

RL^m 子区拓扑熵等值性的证明

翁甲强 孔令江 陈光旨

(广西师范大学物理系)

1986 年 12 月 23 日收到

提 要

本文证明了 RL^m 子区整个子区内拓扑熵等值,同时,揭示了高级混沌带对拓扑熵无贡献的性质.

关于一维单峰映象拓扑熵的问题,在 1982 年 Crutchfield 与 Packard^[1] 工作的基础上,文献[2—4]继续作了若干工作,并对倍周期分岔拓扑熵的等值问题作了讨论.本文则进一步证明了 RL^m 子区(本文所说的 RL^m 子区,是指一维单峰映象中从 $m+2$ 周期轨道 $RL^m R$ 的出现开始至由该周期分岔而产生的二级混沌带结束为止的一类参数区间, $m=1, 2, \dots, \infty$)整个子区的拓扑熵等值,并揭示了高级混沌带对拓扑熵没有贡献的特征.

为了叙述方便,下面把 RL^m 写成 RL^{k-2} , 其中 $k=3, 4, 5, \dots, \infty$ 表示该子区的周期数.证明过程可把子区分为两段进行,即从子区开始至正周期 $RL^{k-2}C$ 为一段,从正周期处至子区结束为另一段.

从子区开始至正周期一段的证明较简单.下面先给出这一段的证明.这一段由文献[5]可知,在分岔图中,它处于 $RL^{k-2}C$ 的左侧,用 R, L 表示的“字”为 $RL^{k-2}R$. 对于 3 周期子区,其轨道如图 1 所示. 因为对于这种情况,从 C 点出发作 3 次自身映象,第 3

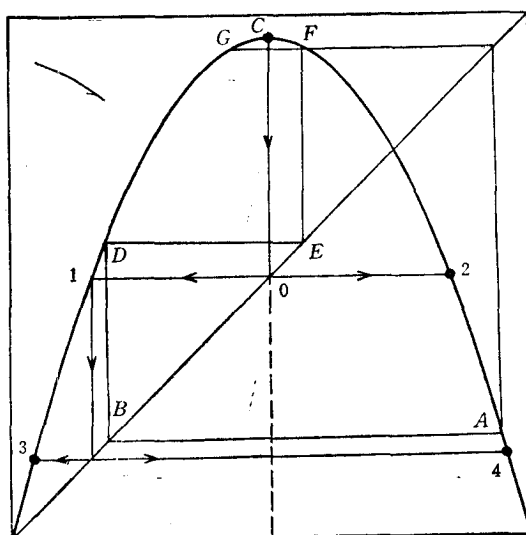


图 1 RLR 型三周期及逆轨道示意图

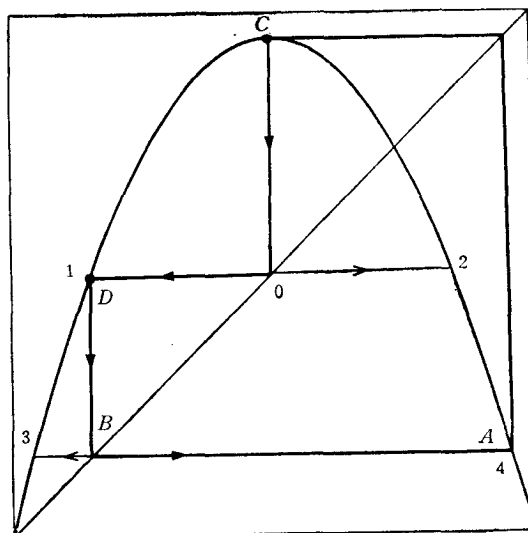


图 2 RLC 正 3 周期及逆轨道示意图

次映象所得的轨道必在 C 点的右侧(否则,不可能形成 RLR 型稳定轨道),所以,反过来,从 C 点出发作两次逆映象,所得的轨道 4 若再求逆,则必超出 C ,不可能与 $f(x)$ 相交,也就是说,4 不能产生新的逆轨道. 这与正 3 周期 RLC 相应的逆轨道行为一致(参看图 2). 至于两个图形中分别标为 2 和 3 的逆轨道,继续作逆映象时,其演化行为更是对应相同. 所以,对于 RLR 和 RLC 两种情况,从 C 点出发作逆映象,作 n 次所生成的逆轨道总数 $N_1(n)$ 是完全相等的.

