

空间阵列的狭窄波束型引力辐射

李 芳 昱

唐 孟 希

(重庆大学应用物理系)

(中山大学物理系)

1986 年 12 月 19 日收到

提 要

本文讨论了质量四极振子空间矩形点阵阵列的引力辐射功率和辐射角分布,并给出了解析表达式。计算表明,这种阵列能产生方向性很强的狭窄引力辐射波束,关英男(Seki)等人^[1]提出的行波型引力辐射理论可作为本文的特殊情况而自然地导出。用本文方法对具体数例的计算表明,一百个 $30 \times 30 \times 0.03 \text{ cm}^3$ 的 CdS 晶体组成的空间阵列,在理想超高频声学共振和完全行波型同步加强的情况下,最优方向引力辐射能流密度可望达 $2.84 \times 10^{-1} \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{s}$, 这个结果显示了晶体空间阵列激发高频引力辐射的潜在力量。

一、引 言

Seki 等人在文献 [1] 中提出了行波型引力辐射 (travelling wave type-gravitational radiation (以下简称 TWGR)) 理论,按此方法算得晶体在超高频声学共振和 TWGR 同步加强条件下的引力辐射效率可比同样大小的旋转棒高 10^{40} 倍,比同样大小的 Weber 型振子^[2]高 10^{23} 倍,比 Weber 的压电晶体模型^[3]的引力辐射也要高出许多。由于 TWGR 还具有很好的方向性,这对象引力辐射这类极弱信号的检测来讲,也具有特别的意义。

但 Seki 的工作尚有几个局限性: (1)它只是对具体大小、形状的晶体给出了数值解的结果,并未能给出一般情况下晶体空间阵列 TWGR 总辐射功率的解析表达式; (2)所用的角分布因子只是两个特殊坐标平面内的近似形式; (3)只给出了趋于线性阵列模型的晶体的结果,其引力辐射的绝对强度仍然太小。

本文不拘泥于具体的晶体模型,而是对普遍情况下四极振子空间矩形点阵阵列的 TWGR 的辐射功率和辐射角分布作了计算,并得到了严格的解析式,在此基础上计算了晶体空间阵列在一般情况下的 TWGR。

二、质量四极振子空间矩形点阵阵列的引力辐射

1. 辐射能流和角分布因子

根据 Einstein 的引力理论,在弱场线性近似下沿 n^r 方向引力辐射的能流密度为

$$t^{0r}n^r = \frac{G}{36\pi c^5 r^2} \left[\frac{1}{2} \ddot{D}^{kl} \ddot{D}^{kl} - \ddot{D}^{kl} \ddot{D}^{km} n^l n^m \right]$$

$$+ \frac{1}{4} \ddot{D}^{kl} \ddot{D}^{m'n^k n^l n^m n^t} \Big]. \quad (1)$$

其中 D^{kl} 为质量四极矩张量的推迟值, 即

$$D^{kl}(\mathbf{x}, t) = \int (3x^k x'^l - \delta_k^l r'^2) \rho(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}) d^3x'. \quad (2)$$

对于二等质量 m 组成的线性四极振子, 若其坐标为

$$z = \pm(b + a \sin \omega t),$$

且满足条件 $a \ll b$, 由(2)式可得^[4]

$$D^{kl} = \begin{pmatrix} -2m \left[b^2 + 2ab \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] & 0 \\ -2m \left[b^2 + 2ab \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] & 0 \\ 0 & 4m \left[b^2 + 2ab \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \end{pmatrix}, \quad (3)$$

故 $\ddot{D}^{kl}$ 的复数形式则为

$$\ddot{D}^{kl} = \begin{pmatrix} 4mab\omega^3 e^{i(kr - \omega t)} & 0 \\ 4mab\omega^3 e^{i(kr - \omega t)} & 0 \\ 0 & -8mab\omega^3 e^{i(kr - \omega t)} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

将(3)式代入(1)式, 可算得单个四极振子辐射的能流密度为

$$\begin{aligned} \langle t^{0r} n^r \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T t^{0r} n^r dt \\ &= \frac{G}{2\pi c^5 r^2} (mab)^2 \omega^6 \sin^4 \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

由于这里 $\ddot{D}^{kl}$ 已表示成位相因子的线性函数, 故由(4), (5)式则预示着, 若将一系列四极振子按一定方式排列成阵列, 利用其波区的相干效应将会产生方向性很强的引力辐射波束。

对于 N_z 个在 z 轴上等距排列、间距为 l_z 位相依次滞后 ζ 、振动方向平行于 z 轴的四极振子线性阵列, 在波区场点产生的总四极矩的推迟值显然为

$$\begin{aligned} \ddot{D}_{\Sigma}^{kl} &= \sum_{p''=0}^{N_z-1} \ddot{D}^{kl} \exp[i p'' (kl_z \cos \theta - \zeta)] \\ &= \ddot{D}^{kl} \frac{1 - \exp[i N_z (kl_z \cos \theta - \zeta)]}{1 - \exp[i (kl_z \cos \theta - \zeta)]}, \end{aligned} \quad (6)$$

