

无角度限制的修正的 Glauber 公式

钱 选 清

(浙江大学物理系)

1986 年 11 月 17 日收到

提 要

本文重新推导了 Glauber 理论中弹性散射振幅公式。如果取直角光学位势作为零级近似, 取 Woods-Saxon 光学位势作为正确的光学位势, 发现在原来的散射振幅中, 分部积分能够进一步进行下去。最后, 得到了修正后的散射振幅公式, 而无角度限制。

一、引 言

Glauber 理论是研究核-核非相对论性高能散射方面相当成功的一种理论。可惜文献[1]在推导出散射振幅公式时, 引入了一个很强的条件, 即 $k d(1 - \cos \theta) \ll 1$, 其中 k 为入射波矢量, θ 为散射角度, d 为核力作用半径, 即所谓高能量小角度限制。其实仔细研究文献[1], 可以发现这个限制是为了避免数学上处理的麻烦而引入的一种简化。这个简化太强。

Glauber 理论是一种多重散射理论, 它兼有衍射理论的特点。虽然它适用的散射角度范围比较狭窄(至少不能大于 90°), 但如果在原先的推导中, 不过早地引入太强的限制, 所求得的公式对角度的适用范围将要比原文公式^[1]的适用范围广一些。

本文作为一种尝试, 先引进球直角光学位势作为一种零级近似, 重新推导了文献[1]中二体弹性散射的振幅公式。先不作小角度近似, 对二体散射公式进行一次分部积分, 然后计算所得的结果。最后, 把推导出的公式, 在小角度时, 同 Glauber 公式进行比较, 定出位势部分的积分形状, 得到一个不考虑多重相互作用并有 $E \cong \frac{1}{2} \hbar k v$ 近似关系时的没有角度限制的二体弹性散射振幅公式。

我们用此公式计算了 $T_p = 1.044 \text{ GeV}$ 的质子的 $^{40}\text{Ca}(p, p)^{40}\text{Ca}$ 弹性散射和 $T_\alpha = 42 \text{ MeV}$ 的高能 α 粒子的 $^{24}\text{Mg}(\alpha, \alpha)^{24}\text{Mg}$ 弹性散射微分截面曲线。发现前者符合得较好, 后者除了曲线的峰、谷位置基本上同实验曲线相符合外, 振幅在小角度时偏低。其中 T_p 或 E 均表示入射粒子的动能。

二、理论公式推导

文献[1]在假定入射粒子满足 $kR \gg 1$ 和 $V/E \ll 1$ 的条件下, 推导出散射振幅公式为

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz d^{(2)} \mathbf{b} V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z) \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{b} + \mathbf{k}z) \cdot \exp -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') dz', \quad (1)$$

其中 $\mathbf{k}$ 为入射粒子波矢量, $\mathbf{k}'$ 为散射粒子的波矢量. $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, 即 $\mathbf{k}$ 方向的单位矢量, $\mathbf{b}$ 为碰撞参数(见图 1).

要简化(1)式, 我们和文献[1]不同, 不直接作小角度近似, 而对(1)式再作一次分部积分. 其推导如下:

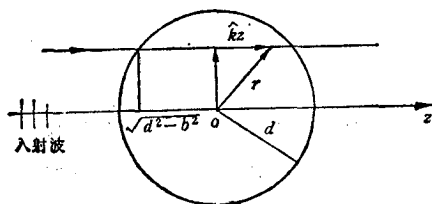


图 1 球形势阱

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \exp -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') dz' \\ &= -\frac{i}{\hbar v} V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z) \exp \\ & \quad -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') dz'. \end{aligned} \quad (2)$$

(1)式可以写成为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \frac{imv}{2\pi\hbar} \int d^{(2)} \mathbf{b} \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{k}}z \\ & \quad \cdot \left(\frac{d}{dz} \exp -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') dz' \right) dz. \end{aligned} \quad (3)$$

注意对于 dz 积分, 要受到 $V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z)$ 作用半径的限制.