根据拓扑熵的定义^[1]

$$h(f) = \sup_U h(f, U). \quad (1)$$

此处

$$h(f, U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(U \circ f^{-1} U \circ f^{-2} U \circ \cdots \circ f^{1-n} U). \quad (2)$$

Crutchfield 得出,若以 0 为界限,把自身映象空间分成两个元素,并取这样的两个元素作为基本开覆盖,则求 n 次逆映象所得的覆盖细化子集合总数 $N(n)$ 最大. 这时, (1), (2) 两式可合并写为

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n). \quad (3)$$

而 $N(n)$ 与 $N_1(n)$ 仅相差 1 ($N(n)$ 比 $N_1(n)$ 大 1), 这个差别对于大数目的 $N(n)$ 来说是无足轻重的, 所以由上可知, 不同参数值的 RLR 处的拓扑熵与超稳定点处的拓扑熵相等. 这个结论显然可以推广至 k 等于 4, 5 直至 ∞ 的情形, 故从子区开始至正周期 $RL^{k-2}C$ 一段拓扑熵等值得证.

从正周期至子区结束一段, 可借助二级混沌带中的 $RL^{k-2} * RL^{l-2}$ 序列进行论证. 为此, 我们必须首先找出求 k 周期和 $k \cdot l$ 周期处作 n 次逆映象后覆盖细化子集合数 $N(n)$ 的办法.

求 $N(n)$ 的办法之一是由 R, L 所构造的“字”找出其相应的差分方程或差分方程组,

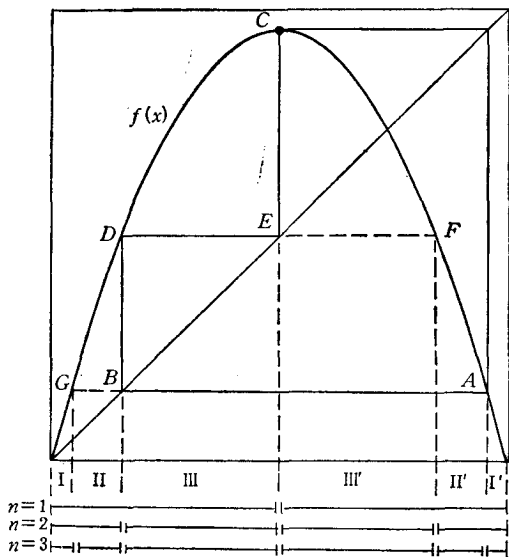


图 3 映象空间区域划分及覆盖细化示意图

再由方程或方程组求出 $n \rightarrow \infty$ 时的极限解. 例如对于“字” RL , 可画出超稳定轨道 $ABDEC$ 如图 3 所示. 延长 AB 交 $f(x)$ 于 G , 延长 DE 交 $f(x)$ 于 F . 分别由 G, D, E, F 和 A 作横轴的垂线, 则各垂足把映象空间划分为 I, II, III, III', II' 和 I' 六个区域. 今取 $n=1$ 时的基本覆盖 U 的元素数为 $N(1)=2$, 并使这两个覆盖元分别覆盖了 I 至 III 区域和 III' 至 I' 区域. 由图 3 可以看出, 这样取定基本覆盖后, 作若干次逆映象 (k 周期须作 k 次), 所生成的子覆盖不再跨区间. 如果我们用 $w_I(n), w_{II}(n), w_{III}(n)$ 分别表示作 n 次逆映象后区间 I, II 与 III 中的子集合数, 则由图 3 可知这些子集合数分别服从如下关

系:

$$w_I(n) = w_I(n-1) + w_{II}(n-1), \quad (4)$$

$$w_{II}(n) = w_{III}(n-1), \quad (5)$$

$$w_{III}(n) = w_{II}(n-1) + w_{III}(n-1). \quad (6)$$

由图 3 又可知

$$N(n) = 2[w_I(n) + w_{II}(n) + w_{III}(n)]. \quad (7)$$

利用关系(4),(5)和(6)式消去(7)式中的 $w_I(n)$, 我们便得到 RL 处 $N(n)$ 所服从的差分方程

$$N(n) = 2N(n-1) - N(n-3). \quad (8)$$

用同样的办法, 不难求出其它 RL^{k-2} 处 $N(n)$ 所服从的方程. 推求的结果得知, 对于 RL^{k-2} 类型, 可以统一用下式表示:

$$N(n) = 2N(n-1) - N(n-k). \quad (9)$$

此处 $k=3, 4, \dots, \infty$.