于是

$$\ddot{D}_{\Sigma}^{kl*} \ddot{D}_{\Sigma}^{kl} = \ddot{D}^{kl*} \ddot{D}^{kl} \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_z (kl_z \cos \theta - \zeta) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (kl_z \cos \theta - \zeta) \right]}. \quad (7)$$

故由(1), (7)式得 N_z 个振子在场点产生的总辐射能流密度为

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{36\pi c^3 r^2} \left[\frac{1}{2} \ddot{D}_{\alpha}^{kl*} \ddot{D}_{\alpha}^{kl} - \ddot{D}_{\alpha}^{kl*} \ddot{D}_{\alpha}^{km} n^l n^m \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \ddot{D}_{\alpha}^{kl*} \ddot{D}_{\alpha}^{ml} n^k n^l n^m n^l \right] \\
 &= \langle t^{0r} n^r \rangle \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_x (kl_x \cos \theta - \zeta) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (kl_x \cos \theta - \zeta) \right]}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

根据计算空间矩形点阵阵列辐射的一般方法^[3],由 $N_x N_y N_z$ 个沿 z 方向振荡,在三维空间按上述规律分布的质量四极振子组成的空间阵列,沿 n^r 方向的总辐射能流密度为

$$\begin{aligned}
 u' &= \langle t^{0r} n^r \rangle \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_x (kl_x \sin \theta \cos \phi - \xi) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (kl_x \sin \theta \cos \phi - \xi) \right]} \\
 &\quad \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_y (kl_y \sin \theta \sin \phi - \eta) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (kl_y \sin \theta \sin \phi - \eta) \right]} \\
 &\quad \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_z (kl_z \cos \theta - \zeta) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (kl_z \cos \theta - \zeta) \right]} \\
 &= S_m f(\theta, \phi). \quad (9)
 \end{aligned}$$

这里

$$S_m = \frac{G}{2\pi c^3 r^2} (mab)^2 \omega^6 \quad (10)$$

为单个四极振子能流密度的峰值,而

$$\begin{aligned}
 f(\theta, \phi) &= \sin^4 \theta \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_x (kl_x \sin \theta \cos \phi - \xi) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (kl_x \sin \theta \cos \phi - \xi) \right]} \\
 &\quad \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_y (kl_y \sin \theta \sin \phi - \eta) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (kl_y \sin \theta \sin \phi - \eta) \right]} \\
 &\quad \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_z (kl_z \cos \theta - \zeta) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (kl_z \cos \theta - \zeta) \right]}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

为其总角分布因子。若令(11)式中 $\xi = 0$, $\eta = kl_y$, $\zeta = 0$,则有

$$\begin{aligned}
 u' = S_m \sin^4 \theta \cdot & \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} N_x k l_x \sin \theta \cos \phi \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k l_x \sin \theta \cos \phi \right)} \\
 & \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_y k l_y (1 - \sin \theta \sin \phi) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} k l_y (1 - \sin \theta \sin \phi) \right]} \\
 & \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} N_z k l_z \cos \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k l_z \cos \theta \right)}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

若考虑沿 y 方向传播的波, 即 $\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/2$, 由(12)式立即有

$$u' = S_m \cdot (N_x N_y N_z)^2. \quad (13)$$

若 N_x, N_y, N_z 很大, 平方后显然可达相当可观数值. (12)式中的角分布因子是离开辐射主瓣时迅速衰减的函数, 适当调节 $N_x, N_y, N_z, l_x, l_y, l_z, \xi, \eta, \zeta$, 显然可在某些特定方向产生非常尖锐的狭窄引力辐射波束.

2. 定向引力辐射的方向性系数 D

在此我们借用天线阵理论中方向性系数的概念描述引力辐射的集中程度. D 的定义是在相同的总辐射功率下, 最大辐射方向的能量密度与平均能量密度(理想点源辐射)之比, 即

$$D = \frac{4 \pi f(\theta_m, \phi_m)}{\int f(\theta, \phi) d\Omega}, \quad (14)$$

θ_m, ϕ_m 为使辐射取最大值的极角和方位角. 将(11)式直接代入上式作定量计算显然是很复杂的. 为此, 先考虑一简单情况, 即 $N_x = N_y = 1$, $N_z = N$, $\zeta = 0$, 这显然是一沿 z 方向同步振荡的线性阵列. 由(11)式, 此时

$$f(\theta, \phi) = \sin^4 \theta \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{N}{2} k l_z \cos \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k l_z \cos \theta \right)}. \quad (15)$$

这里借用玛 (Ma) 处理短偶极子线性阵列的方法^[6]类推. 由(15)式, 这里 $\theta_m = \pi/2$, 故

$$f(\theta_m, \phi_m) = N^2, \quad (16)$$

而

$$\int f(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \left(\frac{N}{2} k l_z \cos \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k l_z \cos \theta \right)} \sin^3 \theta d\theta, \quad (17)$$

