Jackiw 和 Rajaraman 提出的任意性可以出现,因此质量生成机制发生.

然而就作者所知,人们很少试图精确解出两维非阿贝耳反常规范理论. 我们可以提出问题: 是否在非阿贝耳反常理论中有象在手征 Schwinger 模型中类似的性质存在和出现? 本文通过应用文献[13]中发展的技术,精确解出了两维中非阿贝耳反常的理论. 本文的解包含几项,其中包含与正规化相关的质量项和规范化的 Wess-Zumino-Witten 反常项. 事实上,本文是 Jackiw 和 Rajaraman 的思想在非阿贝耳反常理论中的具体实现.

两维欧基里德拉氏量的费密子部分为

* 中国科学院科学基金资助的课题.

$$\mathcal{L}_F = -\bar{\phi} \left(i\partial + A \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \phi = -\bar{\phi}_R i\partial^+ \phi_R - \phi_L \bar{\mathcal{D}}^- \phi_L, \quad (1)$$

这里费密子取作规范群 $SU(N)$ 的基础表示, $A = \gamma_a A_\mu$, $A_\mu = \lambda^a A_\mu^a$, λ^a 是 $SU(N)$ 的生成元, 归一化为 $\text{Tr} \lambda^a \lambda^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$. 厄密算子 $\bar{\mathcal{D}}^-$ 由下式给出:

$$\bar{\mathcal{D}}^- = \gamma_\mu D_\mu^- = i\partial^- + A^- = \gamma_\mu (i\partial_\mu^- + A_\mu^-), \quad (2)$$

其中

$$\partial_\mu^\pm = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} \pm i\varepsilon_{\mu\nu}) \partial_\nu, \quad A_\mu^\pm = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} \pm i\varepsilon_{\mu\nu}) A_\nu.$$

厄密 γ_s 矩阵满足下列关系:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu = i\varepsilon_{\mu\nu} \gamma_5 (\mu, \nu = 0, 1), \quad \gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1.$$

其空泛函为

$$Z[A] = \int D\bar{\phi}_R D\phi_R D\phi_L D\bar{\phi}_L \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{L}_F \right\}. \quad (3)$$

若进行有限的 γ_s 转动

$$\begin{aligned} \phi_L(x) &= U_s \chi_L = e^{\gamma_5 \phi} \chi_L = e^{-\phi} \chi_L = U^{-1} \chi_L, \\ \bar{\phi}_L(x) &= \bar{\chi}_L e^{\gamma_5 \phi} = \bar{\chi}_L e^{\phi} \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $\phi(x)$ 是 $SU(N)$ 的 Lie 代数的元素, 我们暂时让它是任意的, 那么拉氏量(1)式变成

$$\mathcal{L}_F = -\phi_R i\partial^+ \phi_R - \chi_L \bar{\mathcal{D}}^- \chi_L, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}^- &= i\partial^- + \bar{A}^-, \quad \bar{A}^- = \gamma_\mu \bar{A}_\mu^- = A^- + U \bar{\mathcal{D}}^- (U^{-1}), \\ \bar{A}_\mu^- &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu}) \bar{A}_\nu, \quad \bar{A}_\nu = A_\nu + U D_\nu (U^{-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

真空泛函为

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int D\phi_R D\bar{\phi}_R D\phi_L D\bar{\phi}_L \exp \left\{ \int d^4x (\phi_R^\dagger \partial^+ \phi_R + \phi_L \bar{\mathcal{D}}^- \phi_L) \right\} \\ &= \int D\phi_R D\bar{\phi}_R D\chi_L D\bar{\chi}_L J[A] \exp \left\{ \int d^4x (\phi_R^\dagger \partial^+ \phi_R + \chi_L \bar{\mathcal{D}}^- \chi_L) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $J[A]$ 为变换(4)式的 Jacobian.

按照文献[14], 我们将定义左手费密测度 $D\phi_L D\bar{\phi}_L$ 如下:

$$D\bar{\phi}_L D\phi_L = \prod_{n,m} d\bar{b}_n da_m, \quad (8a)$$

这里

$$\phi_L(x) = \sum_{\lambda_n > 0} a_n \phi_n^L(x), \quad \bar{\phi}_L(x) = \sum_{\lambda_n > 0} \bar{b}_n \phi_n^R(x)^\dagger. \quad (8b)$$

$\phi_n^L(x)$ 和 $\phi_n^R(x)$ 是“手征”正交集合

$$\phi_n^L(x) = \begin{cases} \frac{1-\gamma_5}{\sqrt{2}} \phi_n(x) & \lambda_n > 0 \\ \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_n(x) \lambda_n & = 0, \end{cases} \quad \phi_n^R(x) = \begin{cases} \frac{1+\gamma_5}{\sqrt{2}} \phi_n(x) & \lambda_n > 0 \\ \frac{1+\gamma_5}{2} \phi_n(x) \lambda_n & = 0, \end{cases} \quad (8c)$$