对于 $RL^{k-2} * RL^{l-2}$, 情况稍复杂些, 须用一对差分方程联立表示. 不过, 导出方程组的方法却仍与上面相同. 不失一般性, 下面以 $3 \cdot 3p$ 为例进行详细推导. $3 \cdot 3p$, 相应的“字”为 RL^2RLR^2L , 采用图 3 的办法, 可相应地把映象空间分成18个区域. 作9次逆映象之后, 这些区域中的子集合数服从下面关系:

$$w_1(n) = w_1(n-1) + w_2(n-1) + w_3(n-1) + w_4(n-1), \quad (10)$$

$$w_2(n) = w_5(n-1), \quad (11)$$

$$w_3(n) = w_6(n-1), \quad (12)$$

$$w_4(n) = w_7(n-1), \quad (13)$$

$$w_5(n) = w_8(n-1) + w_9(n-1), \quad (14)$$

$$w_6(n) = w_9(n-1), \quad (15)$$

$$w_7(n) = w_4(n-1) + w_5(n-1) + w_6(n-1) + w_7(n-1) + w_8(n-1), \quad (16)$$

$$w_8(n) = w_3(n-1), \quad (17)$$

$$w_9(n) = w_2(n-1). \quad (18)$$

而

$$N(n) = 2[w_1(n) + w_2(n) + \dots + w_9(n)]. \quad (19)$$

于是, 根据(10)至(19)式有

$$\begin{aligned} N(n) &= 2\{[w_1(n-1) + w_2(n-1) + w_3(n-1) \\ &\quad + w_4(n-1)] + w_5(n-1) + w_6(n-1) \\ &\quad + w_7(n-1) + [w_8(n-1) + w_9(n-1)] \\ &\quad + w_9(n-1) + [w_4(n-1) + w_5(n-1) \\ &\quad + w_6(n-1) + w_7(n-1) + w_8(n-1)] \\ &\quad + w_3(n-1) + w_2(n-1)\} \\ &= 2N(n-1) - 2w_1(n-1), \\ w_1(n-1) &= w_1(n-2) + \dots + w_4(n-2) \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned}
 &= w_1(n-3) + \cdots + w_7(n-3) \\
 &= \frac{1}{2} N(n-3) - [w_8(n-3) + w_9(n-3)], \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_8(n-3) + w_9(n-3) &= w_3(n-4) + w_2(n-4) \\
 &= w_6(n-5) + w_5(n-5) \\
 &= w_9(n-6) + [w_8(n-6) + w_9(n-6)] \\
 &= 2[w_8(n-6) + w_9(n-6)] \\
 &\quad - w_8(n-6), \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_8(n-6) &= w_3(n-7) = w_6(n-8) = w_9(n-9) = w_2(n-10) \\
 &= w_5(n-11) = w_8(n-12) + w_9(n-12). \quad (22)
 \end{aligned}$$

把(22)式代入(21)式得

$$\begin{aligned}
 w_8(n-3) + w_9(n-3) &= 2[w_8(n-6) + w_9(n-6)] \\
 &\quad - [w_8(n-12) + w_9(n-12)], \quad (21a)
 \end{aligned}$$

令 $M(n-1) \equiv w_8(n-1) + w_9(n-1)$, 则上式可简写为

$$M(n-3) = 2M(n-6) - M(n-12), \quad (21b)$$

而把(20)式代入(19a)式,并采用符号 $M(n-1)$,[†]则有

$$N(n) = 2N(n-1) - N(n-3) + 2M(n-3). \quad (19b)$$

由于初值关系,由(21b)式算出的 $M(n-3)$ 的值总是每三个连续重复地出现。为了避免重复计算,我们不妨把(21b)式写成

$$M(n-1) = 2M(n-4) - M(n-10), \quad (21c)$$

并令

$$m = INT\left(\frac{n-1}{3}\right), \quad (23)$$

进而把(21c)式改写为

$$M(m) = 2M(m-1) - M(m-3). \quad (21d)$$

相应地,(19b)式也变为

$$N(n) = 2N(n-1) - N(n-3) + 2M(m). \quad (19c)$$

(19c)和(21d)式就是我们要求的 $3 \cdot 3p$ 处 $N(n)$ 所服从的差分方程组,其中 m, n 关系由(23)式决定。如此类推,我们不难得到所有 $k \cdot lp$ 处的 $N(n)$ 所服从的差分方程组