因

$$\frac{\sin^2\left(\frac{N}{2} kl_z \cos \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} kl_z \cos \theta\right)} = \left| \sum_{p''=0}^{N-1} e^{ip''\gamma} \right|^2 = \left| \sum_{p''=0}^{N-1} (\cos p''\gamma + i \sin p''\gamma) \right|^2$$

$$= N + 2 \sum_{p''=1}^{N-1} (N - p'') \cos p''\gamma, \quad (18)$$

这里

$$\gamma = kl_z \cos \theta, \quad (19)$$

将(18)式代入(17)式并在积分时作变量代换 $\phi = p'' kl_z \cos \theta$, 最后算得

$$\int f(\theta, \phi) d\Omega = 2\pi \left\{ \frac{16}{15} N + 2 \sum_{p''=1}^{N-1} (N - p'') \left[\frac{2((p'' kl_z)^2 + 4)}{(p'' kl_z)^3} \sin p'' kl_z - \frac{8}{(p'' kl_z)^2} \cos p'' kl_z \right] \right\}. \quad (20)$$

于是由(14), (16), (20)式有

$$D = \frac{N^2}{\frac{8}{15} N + \sum_{p''=1}^{N-1} (N - p'') \left[\frac{2((p'' kl_z)^2 + 4)}{(p'' kl_z)^3} \sin p'' kl_z - \frac{8}{(p'' kl_z)^2} \cos p'' kl_z \right]}. \quad (21)$$

对于 $l_z = \lambda$ 的情况, $p'' kl_z = 2\pi p''$, (21) 式变为

$$D = \frac{N^2}{\frac{8}{15} N - 8 \sum_{p''=1}^{N-1} \frac{(N - p'')}{(2\pi p'')^2}}. \quad (22)$$

若 $N = 1$, 由(22)式得 $D = 1.88$; 若 $N = 6$, $D = 19.05$; 当 $N = 100$ 时 $D = 353.98$, 这已是一相当可观数值. 而由玛在上述情况下算得的电偶极阵列的相应值只分别为 1.5, 10.78, 184.67. 显然, 随着振子数的增加, 四极阵列引力辐射在角分布方面的优越性将进一步显示出来. 为使 D 在 ϕ 方向也有较强的方向性, 则需将线性阵列扩展为平面阵列和空间阵列.

3. 辐射功率

根据(11)式(为简明起见, 设(11)式中 $\xi = \eta = \zeta = 0$, 即同步振荡), 由 $N_x N_y N_z$ 个振子组成的空间阵列的总辐射功率为

$$P = \int u' r^2 d\Omega$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_m \sin^4 \theta \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N_x}{2} kl_x \sin \theta \cos \phi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} kl_x \sin \theta \cos \phi\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N_y}{2} kl_y \sin \theta \sin \phi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} kl_y \sin \theta \sin \phi\right)} d\theta d\phi$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N_x}{2} k l_x \cos \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k l_x \cos \theta\right)} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
 & = S_m r^2 \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \left| \sum_{p=0}^{N_x-1} e^{ip\alpha} \right|^2 \cdot \left| \sum_{p'=0}^{N_y-1} e^{ip'\beta} \right|^2 d\phi \right] \\
 & \quad \cdot \left| \sum_{p''=0}^{N_z-1} e^{ip''\gamma} \right|^2 \sin^3 \theta d\theta, \quad (23)
 \end{aligned}$$

式中 $\alpha = k l_x \sin \theta \cos \phi$, $\beta = k l_y \sin \theta \sin \phi$, $\gamma = k l_z \cos \theta$, 考虑到

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{p=0}^{N_x-1} e^{ip\alpha} \right|^2 &= N_x + 2 \sum_{p=1}^{N_x-1} (N_x - p) \cos p\alpha \\
 &= N_x + 2 \sum_{p=1}^{N_x-1} (N_x - p) \\
 & \quad \cdot \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(ip k l_x \sin \theta)^{2s}}{(2s)!} \cos^{2s} \phi \right], \\
 \left| \sum_{p'=0}^{N_y-1} e^{ip'\beta} \right|^2 &= N_y + 2 \sum_{p'=1}^{N_y-1} (N_y - p') \cos p'\beta = N_y \\
 & \quad + 2 \sum_{p'=1}^{N_y-1} (N_y - p') \\
 & \quad \cdot \left[1 + \sum_{s'=1}^{\infty} \frac{(ip' k l_y \sin \theta)^{2s'}}{(2s')!} \sin^{2s'} \phi \right], \\
 \left| \sum_{p''=0}^{N_z-1} e^{ip''\gamma} \right|^2 &= N_z + 2 \sum_{p''=1}^{N_z-1} (N_z - p'') \cos p''\gamma. \quad (24)
 \end{aligned}$$

将(24)式代入(23)式并利用贝塞耳函数的积分表示式

$$J_\nu(p'' k l_z) = \frac{\left(\frac{p'' k l_z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(p'' k l_z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta, \quad (25)$$