而 $\{\phi_n(x)\}$ 是某一“正规化算子” $\hat{\mathcal{D}}$ 的本征函数集合

$$\hat{\mathcal{D}}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x), \quad \langle\phi_n(x)|\phi_m(x)\rangle = \delta_{nm}. \quad (9)$$

关键问题是我们选择怎样的 $\hat{\mathcal{D}}$? 一般我们把 $\hat{\mathcal{D}}$ 选作为包含在 $\mathcal{L}_F$ 中的算子 $\hat{\mathcal{D}}^-$, 这要求量子费密子行列式只包含 A^- . 然而, 若应用反常的规范理论所允许的正规化自由度, 那么可以把量子费密子行列式看作 A^- 以及 A^+ 的泛函. 这样允许选择如下 $\hat{\mathcal{D}}$ 的更一般的形式^[12]

$$\hat{\mathcal{D}} = i\hat{\mathcal{D}}^- + bA^- + i\hat{\mathcal{D}}^+ + aA^+ = i\hat{\mathcal{D}} + aA^+ + bA^- \equiv i\hat{\mathcal{D}} + \hat{A}, \quad (10)$$

其中 a 和 b 是任意的正规化参数.

在方程(4)中定义的新场 $\chi_L(x)$ 和 $\bar{\chi}_L(x)$ 也可根据 $\phi_n^L(x)$ 和 $\phi_n^R(x)$ 展开为

$$\chi_L(x) = \sum_{\lambda_n \geq 0} a'_n \phi_n^L(x), \quad \bar{\chi}_L(x) = \sum_{\lambda_n \geq 0} \bar{b}'_n \phi_n^R(x)^\dagger. \quad (11a)$$

其中

$$\begin{aligned} a'_m &= \sum_{\lambda_n \geq 0} \langle \phi_m^L(x) | U | \phi_n^L(x) \rangle a_n \\ \bar{b}'_m &= \sum_{\lambda_n \geq 0} \langle \phi_m^R(x) | U^{-1} | \phi_n^R(x) \rangle \bar{b}_n. \end{aligned} \quad (11b)$$

因此从变换(4)式出现的 Jacobian 因子为

$$D\bar{\phi}_L D\phi_L = J[A] D\bar{\chi}_L D\chi_L = \det C_{m,n} D\bar{\chi}_L D\chi_L, \quad (12a)$$

其中

$$\begin{aligned} \det C_{m,n} &= \{\det \langle \phi_m^L(x) | U | \phi_n^L(x) \rangle_{\lambda_n \geq 0}\} \{\det \langle \phi_m^R(x) | U^{-1} | \phi_n^R(x) \rangle_{\lambda_n \geq 0}\} \\ &= \det \langle \phi_m(x) | U^{-1} | \phi_n(x) \rangle_{\text{所有的 } \lambda_n}. \end{aligned} \quad (12b)$$

为了计算上式中的行列式, 我们考虑单参数相关的 τ , 转动

$$\begin{aligned} \phi_L(x) &= U_\tau(x) \chi_L = e^{\tau \phi(x)} \chi_L = e^{-\phi(x)\tau} \chi_L = U^{-1}(\tau) \chi_L, \\ \phi_L(x) &= \bar{\chi}_L e^{\tau \phi(x)} = \bar{\chi}_L e^{\phi(x)\tau}, \end{aligned} \quad (13)$$

这里 $\tau \in [0, 1]$ 是一实的参数, 它允许从叠加无穷小的变换得到有限变换(4)式. 然而, (10) 式中的“正规化算子” $\hat{\mathcal{D}}$ 在我们由叠加无穷小变换得到整个变换(4)式的每一步均是变的. 那么为在变换的每一步均能按 Fujikawa 的方法, 我们必须取对应于那一步的“正规化算子”的本征矢量.