设光学位势作用范围对 z 坐标讲为 $[-d, d]$, 则我们可以计算积分如下:

$$I = \int_{-d}^d \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{k}}z \left(\frac{d}{dz} \exp -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') dz' \right) dz \quad \text{分部积分} \quad (a) + (b), \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} (a) &= \left[\exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{k}}z \cdot \exp -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') dz' \right]_{-d}^d \\ &= \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{k}}d \cdot \exp -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^d V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') dz' - \exp -i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{k}}d, \end{aligned} \quad (5)$$

$$(b) = -i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{k}} \int_{-d}^d \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{k}}z \cdot \left(\exp -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') dz' \right) dz. \quad (6)$$

(a) 和 (b) 式的计算要涉及到 $V(\mathbf{r})$ 的具体形状. 一般来说, 如果 $V(\mathbf{r})$ 复杂, 很难得到解析表达式. 我们先用球直角光学位势来计算 (a) 式和 (b) 式. 球直角光学位势具有如下形状:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z) = -V_0(1 + i\xi)g(r) = -V'_0(1 + i\xi)g(r). \quad (7)$$

为了方便, 令 $V'_0 = V_0(1 + i\xi)$,

$$g(r) = \begin{cases} 1 & r \leq d, \\ 0 & r > d. \end{cases} \quad (8)$$

在碰撞参数 $\mathbf{b}$ 固定时, $g(r) = g(\mathbf{b} + \mathbf{k}z)$ 的表达式可以写为

$$g(r) = \begin{cases} 0 & -\infty < z < -\sqrt{d^2 - b^2}, \\ 1 & -\sqrt{d^2 - b^2} \leq z \leq \sqrt{d^2 - b^2}, \\ 0 & \sqrt{d^2 - b^2} < z < +\infty. \end{cases} \quad (9)$$

记 $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{k}} = k(1 - \cos\theta)$, 并取 $\frac{V'_0}{\hbar v} \cong k \frac{V'_0}{2E}$. 把(9)式代入(5)式, 则得

$$\begin{aligned} (a) &= \exp ikd(1 - \cos\theta) \cdot \exp ik \frac{V'_0}{2E} \int_{-\infty}^d g(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z) dz - \exp[-ikd(1 - \cos\theta)] \\ &= \exp ikd(1 - \cos\theta) \cdot \exp ik \frac{V'_0}{2E} 2\sqrt{d^2 - b^2} - \exp[-ikd(1 - \cos\theta)], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{其中已取} \quad -\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^d V(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z') dz' = ik \frac{V'_0}{2E} \cdot 2\sqrt{d^2 - b^2}. \quad (11)$$

若注意到下面的函数关系:

$$\int_{-\infty}^z g(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z') dz' = \begin{cases} 0 & -\infty < z < -\sqrt{d^2 - b^2}, \\ z + \sqrt{d^2 - b^2} & -\sqrt{d^2 - b^2} \leq z \leq \sqrt{d^2 - b^2}, \\ 2\sqrt{d^2 - b^2} & \sqrt{d^2 - b^2} < z < +\infty, \end{cases} \quad (12)$$

则 (b) 式可作如下推演:

$$\begin{aligned} (b) &= -ik(1 - \cos\theta) \int_{-d}^d dz \exp ik(1 - \cos\theta)z \cdot \exp ik \frac{V'_0}{2E} \int_{-\infty}^z g(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z') dz' \\ &= -ik(1 - \cos\theta) \left(\int_{-d}^{-\sqrt{d^2 - b^2}} dz + \int_{-\sqrt{d^2 - b^2}}^{\sqrt{d^2 - b^2}} dz + \int_{\sqrt{d^2 - b^2}}^d dz \right) \\ &\quad \cdot \exp ik(1 - \cos\theta)z \cdot \exp ik \frac{V'_0}{2E} \int_{-\infty}^z g(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z') dz' \\ &= (i) + (ii) + (iii), \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} (i) &= -ik(1 - \cos\theta) \int_{-d}^{-\sqrt{d^2 - b^2}} dz \exp ik(1 - \cos\theta)z \\ &= \exp[-ikd(1 - \cos\theta)] - \exp[-ik(1 - \cos\theta)\sqrt{d^2 - b^2}], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (ii) &= -ik(1 - \cos\theta) \int_{-\sqrt{d^2 - b^2}}^{\sqrt{d^2 - b^2}} dz \exp ik(1 - \cos\theta)z \cdot \exp ik \frac{V'_0}{2E} \int_{-\infty}^z g(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z') dz' \\ &= -ik(1 - \cos\theta) \int_{-\sqrt{d^2 - b^2}}^{\sqrt{d^2 - b^2}} dz \exp ik(1 - \cos\theta)z \cdot \exp ik \frac{V'_0}{2E} (z + \sqrt{d^2 - b^2}) \\ &= \frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta + \frac{V'_0}{2E}} \exp ik \frac{V'_0}{2E} \sqrt{d^2 - b^2} \cdot \left[\exp\left(-ik\left(1 - \cos\theta + \frac{V'_0}{2E}\right)\sqrt{d^2 - b^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \exp ik\left(1 - \cos\theta + \frac{V'_0}{2E}\right)\sqrt{d^2 - b^2}\right]. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} &= -ik(1 - \cos\theta) \int_{\sqrt{d^2 - b^2}}^d dz \exp ik(1 - \cos\theta)z \cdot \exp ik \frac{V'_0}{2E} 2\sqrt{d^2 - b^2} \\
 &= \exp ik \frac{V'_0}{2E} 2\sqrt{d^2 - b^2} \cdot [\exp ik(1 - \cos\theta)\sqrt{d^2 - b^2} - \exp ik(1 - \cos\theta)d].
 \end{aligned} \tag{16}$$

通过整理得

$$(b) = (i) + (ii) + (iii) = (c) - (a). \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}
 (c) &= \frac{\frac{V'_0}{2E}}{1 - \cos\theta + \frac{V'_0}{2E}} \exp(-ik(1 - \cos\theta)\sqrt{d^2 - b^2}) \cdot \left[\exp(i2k(1 - \cos\theta)\sqrt{d^2 - b^2}) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \exp ik \frac{V'_0}{2E} 2\sqrt{d^2 - b^2} - 1 \right].
 \end{aligned} \tag{18}$$

把(17)和(18)式代入(4)式得

$$I = (a) + (b) = (c).$$

注意到(11)式,并且记

$$G(b) = \exp -ik(1 - \cos\theta)\sqrt{d^2 - b^2}, \tag{19}$$

$$\chi_0(b) = 2k(1 - \cos\theta)\sqrt{d^2 - b^2} - \frac{1}{\hbar\nu} \int_{-\infty}^d V(b + \mathbf{k}z') dz'. \tag{20}$$

由此得

$$I = (c) = \frac{\frac{V'_0}{2E}}{1 - \cos\theta + \frac{V'_0}{2E}} G(b) [\exp i\chi_0(b) - 1]. \tag{21}$$

(21)式是在取球直角光学位势时得到的,如果 $V(\mathbf{r})$ 取任意位势,则必须对(21)式作推广. 我们注意到在小角度时,(21)式应该在形式上与 Glauber 公式中相应的因子完全相同. 此时

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow 0} G(b) &\cong 1, \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} \chi_0(b) &\cong -\frac{1}{\hbar\nu} \int_{-\infty}^d V(b + \hat{\mathbf{k}}z') dz'.
 \end{aligned} \tag{22}$$

对照 Glauber 公式中相应的因子

$$\chi_G(b) = -\frac{1}{\hbar\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} V(b + \mathbf{k}z') dz'. \tag{23}$$

可见我们必须把(22)式中的积分上限 d 推广为 $+\infty$.