对乘积展开并逐项积分和整理归类, 经过较长的运算最后得总辐射功率的完整解析式为

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{G(mab)^2 \omega^6}{2\pi c^5} \left[\frac{32}{15} \pi N_x N_y (N_x + N_y - 1) N_z \right. \\
 & \quad + 32 \sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} N_x N_y (N_x + N_y - 1) \\
 & \quad \cdot \sum_{p''=1}^{N_x-1} (N_x - p'') \frac{J_{\frac{3}{2}}(p'' k l_z)}{(p'' k l_z)^{\frac{3}{2}}} + 144 \pi N_x N_z \\
 & \quad \cdot \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{s'=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s'} (N_y - p') [\Gamma(s' + 3)]^2 (p' k l_y)^{2s'}}{(s'!)^2 \Gamma(s' + 6)} + 144 \pi N_y N_z \\
 & \quad \cdot \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s (N_x - p) [\Gamma(s + 3)]^2 (p k l_x)^{2s}}{(s!)^2 \Gamma(s + 6)} \left. \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 32 \sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} N_x \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{p''=1}^{N_z-1} \sum_{s'=1}^{\infty} (N_y - p')(N_z - p'') \\
& \cdot \frac{(-1)^{s'} T(s' + 3) \cdot (p' k l_y)^{2s'} J_{s'+\frac{5}{2}}(p'' k l_z)}{2^{s'} (s'!)^2 (p'' k l_z)^{s'+\frac{5}{2}}} \\
& + 32 \sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} N_y \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p''=1}^{N_z-1} \sum_{s=1}^{\infty} (N_x - p)(N_z - p'') \\
& \cdot \frac{(-1)^s T(s + 3) (p k l_y)^{2s} J_{s+\frac{5}{2}}(p'' k l_z)}{2^s (s!)^2 (p'' k l_z)^{s+\frac{5}{2}}} \\
& + 256 \sqrt{\pi} N_z \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{s'=1}^{\infty} (N_x - p)(N_y - p') \\
& \cdot \frac{(-1)^{s+s'} 2^{2s} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) [T(s + s' + 3)]^2 (p k l_x)^{2s} \cdot (p' k l_y)^{2s'}}{\left[\prod_{k=1}^s (s + s' - k + 1) \right] (s'!)^2 (2s)! \Gamma[2(s + s') + 6]} \\
& + 64 \sqrt{2} \pi \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{p''=1}^{N_z-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{s'=1}^{\infty} (N_x \\
& - p)(N_y - p')(N_z - p'') \\
& \cdot \frac{(-1)^{s+s'} 2^{s+s'} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \cdot T(s + s' + 3) (p k l_x)^{2s} (p' k l_y)^{2s'} J_{s+s'+\frac{5}{2}}(p'' k l_z)}{\left[\prod_{k=1}^s (s + s' - k + 1) \right] (s'!)^2 (2s)! (p'' k l_z)^{s+s'+\frac{5}{2}}} \Bigg]. \quad (26)
\end{aligned}$$

三、空间阵列的行波型引力辐射

TWGR 主要是利用激光可在某些晶体中 (如 CdS) 激发超高频 ($\sim 10^{11}$ Hz) 声学应力振荡¹⁾, 并采用特定的位相调节装置使能流密度满足(12)式所示的位相关系, 从而产生定向高频引力辐射的^[1]. 对于长方体晶体, 若将其看成由一系列立方辐射基元所组成, 加之晶体的均匀结构, 便自然构成一四极振子空间矩形辐射阵列. 由于可以证明晶体单个立方辐射基元的 $\ddot{D}^{kl}$ (见(30)式) 与单个线性四极振子的 $\ddot{D}^{kl}$ (见(4)式) 有完全相同的数学形式, 因而只要把(10)式所示的单个四极振子能流密度的峰值代之以晶体辐射基元定向振荡的相应值, 则整个晶体的 TWGR 完全可纳入前面的理论框架. 按照本文的普遍方法, 还可讨论进一步增大辐射效率的途径.

对于长为 l (沿 y 方向) 宽 a (沿 x 方向) 厚 b (沿 z 方向, 且 $b \ll l, a$) 的晶体, 若将其看成由一系列体积元 $s_0 b$ 的辐射基元所组成, 此时则有 $l_x = l_y = s_0, N_z = 1$. 在一

1) 例如, Grill 等人还在不同的压电晶体中产生了高达 10^{11} Hz 以上的超高频声学应力振荡^[1-3].

级近似下,晶体应力-能量张量的推迟值为^[1,3]

$$\begin{aligned} T^{00} &\approx c^2 \rho \left[1 - \left(\frac{v_p}{v_s} \right) \cos k_s z \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \\ &= c^2 \rho \left[1 - \varepsilon_m \cos k_s z \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \\ T^{03} &\approx -c \rho v_p \sin k_s z \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= -c \rho v_s \varepsilon_m \sin k_s z \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \\ T^{33} &\approx -\rho v_p v_s \cos k_s z \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

这里 $\varepsilon_m = \left| \frac{d\xi}{dz} \right| = \frac{v_p}{v_s}$ 为应变峰值, $v_s = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ 为晶体中声速, Y 为杨氏模量, v_p 为晶体粒子速度, k_s 为晶体中声波波矢量. 对于体积为 $\Delta V = s_0^3 b$ 的晶体立方辐射基元,其

$$D^{kl}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \int_{\Delta V} (3x^k x^{l'} - \delta_k^{l'} r'^2) T^{00} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) d^3 x'. \quad (28)$$

将(27)式的第一式代入(28)式算得

$$\begin{aligned} D^{11} = D^{22} &= -\frac{1}{2} D^{33} = \frac{\rho}{12} (s_0^3 b^3 + s_0^4 b) \\ &\quad - \frac{\rho}{12} s_0^2 b^3 \left(1 + \frac{2s_0^2}{b^3 k_s} \right) \cdot \varepsilon_m \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