根据在(13)式中定义的新场, 拉氏量(1)式为

$$\mathcal{L}_F = -\phi_R i \hat{\mathcal{D}}^+ \phi_R - \bar{\chi}_L \hat{\mathcal{D}}^-(\tau) \chi_L, \quad (14a)$$

其中厄密算子 $\hat{\mathcal{D}}^-(\tau)$ 由下式给出:

$$\hat{\mathcal{D}}^-(\tau) = i\hat{\mathcal{D}}^- + A^-(\tau). \quad (14b)$$

而 $A^-(\tau)$ 为

$$\begin{aligned} A^-(\tau) &= A^- + U(\tau) \hat{\mathcal{D}}^-(U^{-1}(\tau)) \equiv \gamma_\mu A_\mu^-(\tau), \\ A_\mu^-(\tau) &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu}) A_\nu(\tau), \quad A_\nu(\tau) = A_\nu + U(\tau) D_\nu(U^{-1}(\tau)). \end{aligned} \quad (14c)$$

正如前面所说的, 我们将考虑对应于下面的正规化算子 $\hat{\mathcal{D}}(\tau)$ 的本征矢量 $\hat{\phi}(x; \tau)$:

$$\hat{\mathcal{D}}(\tau) \hat{\phi}_n(x; \tau) = \lambda_n(\tau) \hat{\phi}_n(x; \tau), \quad \langle \hat{\phi}_n(\tau) | \hat{\phi}_m(\tau) \rangle = \delta_{nm}, \quad (15)$$

其中

$$\hat{\phi}(t) = i\partial^- + bA^- + i\partial^+ + aA^+ = i\partial + aA^+ + bA^- \equiv i\partial + \hat{A}(t). \quad (16)$$

正如文献[13]中所论证的,在方程(12)中出现的 Jacobian 因子为

$$J[A] = \det C_{m,n} = \exp \left\{ - \int_0^1 w(t) dt \right\} \equiv \exp(-W), \quad (17a)$$

$$\text{其中} \quad w(t) = \sum_n \langle \hat{\phi}_n(t) | \gamma_s \phi | \hat{\phi}_n(t) \rangle. \quad (17b)$$

为了计算指数 W , 我们把 $w(t)$ 写作为

$$w(t) = \int d^2x \text{Tr}^c(\phi(x) \omega(x; t)) \quad (18a)$$

$$\text{其中} \quad \omega(x; t)^{ba} = \sum_n \hat{\phi}_n^{+a}(x; t) \gamma_s \hat{\phi}_n^b(x; t). \quad (18b)$$

上式中的求和是没有意义的,我们用(16)式中定义的算子 $\hat{\phi}(t)$ 来正规化它

$$\omega(x; t)^{ba} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \hat{\phi}_n^{+a}(x; t) \gamma_s (e^{-\hat{\phi}(t)2/M^2})^{bc} \hat{\phi}_n^b(x; t). \quad (19)$$

应用众所周知的方法可以得到

$$w(t) = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \text{Tr}^c(\phi(x) \hat{F}_{\mu\nu}(x; t)), \quad (20a)$$

其中

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x; t) = \partial_\mu \hat{A}_\nu(t) - \partial_\nu \hat{A}_\mu(t) - i[\hat{A}_\mu(t), \hat{A}_\nu(t)]. \quad (20b)$$

这样出现在(17)式中的 Jacobian 因子中的指数 W 为

$$W = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \varepsilon_{\mu\nu} \text{Tr}^c \{ \phi \partial_\mu \hat{A}_\nu(t) - i \phi \hat{A}_\mu(t) \hat{A}_\nu(t) \}. \quad (21)$$

在二维中,我们总可以把矢量场 A_μ 写作

$$A = -e^{i\xi} i\partial(e^{\gamma, \eta}) e^{-\gamma, \eta} e^{i\xi} + e^{-i\xi} i\partial e^{i\xi}, \quad (22a)$$

其中场 ξ 和 η 在 $SU(N)$ 的李代数中取值.直接计算得到

$$A_\mu = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu}) e^{-i\xi} e^{-\eta} i\partial_\nu(e^\eta) e^{i\xi} + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu\nu}) \cdot e^{-i\xi} e^\eta i\partial_\nu(e^{-\eta}) e^{i\xi} + e^{-i\xi} i\partial_\mu e^{i\xi}. \quad (22b)$$

因此得

$$A_\mu^+ = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu\nu}) A_\nu = e^{-i\xi} e^\eta i\partial_\mu^+(e^{-\eta} e^{i\xi}), \quad (23a)$$

$$A_\mu^- = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu}) A_\nu = e^{-i\xi} e^{-\eta} i\partial_\mu^-(e^\eta e^{i\xi}). \quad (23b)$$

不难检验,若选(4)式中的 ϕ 满足

$$e^\phi = e^\eta \cdot e^{i\xi}, \quad (24)$$

那么根据新场 χ_L 和 $\bar{\chi}_L$, 费密子拉氏量完全从规范场退耦,因此

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int D\phi_R D\phi_L D\chi_L D\bar{\chi}_L \exp \left\{ \int d^2x (\phi_R i\partial^+ \phi_R + \phi_L i\partial^- \phi_L) \right\} \\ &= \int D\phi_R D\phi_L D\chi_L D\bar{\chi}_L J[A] \exp \left\{ \int d^2x (\phi_R i\partial^+ \phi_R + \chi_L i\partial^- \bar{\chi}_L) \right\} \\ &= J[A]. \end{aligned} \quad (25)$$