$$N(n) = 2N(n-1) - N(n-k) + 2M(n), \quad (24)$$

$$M(m) = 2M(m-1) - M(m-l), \quad (25)$$

而 m 与 n 的关系为

$$m = INT\left(\frac{n-1}{k}\right). \quad (26)$$

例如,对于 $4 \cdot 3p$, 根据“字” $RL^3RL^2R^2L^2$, 仿照求 $3 \cdot 3p$ 的办法,我们有

$$w_1(n) = w_1(n-1) + w_2(n-1) + w_3(n-1) + w_4(n-1), \quad (27)$$

$$w_2(n) = w_5(n-1), \quad (28)$$

$$w_3(n) = w_6(n-1), \quad (29)$$

$$w_4(n) = w_7(n-1), \quad (30)$$

$$w_5(n) = w_8(n-1), \quad (31)$$

$$w_6(n) = w_9(n-1), \quad (32)$$

$$w_7(n) = w_{10}(n-1), \quad (33)$$

$$w_8(n) = w_{11}(n-1) + w_{12}(n-1), \quad (34)$$

$$w_9(n) = w_{12}(n-1), \quad (35)$$

$$w_{10}(n) = w_4(n-1) + w_5(n-1) + w_6(n-1) + w_7(n-1) \\ + w_8(n-1) + w_9(n-1) + w_{10}(n-1) + w_{11}(n-1), \quad (36)$$

$$w_{11}(n) = w_3(n-1), \quad (37)$$

$$w_{12}(n) = w_2(n-1). \quad (38)$$

于是

$$N(n) = 2[w_1(n) + \cdots + w_{12}(n)] = 2N(n-1) - 2w_1(n-1), \quad (39)$$

$$w_1(n-1) = \frac{1}{2} N(n-4) - [w_{11}(n-4) + w_{12}(n-4)], \quad (40)$$

$$w_{11}(n-4) + w_{12}(n-4) = 2[w_{11}(n-8) + w_{12}(n-8)] \\ - [w_{11}(n-16) + w_{12}(n-16)]. \quad (41)$$

令 $M(n-1) \equiv w_{11}(n-1) + w_{12}(n-1)$, 则(41)式可简写为

$$M(n-4) = 2M(n-8) - M(n-16). \quad (41a)$$

把(40)式代入(39)式并采用符号 $M(n-1)$, 则有

$$N(n) = 2N(n-1) - N(n-4) + 2M(n-4). \quad (39a)$$

把(41)式, 写为

$$M(n-1) = 2M(n-5) - M(n-13), \quad (41b)$$

$$\text{并令 } m = \text{INT}\left(\frac{n-1}{4}\right), \quad (42)$$

则由(39a)和(41a)式得到了满足(24)和(25)式的结果

$$N(n) = 2N(n-1) - N(n-4) + 2M(m), \quad (39b)$$

$$M(m) = 2M(m-1) - M(m-3). \quad (41c)$$

根据(24)–(26)式, 原则上只要给出若干初值, 就可以求出任意 n 下的 $N(n)$, 不过由于计算拓扑熵需要的只是 $n \rightarrow \infty$ 时的极限情况, 所以我们并不须进行繁琐的迭代运算, 可以从其相应的极限方程考虑之. 令 $n \rightarrow \infty$ 时 $N(n) \equiv \alpha^n$, $m \rightarrow \infty$ 时 $M(m) \equiv \beta^m$, 则得到(9), (24)和(25)式相应的极限方程如下:

$$\alpha^k - 2\alpha^{k-1} + 1 = 0, \quad (9a)$$

$$\alpha^k - 2\alpha^{k-1} + 1 = 2 \frac{\beta^m}{\alpha^{n-k}}, \quad (24a)$$

$$\beta^l - 2\beta^{l-1} + 1 = 0. \quad (25a)$$

(9a) 式为 k 周期处所服从的极限方程, (24a) 和 (25a) 式为 $k \cdot lp$ 处所服从的极限方程组. 现在, 只要求出这些代数方程或方程组中 α 的大于 1 的实数根, 则由(3)式可得相应的拓扑熵值

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha^n = \log \alpha. \quad (3a)$$

例如由(9a)式,对于 $k=3, 4, 5$ 和 6 ,求得相应的拓扑熵值分别为 $0.4812118, 0.6093779, 0.6562560, 0.6759747$, 与文献[6]完全相同。

当然,为了证明从正 k 周期至子区结束一段拓扑熵等值,我们仅求出系列离散点的拓扑熵值是不够的。实际上,也没有必要把每个离散点的值都求出来。只要利用一维单峰映象拓扑熵值随参数的变大而单调增加的性质,证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, (24a) 式等号右端的 $\beta^m / \alpha^{n-k} \rightarrow 0$ 就可以了。

一维单峰映象的拓扑熵值随参数的变大而单调增加的性质是明显的。从图4可以直观看出,在求逆轨道的过程中,凡逆轨道落在点划线 AB 左侧者,如图4中的逆轨道1, 2, 3, 下一次逆映象仍能够产生两条逆轨道,而落在右侧者,如图4中的逆轨道4, 则不可能再产生新的逆轨道了。于是,当参数改变时,若落在点划线 AB 右侧的逆轨道减少,则在求逆次数保持不变的情况下,所能产生的逆轨道增多,从而拓扑熵值增大。对于一维单峰映象,因为随着参数的变大峰值变高,点划线 AB 随之右移,所以作逆映象的过程中碰到的正是上述情况,故必然有单调增加性。

