

非均匀磁场中的动力论漂移迴旋 损失锥不稳定性*

郭世宪 沈解伍 蔡诗东

(中国科学院物理研究所)

1987 年 1 月 7 日收到

提 要

本文从解析和数值计算两种途径仔细研究了磁场非均匀性漂移共振的动力论效应对于漂移迴旋损失锥不稳定性 (DCLC) 的影响。发现在高 β 等离子体中, 磁场非均匀效应是非常重要的, 磁漂移共振对于负能的模起耗散作用, 从而使原有的 DCLC 不稳定性加强, 而且不稳定性的参数区域大大扩展了。有限 β 值效应并没有象流体近似理论所预言的那样使 DCLC 模稳定。

一、引 言

DCLC 不稳定性, 是磁镜装置中最重要的不稳定性之一。它可能造成反常的粒子损失而导致磁镜约束被破坏, 实验中观察到的这种扰动的特征参数^[1]为: $\omega \sim \Omega_{ci}$, $k_{\perp} \rho_i \gg 1$, $k_{\perp} \rho_e \ll 1$, $k_{\parallel} \approx 0$ 。这里 ω 为模频率, Ω_{ci} 为离子拉莫尔频率, ρ 为拉莫尔半径, 下标 i, e 分别表示离子和电子, $k_{\perp}, k_{\parallel}$ 分别表示垂直于和平行于磁场方向的波数。

关于 DCLC 的理论工作, 最早是由 Post 和 Rosenbluth 给出了低 β 下静电模的解析理论^[2], 以后又相继出现了大量的工作^[2-10], 其中, Tang 等人^[3]讨论了有限 β 值对 DCLC 模的稳定效应; Gerver^[4] 及 Berk^[5] 等人研究了填充温离子对漂移-损失锥不稳定性的稳定作用; 此外, Baldwin 等人^[6]做了准线性理论方面的工作。据作者所知, 所有以上的工作都是基于流体近似理论做的, 即 DCLC 不稳定性, 是由于正能、负能两种波耦合的结果^[8], 其中正能波是在离子逆磁漂移方向传播的电子漂移波, 负能波是损失锥离子的 Bernstein 波。不稳定性的自由能源是等离子体密度的不均匀性; $\nabla n \neq 0$, 以及离子的非平衡损失锥分布。

本文的目的是讨论非均匀磁场的动力论效应对于 DCLC 不稳定性的影响。在高 β 的磁镜装置中, 磁场的非均匀性是很重要的效应, 粒子由于磁场非均匀性产生的漂移, 可能与垂直于磁场传播的波产生共振 (以下称为磁漂移共振), 大大影响了原有的流体近似下 DCLC 不稳定性的性质。在高 β 装置和近反应堆的磁镜装置中, 磁场梯度效应不仅本身提供了新的自由能源, 而且提供了新的波-粒子间能量交换的渠道, DCLC 模的不稳定性不再单纯依赖于正负能波的耦合, 而受到磁漂移共振的动力论效应的重大影响。研

* 中国科学院科学基金资助的课题。

究发现,在很大参数范围内,磁漂移共振对负能的模起耗散作用,从而驱动了模的不稳定性。有限 β 值效应不但不能使 DCLC 模稳定,反而使原来流体近似理论所预言的不稳定参数区域扩大了。模的稳定化机制在两种理论中也是完全不同的。

二、色散关系的推导

在磁镜中我们取电子为各向同性的麦克斯韦分布,离子为损失锥分布,为了与已有的结果进行比较,我们取与 Tang 等人相同的等效损失锥分布函数^[3,4]

$$F_e = \frac{n}{\pi^{3/2}\alpha_e^3} e^{-\frac{v^2}{\alpha_e^2}}, \quad (1)$$

$$F_i = \frac{n}{\alpha_{\parallel i}\alpha_{\perp i}^2\pi^{3/2}} \left(\frac{R}{R-1} \right) \left[\exp\left(-\frac{v_{\perp i}^2}{\alpha_{\perp i}^2}\right) - \exp\left(-\frac{Rv_{\parallel i}^2}{\alpha_{\perp i}^2}\right) \right] \cdot \exp(-v_{\parallel i}^2/\alpha_{\parallel i}^2), \quad (2)$$

其中 R 为镜比。以下我们取 $\alpha_{\perp i} = \alpha_{\parallel i}$ 。

从已有的任意磁场位形中非均匀等离子体的普遍色散关系^[11],可以直接简化到在局域近似下回旋漂移损失锥模的色散关系。在简化过程中根据该模的物理特征,我们假设: $k_{\parallel} \simeq 0$, $k_{\perp} = k_{\theta} = k$, $k^2\rho_e^2 \ll 1$ 并且 $k^2\rho_i^2 \gg 1$ 。在磁场不均匀性中只集中讨论磁场梯度效应。计入曲率效应对于最后关于不稳定性性质的结论并没有重要改变。在色散关系中包括了电子的电磁效应。在基矢 $(\tilde{\varphi}, \tilde{A}_{\parallel}, \tilde{B}_{\parallel})$ 上可将色散关系表示为