利用(14)式,且注意到从(14)式有

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(t)}{\partial t} &= -\mathcal{D}(t)\phi \equiv -i\mathcal{D}\phi - [A(t), \phi], \\ A(t)|_{t=0} &= A, \quad A(t)|_{t=1} = UAU^{-1} + U i\mathcal{D}U^{-1}.\end{aligned}$$

可以得到如下的 W 的表达式:

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \text{Tr}^c \{a A_\mu A_\mu + ib A_\mu^\dagger \partial_\mu e^{-\phi} e^\phi\} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} a(b-1) \int d^2x \int_0^1 dt \text{Tr}^c \{ \phi [A_\mu + i\epsilon_{\mu\nu} A_\nu, A_\mu(t)] \} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} ib \int d^2x \int_0^1 dt \text{Tr}^c \{ A_\mu(t) \partial_t A_\nu(t) + 2\phi A_\mu(t) A_\nu(t) \}.\end{aligned}\quad (26)$$

这里场 ϕ 满足(24)式,且由(23)式联系到 A_μ .

(26)式中的第一项表明规范场已经得到了一与正规化相关的质量项. 这样就证明了在二维非阿贝耳反常的规范理论中,可以存在矢量玻色子质量生成. 除了参数 a 外,也有由 b 参数化的不确定性. 这个不确定性对应于加不同的非局域抵消项 (Bardeen 抵消项) 的不确定性. 我们可以令 $b=1$, 下面将固定 $b=1$, 则从(17a), (25) 和(26)式得

$$\begin{aligned}Z[A] = J[A] &= e^{-W} = \exp \left\{ \frac{-1}{4\pi} \int d^2x \text{Tr}^2 (a A_\mu A_\mu + i A_\mu^\dagger \partial_\mu e^{-\phi} e^\phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{4\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr}^c (A_\mu(t) \partial_t A_\nu(t) + 2\phi A_\mu(t) A_\nu(t)) \right\}.\end{aligned}\quad (27)$$

可以方便地把场 $\phi(x)$ 看作一附加的标量 (Lorentz 标量)场. 那么此附加场可以等同于 Wess-Zumino 标量. 这样(27)式中的最后一项对应于规范化的 Wess-Zumino-Witten 反常的作用量泛函.

感谢侯伯宇教授使我对此问题感兴趣.

参 考 文 献

- [1] A. M. Polyakov and P. B. Wiegman, *Phys. Lett.*, **131B** (1983), 121.
- [2] O. Alvarez, *Nucl. Phys.*, **B238**(1984), 61.
- [3] A. Lowenstein and J. A. Swieca, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **68**(1972), 172.
- [4] P. Di Vecchia, B. Durhuus and J. L. Petersen, *Phys. Lett.*, **144B**(1984), 245.
- [5] A. D'Adda, A. C. Davis and P. Di Vecchia, *Phys. Lett.*, **121B**(1983), 335.
- [6] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 2425.
- [7] R. Roskies and F. A. Schaposnik, *Phys. Rev.*, **D23**(1981), 558.
- [8] R. Rajaraman, *Phys. Lett.*, **154B** (1985), 305.
- [9] R. Jackiw and R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 1219; 2060 (E).
- [10] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2223; *Ann. Phys.*, **81**(1973), 67.
- [11] A. Das, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2126.
- [12] K. Harada, H. Kubota and I. Tsutsui, TIT/HEP-91.
- [13] R. E. Gamboa Saravi, F. A. Schaposnik and J. E. Solomin, *Nucl. Phys.*, **B185**(1981), 239; R. E. Gamboa Saravi, M. A. Muschietti, F. A. Schaposnik and J. E. Solomin, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **157**(1984), 360.
- [14] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 1195; *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2842; *ibid.*, **22**(1980), 1449 (E); *ibid.*, **D29**(1984), 285.

EFFECTIVE LAGRANGIAN AND MASS GENERATION OF THE CHIRAL QCD₂ MODEL

ZHANG YAO-ZHONG

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian)

ABSTRACT

We have studied $(1+1)$ -dimensional gauge theory with the chiral fermions using the path-integral approach. Performing a non-abelian chiral change of variables and choosing a more general regularization operator, we get the exact solution of the fermion determinant. We also show that there can exist a mass generation in the theory for the vector bosons. Apart from a mass term, the solution contains a gauged Wess-Zumino-Witten anomaly functional and some other non-local terms.