D^{kl} 其余各分量为零. 于是由(29)式得 $\ddot{D}^{kl}$ 的复数形式为

$$\ddot{D}^{kl} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{2} \varepsilon_m \omega^3 s_0^3 b^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{s_0^2}{3b^3 k_s} \right) e^{i(kr - \omega t)} & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{2} \varepsilon_m \omega^3 s_0^3 b^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{s_0^2}{3b^3 k_s} \right) e^{i(kr - \omega t)} \\ 0 & \rho \varepsilon_m \omega^3 s_0^3 b^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{s_0^2}{3b^3 k_s} \right) e^{i(kr - \omega t)} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

由此可见(30)式与(4)式有完全相同的数学形式,故由(30)式并类比(4),(5)二式有

$$\langle t^{0r} n^r \rangle = S_m \sin^4 \theta = \frac{G}{64\pi c^5 r^2} \langle (\ddot{D}^{33})^2 \rangle \sin^4 \theta \quad (31)$$

和

$$\langle (\ddot{D}^{33})^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho^2 \varepsilon_m^2 \omega^6 b^6 s_0^4 \left(\frac{1}{6} + \frac{s_0^2}{3b^3 k_s} \right)^2. \quad (32)$$

由(31),(32)式并利用 $\omega = k_s v_s$ 得单个辐射基元能流密度的峰值为

$$S_m = \frac{G}{128\pi r^2} \left(\frac{1}{6} + \frac{s_0^2}{3b^3 k_s} \right)^2 \rho^2 s_0^4 \varepsilon_m^2 v_s \left(\frac{v_s}{c} \right)^5 (b k_s)^6. \quad (33a)$$

上式中的 b 为晶体厚度,对于 CdS 晶体中 $\nu = 10^{11} \text{Hz}$ 的超高频声学振荡,其 $\lambda_s = 5 \times 10^{-6} \text{cm}$, 如果 s_0 和 b 取同一数量级,只要 $\lambda_s \ll b$, 则有 $s_0^2/3b^3 k_s \ll 1/6$, 这时(33a)式则可写成

$$S_m = \frac{G}{4608\pi r^2} \rho^2 s_0^4 \varepsilon_m^2 v_s \left(\frac{v_s}{c}\right)^3 (bk_s)^6. \quad (33b)$$

将(33b)式代入(13)式并利用这里 $N_x = 1$, $N_x s_0 = a$, $N_y s_0 = l$, 故得沿最优方向的总能流密度为

$$u^r = \frac{G}{4608\pi r^2} \rho^2 a^2 l^2 \varepsilon_m^2 v_s \left(\frac{v_s}{c}\right)^3 (bk_s)^6. \quad (34)$$

对 TWGR 总辐射功率的严格计算显然比较复杂, 原因是还不能直接把晶体各参量代入(26)式计算, 因为(26)式只是各振子同步振荡(即 $\xi = \eta = \zeta = 0$) 时的辐射功率, 并非行波型同步振荡的辐射功率. 故对 TWGR 总辐射功率的严格计算, 应从 TWGR 能流密度的原始公式(12)出发, 即

$$\begin{aligned} P &= \int u^r r^2 d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_m \sin^4 \theta \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{N_x}{2} kl_x \sin \theta \cos \phi \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} kl_x \sin \theta \cos \phi \right)} \\ &\quad \cdot \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_y kl_y (1 - \sin \theta \sin \phi) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} kl_y (1 - \sin \theta \sin \phi) \right]} \\ &\quad \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} N_z kl_z \cos \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} kl_z \cos \theta \right)} r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (35)$$

(35)和(23)式的区别主要是等号右端被积函数的第四个因子. 为便于对照类推, 可令 $\beta = kl_y(1 - \sin \theta \sin \phi)$, 故可将其展开为

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N_y kl_y (1 - \sin \theta \sin \phi) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} kl_y (1 - \sin \theta \sin \phi) \right]} &= \left| \sum_{p'=0}^{N_y-1} e^{ip'\beta} \right|^2 \\ &= N_y + 2 \sum_{p'=1}^{N_y-1} (N_y - p') \cos p'\beta \\ &= N_y + 2 \sum_{p'=1}^{N_y-1} (N_y - p') \\ &\quad \cdot \left[1 + \sum_{s'=1}^{\infty} \frac{\{ip'kl_y(1 - \sin \theta \sin \phi)\}^{2s'}}{(2s')!} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } (1 - \sin \theta \sin \phi)^{2s'} &= \sum_{t=0}^{2s'} \frac{(-1)^t (2s')! (\sin \theta \sin \phi)^t}{(2s' - t)! t!} \\ &= (\sin \theta \sin \phi)^{2s'} + \sum_{t=0}^{2s'-1} \frac{(-1)^t (2s')! (\sin \theta \sin \phi)^t}{(2s' - t)! t!}. \end{aligned}$$