此时 $\chi_0(b)$ 推广为

$$\chi(b) = 2k(1 - \cos\theta)\sqrt{d^2 - b^2} - \frac{1}{\hbar\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} V(b + \mathbf{k}z') dz'. \tag{24}$$

而这里的 d 要理解为位势的平均作用半径(或原子核的平均作用半径). 下面在具体例子

的计算中,我们取 Woods-Saxon 光学位势,它同球直角光学位势非常接近.

把(21)式代入(3)式中,并且把其中的 $\chi_0(b)$ 改写为 $\chi(b)$. 又利用 $mv = p = \hbar k$, $\frac{imv}{2\pi\hbar} = \frac{ik}{2\pi}$. 最后得到

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{ik}{2\pi} \frac{\frac{V'_0}{2E}}{1 - \cos\theta + \frac{V'_0}{2E}} \int d^{(2)}b G(b) [1 - \exp i\chi(b)] \cdot \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}. \quad (25)$$

令 $\mathbf{k}$ 方向为 z 轴方向, $\mathbf{k}'$ 为散射方向(见图 2), 则(25)式进一步可简写为

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{ik}{2\pi} F(\theta) \int d\varphi b db G(b) [1 - \exp i\chi(b)] \cdot \exp(-ikb \sin\theta \cos\varphi), \quad (26)$$

其中

$$F(\theta) = \frac{\frac{V'_0}{2E}}{1 - \cos\theta + \frac{V'_0}{2E}}.$$

利用积分公式

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \exp iz \cos\varphi = 2\pi J_0(z), \quad J_0(z) = J_0(-z).$$

其中 $J_0(z)$ 为零阶贝塞耳函数.

最后得到散射振幅公式为

$$f(\theta) = ikF(\theta) \int_0^R J_0(kb \sin\theta) G(b) [1 - \exp i\chi(b)] b db. \quad (27)$$

微分截面计算由下式给出:

$$\frac{d\sigma}{dQ} = |f(\theta)|^2. \quad (28)$$

利用(27)和(28)式计算了 $T_p = 1.044\text{GeV}$ 质子在 ^{40}Ca 上的弹性散射微分截面(见图 3)和 $E = 42\text{MeV}$ α 粒子在 ^{24}Mg 上的弹性散射微分截面(见图 4). 光学位势取如下的 Woods-Saxon 势表达式:

$$V(r) = -V_0(1 + i\xi)f(r),$$

$$f(r) = \left(1 + \exp \frac{r-R}{a}\right).$$

位势深度 V_0 及虚部 ξ 为两个可调参数. R 为平均核半径, a 为核的边缘宽度. 表 1 列出了这些参数调试后的最佳值.

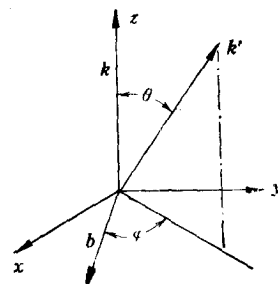


图 2 $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{b}$ 三者几何关系
 $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{b} = k' b \sin\theta \cos\varphi$

表 1

元素 参数	R	$V(\text{MeV})$	ξ	k	$E(\text{MeV})$	$a(\text{fm})$
^{40}Ca	5.000	20.00	7.000	7.085	1044.00	0.5490
^{24}Mg	5.500	20.00	2.000	2.845	42.00	0.2000

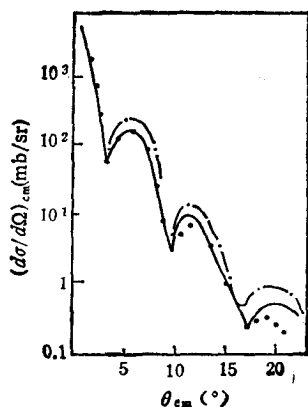


图 3 $^{40}\text{Ca}(p,p)^{40}\text{Ca}$ 截面曲线图 ● 为实验点;
— 为理论曲线; - - 为 Ray 用 (KMT) 光学位势计算的曲线