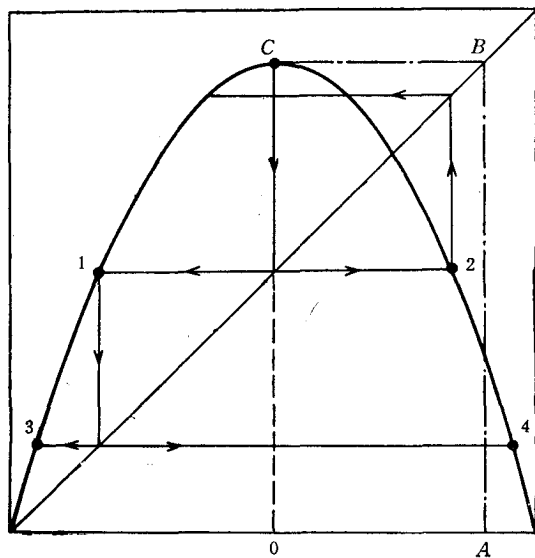


图4 逆轨道示意图

根据拓扑熵的单调增加性,对于一级混沌带中的同一个子区,由方程(24a)求出的 α 值应不小于由(9a)式求出的。要证明 $\beta^m / \alpha^{n-k} \rightarrow 0$, 分母中的 α 一般可取同一 k 值下各 α 的下界,即由(9a)式求出的 α 值。不过,实际上我们还可以把条件放宽些,取所有可能的 k 中 α 值最小的一个,即取 $k=3$ 时方程(9a)的大于1的实根

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (43)$$

进行考虑。而 β , 也可以取最大的一个,即 $l \rightarrow \infty$ 时的极限值

$$\beta = 2, \quad (44)$$

于是,当 k 有限而 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\beta^m}{\alpha^{n-k}} \leq \frac{\beta^{\frac{n-1}{k}}}{\alpha^{n-k}} = \left[\frac{\beta^{\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k(n-k)}}}{\alpha} \right] \leq \left(\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\alpha} \right)^{n-k} \leq \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}}{2} \right) \rightarrow 0.$$

当 $k \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ 时,由于 n 的取值可任意大,不妨取 $n \geq 2k$, 那么

$$\frac{\beta^m}{\alpha^{n-k}} \leq \frac{\beta^{\frac{n-1}{k}}}{\alpha^{n-k}} \leq \frac{\beta^2}{\alpha^k}.$$

因为 $\alpha > 1$, 所以上式仍然等于零.

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时 (24 a) 式等号右端为零, 故这时它回到了 (9a) 式, 所以, 对于 $RL^{k-2} * RL^{l-2}$ 系列, 其拓扑熵值与 RL^{k-2} 处的相等. 由于拓扑熵的单调增加性, 且 $L \rightarrow \infty$ 时 $k \cdot lp$ 周期为 RL^{k-2} 子区的末端, 故从 RL^{k-2} 开始至该子区结束, 拓扑熵也等值. 这样一来, 我们就证明了 RL^{k-2} 子区整个子区的拓扑熵保持不变的性质, 同时也就证明了这类子区中的二级混沌带, 从而一切高级混沌带对拓扑熵没有贡献.

工作中曾与郝柏林研究员做过有益的讨论, 特此感谢.

参 考 文 献

- [1] J. P. Crutchfield, N. H. Packard, *International J. Theor. Phys.*, 21(1982), 433.
- [2] 陈瑞熊、翁甲强、任炳奇, 广西师范大学学报(自然科学版), (2)(1985), 21.
- [3] 陈瑞熊、翁甲强、郑步南, 广西师范大学学报(自然科学版), (1)(1986), 16.
- [4] 陈瑞熊、陈式刚, 物理学报, 35(1986), 1338.
- [5] 郝柏林, 物理学进展, 3(1983), 329.
- [6] C. S. Hsu, M. C. Kin, *Phys. Rev.*, 31A(1985), 3253.

A PROOF ON THE EQUIVALENCE OF TOPOLOGICAL ENTROPY AT SUBREGION WINDOW OF RL^m

WENG JIA-QIANG KONG LING-JIANG CHEN GUANG-ZHI

(Department of Physics, Guangxi Normal University, Guilin)

ABSTRACT

We demonstrate that topological entropy is equivalent on the whole subregion of RL^m . We also show that the high-order chaotic bands give no contribution to topological entropy in these subregions.