把(36)式代入(35)式,并注意到其中的积分 $\int_0^{2\pi} \sin^t \phi d\phi$ 和 $\int_0^{2\pi} \cos^{2t} \phi \sin^t \phi d\phi$ 在 t 为奇数时皆为零,故只有 $t = 2\nu$ (ν 为零和正整数)时才对应着非零项. 于是由前面类似的方法由(35)式算得 TWGR 总辐射功率的严格解析式为

$$\begin{aligned}
 P = & S_m r^2 \left[\frac{32\pi}{15} N_x N_y (N_x + N_y - 1) N_z + 32\sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} N_x N_y (N_x + N_y - 1) \right. \\
 & \cdot \sum_{p''=1}^{N_x-1} (N_x - p'') \frac{J_{5/2}(p'' k l_x)}{(p'' k l_x)^{\frac{5}{2}}} + 144\pi N_x N_z \\
 & \cdot \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{s'=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s'} (N_y - p') [\Gamma(s' + 3)]^2 (p' k l_y)^{2s'}}{(s'!)^2 \Gamma(s' + 6)} + 144\pi N_y N_z \\
 & \cdot \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s (N_x - p) [\Gamma(s + 3)]^2 (p k l_x)^{2s}}{(s!)^2 \Gamma(s + 6)} + 128\pi N_x N_z \\
 & \cdot \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s'-1} (N_y - p') \frac{(-1)^{s'} [\Gamma(\nu + 3)]^2 (p' k l_y)^{2s'}}{\Gamma(2s' - 2\nu + 1) \cdot \Gamma(2\nu + 6) \cdot (\nu!)^2} \\
 & + 32\sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} N_x \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{p''=1}^{N_x-1} \sum_{s'=1}^{\infty} (N_y - p') (N_x - p'') \\
 & \cdot \frac{(-1)^{s'} \Gamma(s' + 3) (p' k l_y)^{2s'} J_{s'+\frac{5}{2}}(p'' k l_x)}{2^{s'} (s'!)^2 \cdot (p'' k l_x)^{s'+\frac{5}{2}}} + 32\sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} N_y \\
 & \cdot \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p''=1}^{N_y-1} \sum_{s=1}^{\infty} (N_x - p) (N_y - p'') \frac{(-1)^s \Gamma(s + 3) (p k l_x)^{2s} J_{s+5/2}(p'' k l_y)}{2^s (s!)^2 (p'' k l_y)^{s+5/2}} \\
 & + 32\sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} N_x \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{p''=1}^{N_x-1} \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s'-1} (N_y - p') (N_x - p'') \\
 & \cdot \frac{(-1)^{s'} \Gamma(\nu + 3) \cdot (p' k l_y)^{2s'} \cdot J_{\nu+5/2}(p'' k l_x)}{\Gamma(2s' - 2\nu + 1) \cdot (\nu!)^2 (p'' k l_x)^{\nu+5/2}} \\
 & + 256\pi \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s'-1} (N_x - p) (N_y - p') \\
 & \cdot \frac{(-1)^{s'} [\Gamma(\nu + 3)]^2 (p' k l_y)^{2s'}}{\Gamma(2s' - 2\nu + 1) \cdot \Gamma(2\nu + 6) \cdot (\nu!)^2} \\
 & + 256\sqrt{\pi} N_z \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s'-1} (N_x - p) (N_y - p') \\
 & \cdot \frac{(-1)^{s+s'} 2^{2s} \cdot \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) [\Gamma(s + s' + 3)]^2 (p k l_x)^{2s} (p' k l_y)^{2s'}}{\left[\prod_{k=1}^s (s + s' - k + 1) \right] (s'!)^2 (2s)! \Gamma[2(s + s') + 6]} \\
 & + 256\sqrt{\pi} N_z \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s'-1} (N_x - p) (N_y - p')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{(-1)^{s+s'} 2^{2s} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) [\Gamma(s + \nu + 3)]^2 (pk l_x)^{2s} (p' k l_y)^{2s'}}{\left[\prod_{k=1}^s (s + \nu - k + 1) \right] \cdot \Gamma[2(s + \nu) + 6] \cdot \Gamma(2s - 2\nu + 1) (2s)! (\nu!)^2} \\
& + 64\sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{p''=1}^{N_z-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s'-1} (N_x - p)(N_y - p')(N_z - p'') \\
& \cdot \frac{(-1)^{s'} \Gamma(\nu + 3) (p' k l_y)^{2s'} \cdot J_{\nu+5/2}(p'' k l_z)}{\Gamma(2s' - 2\nu + 1) \cdot (\nu!)^2 (p'' k l_z)^{\nu+5/2}} \\
& + 64\sqrt{2} \pi \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{p''=1}^{N_z-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{s'=1}^{\infty} (N_x - p)(N_y - p')(N_z - p'') \\
& \cdot \frac{(-1)^{s+s'} 2^{s-s'} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(s + s' + 3) \cdot (pk l_x)^{2s} (p' k l_y)^{2s'} J_{s+s'+5/2}(p'' k l_z)}{\left[\prod_{k=1}^s (s + s' - k + 1) \right] (s')^2 (2s)! (p'' k l_z)^{s+s'+5/2}} \\
& + 64\sqrt{2} \pi \sum_{p=1}^{N_x-1} \sum_{p'=1}^{N_y-1} \sum_{p''=1}^{N_z-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s'-1} (N_x - p)(N_y - p')(N_z - p'') \\
& \cdot \frac{(-1)^{s+s'} 2^{s-\nu} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(s + \nu + 3) \cdot (pk l_x)^{2s} (p' k l_y)^{2s'} J_{s+\nu+5/2}(p'' k l_z)}{\left[\prod_{k=1}^s (s + \nu - k + 1) \right] \Gamma(2s' - 2\nu + 1) \cdot (2s)! (\nu!)^2 (p'' k l_z)^{s+\nu+5/2}} \Big]
\end{aligned} \quad (57)$$