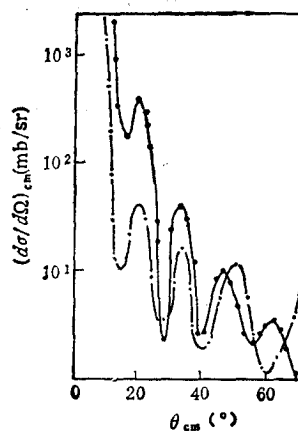


图 4 $^{24}\text{Mg}(\alpha,\alpha)^{24}\text{Mg}$ 截面曲线图 ● 为实验点;
- - 为实验曲线, 取自文献[2]; — 为理论曲线

三、计算结果和讨论

本文利用(27)式具体计算了两个事例。一个是 $T_p = 1.044\text{GeV}$ 质子同 ^{40}Ca 的弹性散射微分截面。理论和实验曲线均标在图 3 上。并且和 Ray 用 (KMT) 光学位势^[3]计算结果进行了比较。这个例子我们没有考虑相对论效应。因为此时质子的速度 $v \cong 0.86c$ 。计算表明对于公式 $\frac{V'_0}{\hbar v} = k \frac{V'_0}{2E}$ 的修正,特别是对 E 的修正为 $\frac{1}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^2$ 量级。估计会有一小的影响。第二个事例是 $E = 42\text{MeV}$ 的 α 粒子同 ^{24}Mg 的弹性散射微分截面。这个事例很早就被人们注意。在实验曲线上,明显地表现出有衍射图象。1965 年苏联学者^[4]在衍射理论的基础上引入高斯型的灰度函数作过计算。这种方法在某种意义上是取一种平均值。

考虑到 Glauber 理论本身具有衍射理论的特点,本文作为一种尝试,利用(27)式进行计算,具体结果示于图 4。理论曲线的振幅明显地偏低,并且调试出的参数值 R 偏大。曲线在 60° 以后发散。表面上看似乎不大满意,但如果认真分析,可以得到有益的结果。首先 Glauber 理论本身要求 $V/E \ll 1$ 。而在本例子中, α 粒子的人射能量同核子位势相比较还不够高。其次, α 粒子同核的相互作用库仑位势很强,理论中必须考虑进去,又 α 粒子在中高能时应该视为一个有结构的核,这时核子-核子的关联效应也不能忽视。因此,对于这个事例,问题并非那么简单,有进一步深入研究的必要。

虽然如此,但是在图上我们也清楚地看到理论曲线在谷,峰位置上同实验曲线对应,反映出实验曲线确实是呈现衍射特点的.又从图上也看到 Glauber 理论在大角度时,表现出发散的特性,可见它的角度适用范围是有一个限制的.

在本文完成过程中,李清润同志给予了多次有益的讨论和帮助,特别是黄祖洽教授仔细地审查了原文,并且提出了宝贵的意见.在本文计算中,金敏同志给予了有益的帮助.在此一并致谢.

参 考 文 献

- [1] R. J. Glauber, in *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. 1 W. E. Brittin et al., eds., Wiley-Interscience, New York, (1959), p. 315.
- [2] 汉斯·费朗费尔德、欧内斯特·M·亨利著,亚原子物理学,原子能出版社,(1981),98页.
- [3] L. Ray, *Nucl. Phys.*, **A335** (1980), 443.
- [4] E. V. Inopin and Yu. A. Berezhnoy, *Nucl. Phys.*, **63**(1965), 689.

THE REVISED GLAUBER SCATTERING FORMULA WITHOUT ANGLE CONSTRAINT

QIAN XUAN-QING

(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou)

ABSTRACT

The formula of the elastic scattering amplitude in the Glauber theory are re-derived. If we take rectangular optic potential as zero order approximation and Woods-Saxon optical potential as exact potential, we find that the partial integral can be performed further in the original scattering amplitude formulas. Finally, We obtain the revised scattering amplitude without angle constraint.