把(37)式和(26)式比较可看出, (37)式右端第 5, 8, 9, 11, 12 和 14 项是比(26)式多出的六个辐射项, 我们已用计算机对这些交错级数项作了数值计算, 发现它们是恒正的. 这意味着 TWGR 不仅比一般同步振荡阵列具有强得多的方向性, 而且还具有大得多的辐射功率. (37) 式右端方括号里的冗长表达式主要是振子数、振子间距离以及引力波矢 k 的函数, 故可简缩地表示为 $F(N_x, N_y, N_z, l_x, l_y, l_z, k)$, 则(37)式可写成

$$P = S_m r^2 \cdot F(N_x, N_y, N_z, l_x, l_y, l_z, k). \quad (38)$$

对于晶体, 其 S_m 已由(33)式所示, 故只要把各量换成晶体辐射基元相应各参量 (这里的 s_0, b 等), 便可得

$$P = \frac{G}{4608\pi} \rho^2 s_0^2 \epsilon_m^2 \nu_s \left(\frac{\nu_s}{c}\right)^5 (bk_s)^6 \cdot F(N_x, N_y, N_z, s_0, b, k). \quad (39)$$

此即是晶体 TWGR 总辐射功率的解析表达式.

下面作具体数例计算, 若仍取文献 [1] 中的典型数例, 即 $l = 30\text{cm}$, $a = 0.3\text{cm}$, $b = 0.03\text{cm}$, $\epsilon_m = 4 \times 10^{-3}$, $\nu = 10^{11}\text{Hz}$, $\nu_s = 5 \times 10^5$, 则相应的 $bk_s = b\omega/\nu_s = 3.76 \times 10^4$, 又 CdS 晶体的 $\rho = 4.82\text{g/cm}^3$. 由于此时晶体本身的几何尺度为 30cm , 故波区场点的最小距离至少要十倍于上述值, 故应取 $r = 300\text{cm}$, 将以上各量代入(34)式算得

$$u^r = 2.84 \times 10^{-9} \text{erg/cm}^2 \cdot \text{s}. \quad (40)$$

若取 $l = 30\text{cm} \times 100 = 3 \times 10^3\text{cm}$, 即一百个这种辐射器串接, 则此时 r 至少应取 $r =$

$10l = 3 \times 10^4 \text{cm}$, 这时由(34)式算得能流密度仍为 $2.84 \times 10^{-9} \text{erg/cm}^2 \cdot \text{s}$. 它表明波区距离的增大抵消了增大的辐射功率对能流密度的贡献, 因而只靠在最优方向上单纯增大晶体长度的线性阵列并不能有效改善能流密度. 所以更好的方案是将其扩展为平面阵列和空间阵列, 同时不显著增大晶体的几何尺度. 若取 $a = 30 \text{cm}$, 由(34)式可得 $u^r = 2.84 \times 10^{-9} \text{erg/cm}^2 \cdot \text{s}$. 若取 $N_z = 100$, 即由 100 个这种晶体组成空间阵列, 则需用空间阵列的普遍公式(12), (13)计算能流密度和最大能流密度, 这时由(13)和(33)式可算得最大能流密度为

$$u^r = 2.84 \times 10^{-1} \text{erg/cm}^2 \cdot \text{s}. \quad (41)$$

由于此时 $N_y k l_y = \frac{2\pi}{\lambda} l = 200\pi$, 所以由(12)式立即可得沿 y 轴反方向的辐射为零, 并且算得辐射主瓣所对应的立体角 $\Omega \sim 10^{-2}$, 这个唯一的辐射主瓣由于集中了绝大部分辐射能, 因而对于 $r = 300 \text{cm}$ 处的接收器, 只需其接收面积达 $r^2 \Omega \sim 10^3 \text{cm}^2$, 则可使几乎整个引力波束落在其接收面内.

四、讨 论

1. 本文开始用到了振子位移 a 远小于其间距离 b 的假定, 这是基于晶体应变峰值一般有 $\varepsilon_m = \left| \frac{d\xi}{dz} \right| = \frac{v_p}{v_s} \ll 1$. 若考虑振子坐标的一般形式 $z = \pm(b + a \sin \omega t)$, 则由(2)式可算得 $D^{11} = D^{22} = -\frac{1}{2} D^{33} = -2m \left[\left(b^2 + \frac{a^2}{2} \right) + 2ab \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{a^2}{2} \cos 2\omega \times \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$, 这意味着振子将以 ω 的基频和 2ω 的倍频辐射引力波, 将晶体应力能量张量 $T^{\mu\nu}$ 取到二级效应也正是与此对应的情况.

2. Seki 等人在文献[1]中提出的 TWGR 理论可作为本文的特例而自然导出. 若旋转坐标使晶体长 l 沿 z 方向, 宽 a 仍沿 x 方向, 厚 b 沿 y 方向, 利用 $\sin[\pi\alpha(1 - \cos\theta)] \approx \pi\alpha(1 - \cos\theta)$, $\sin(\pi\alpha \sin\theta) \approx \pi\alpha \sin\theta$ (其中 $\alpha = s_0/\lambda \ll 1$) 的近似关系和新坐标中 $N_y = 1$ 的特殊条件, 由本文空间阵列角分布的普遍形式(12)立即可推得新坐标中 xz 和 yz 平面内的能流密度(角分布)为

$$u_{y=0}^r \approx S_m N_x^2 N_z^2 \left[\frac{\sin(\pi N_z \alpha \sin\theta)}{\pi N_x \alpha \sin\theta} \right]^2 \left\{ \frac{\sin[\pi N_z \alpha (1 - \cos\theta)]}{\pi N_z \alpha (1 - \cos\theta)} \right\}^2, \quad (42)$$

$$u_{x=0}^r \approx S_m N_x^2 N_z^2 \left\{ \frac{\sin[\pi N_z \alpha (1 - \cos\theta)]}{\pi N_z \alpha (1 - \cos\theta)} \right\}^2 \cos^4\theta. \quad (43)$$

这正是 Seki 所用的角分布因子, 可见它只是本文中两个特殊坐标面内的近似结果. Seki 在(42), (43)式简化近似条件下用数值法只是对趋于线性阵列模型的晶体 ($0.3 \times 30 \times 0.03 \text{cm}^3$ 的 CdS) 作了计算. 按照本文的普遍公式(26)和(37), 则可对任一空间阵列模型晶体的同步振荡型和行波型引力辐射功率作严格的计算. 我们用计算机所作的初步计算表明, 除了在上述线性阵列条件下算得与 Seki 基本相符的结果 (约为 $0.7 \times 10^{-5} \text{erg/s}$) 外, 还发现即使在晶体总尺度一定的前提下, 较小的辐射基元 (因而较多的基元数) 比较大的辐射基元 (因而较小的基元数) 具有更高的辐射效率.

3. 从本文对能流密度的计算可看出, 提高 TWGR 能流密度的关键除了尽可能增大单个基元(振子)的辐射功率外, 还必需使处在最佳声学共振状态下的晶体尽可能地形成最大程度的 TWGR 同步加强. 在相同晶体大小的情况下, 应采用适当的空间阵列的形式, 以尽可能地减小晶体到波区的距离.

4. 实验的基本设想

基于上述讨论, 我们对实验的基本设想是: 选择合适的晶体组成阵列, 用同一基准频率源产生与晶体本征频率相同的信号, 经过延迟网络校正后使阵列中各基元以最佳 TWGR 相位进行振荡. 接收器也可采用相同的晶体阵列, 置于辐射最佳方向, 在排除电磁波直馈的可能性后, 通过压电晶体的输出信号来检测引力波.

关于具体的设计考虑, 理论计算的典型数值, 辐射角分布图形, 对总辐射功率解析式的数值计算, 由于篇幅所限, 我们将另文给予详细讨论.

工作中, 我们和王宗笠、俞义樵同志作过有益的讨论. 本工作得到四川省基础研究基金的资助.

参 考 文 献

- [1] H. Seki *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **44** (1973), 2401.
- [2] J. Weber *Phys. Rev.*, **117** (1960), 306.
- [3] J. Weber, 广义相对论与引力波, 科学出版社, (1977), 133—137页.
- [4] H. C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton, New York, (1976), p. 155.
- [5] W. R. Smythe, 静电学和电动力学, 科学出版社, (1982), 下册, 660页.
- [6] M. T. Ma, *Theory and Application of Antenna Arrays*, (1974), §1.2.
- [7] W. Grill *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **9** (1975), 588.
- [8] W. E. Bron *et al.*, *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 1370.
- [9] R. Baumgartner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1403.

NARROW WAVE BEAM-TYPE GRAVITATIONAL RADIATION OF SPACE ARRAYS

LI FANG-YU

TANG MENG-XI

(Department of Applied Physics, Chongqing University) (Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

This paper touches upon gravitational radiant power and radiant angle distribution of space rectangular lattice arrays of mass quadrupole oscillators, and gives analytic expression. The calculation show that these arrays can generate narrow gravitational radiation wave beam which has the best directional property. The travelling wave type gravitational radiation theory, developed by Seki and his colleagues, may be regarded as a specific case of the work in this paper and can be derived naturally. Under the condition of ideal ultrahigh frequency acoustic resonance and perfect travelling wave type synchronism intensification, an numerical example calculated with our method shows that energy flux density of gravitational radiation of optimum direction of space array which consists of 100 CaS crystals of $30 \times 30 \times 0.03 \text{ cm}^3$ would amount to $2.84 \times 10^{-1} \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{s}$. This result shows the potentiality of crystal space arrays exciting high-frequency gravitational radiation.