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \chi_{e11} + \chi_{i1}^{LS} & 0 & \chi_{e13} \\ 0 & 1 - \frac{\omega^2}{k^2 c^2} + \chi_{e22} & 0 \\ \chi_{e31} & 0 & 1 - \frac{\omega^2}{k^2 c^2} + \chi_{e33} \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi_{e11} &= \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2\alpha_e^2} + \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2\alpha_e^2} (\omega_{*e} - \omega) \left\{ F_{11}(\omega, a_e, 0) - \frac{k^2\alpha_e^2}{2Q_e^2} F_{21}(\omega, a_e, 0) \right\}, \\ \chi_{e13} &= -\frac{\chi_{e31}}{k^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2 Q_e} (\omega_{*e} - \omega) \left\{ F_{21}(\omega, a_e, 0) - \frac{3}{4} \frac{k^2\alpha_e^2}{Q_e^2} F_{31}(\omega, a_e, 0) \right\}, \\ \chi_{e22} &= -\frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2} (\omega_{*e} - \omega) \left\{ F_{11}(\omega, a_e, 0) - \frac{k^2\alpha_e^2}{2Q_e^2} F_{21}(\omega, a_e, 0) \right\}, \\ \chi_{e33} &= -\frac{\omega_{pe}^2\alpha_e'}{k^2 c Q_e^2} (\omega_{*e} - \omega) F_{31}(\omega, a_e, 0), \\ \chi_{i1}^{LS} &= \chi_{i11}(\alpha_{\perp} = \alpha_i) \frac{R}{R-1} - \chi_{i11} \left(\alpha_{\perp} - \frac{\alpha_i}{\sqrt{R}} \right) \frac{1}{R-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_i^3} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{R}{R-1} (\omega_{*i} - \omega) F_{11}(\omega - l\Omega_i, 0, a_i) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{R}}{R-1} (\omega_{*i} - R\omega) F_{11}\left(\omega - l\Omega_i, 0, \frac{a_i}{R}\right) \right\}, \\
&\omega_{*i} \equiv \frac{1}{2} k\alpha_i^2 \frac{\epsilon'}{Q_i}, \quad a_i \equiv \frac{\beta}{4} k\alpha_i^2 \frac{\epsilon'}{Q_i} = -\omega_{Bi}, \\
&\omega_{pi}^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_i}, \quad \beta = \frac{8\pi n(T_e + T_i)}{B^2}, \\
&F_{mn}(\omega, a_i, b_j) \equiv \\
&= i \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} dt}{(1 - ia_i t)^m (1 - ib_j t)^{n-\frac{1}{2}}} \quad j = i, e. \quad (4)
\end{aligned}$$

以下称 F_{mn} 为等离子体漂移色散函数^[12], Ω_i 表示拉莫尔频率, ω_B 表示磁场梯度漂移频率. 很明显, 在色散关系(3)式中, 磁漂移共振效应项 a_i 都包含在 F_{mn} 函数中.

在上述推导中我们利用了平衡关系: $\epsilon' = -\frac{2}{\beta} \epsilon$, 这里 $\epsilon' = \frac{\nabla n}{n} \cdot \mathbf{e}_r$, $\epsilon = \frac{\nabla B}{B} \cdot \mathbf{e}_r$.

$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_t$ 为径向单位矢量. 此外, 由于 $\omega \sim \Omega_i \ll \Omega_e$, 所以在电子的极化率 χ_e 中只取 $l=0$ 的贡献, 在推导离子的极化率时注意到对损失锥分布函数 $F_i(v_\perp=0)=0$, 所以把 $\chi_i(\alpha_\perp)$ 中相应于积分 $\int \frac{\partial^2 F}{\partial v_\perp^2} d^2 v_\perp$ 的全部项在取有限个谐数加以讨论之前, 事先提到 $\sum_l$ 号之外(见附录). (3) 式为非均匀磁场中包含电子、离子动力论效应的 DCLC 色散关系. 由于电子的磁漂移频率 $|a_e| \ll \omega \sim \Omega_i$, 可以知道电子的磁漂移共振效应不重要, 我们将色散关系(3)式作进一步简化.

由

$$\begin{aligned}
F_m(\omega, a_e, 0) &\equiv -i \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{(1 - ia_e t)^m} dt \\
&= \frac{1}{a_e} e^{\frac{\omega}{a_e}} E_m\left(\frac{\omega}{a_e}\right) \quad (5)
\end{aligned}$$

(这里 E_m 为指数积分函数), 将其作大宗量展开后代入(3)式, 再经过一系列代数运算, 可以得到如下的色散关系:

$$D = 1 + \chi_e + \chi_i^{LS} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\chi_e &= \frac{m_e}{m_i} W_{pi}^2 - \frac{W_{pi}^2 \epsilon'}{WK} \left[1 + \frac{\beta_i}{2} (1 - \tau) \right] \\
&\quad + \frac{W_{pi}^2}{K^2} \beta_i, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\chi_i^{LS} = \frac{2W_{pi}^2}{K^3 \sqrt{\pi}} \left(\frac{R+1}{R} \right)^{3/2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{R}{R-1} (W_{*i} - W) F_{11}(W - l, 0, A_i) \right.$$

$$-\frac{\sqrt{R}}{R-1} (W_{*i} - RW) F_{ii}(W-l, 0, A_i/R) \}. \quad (8)$$

这里 m_i 为粒子质量, $W_{pi} \equiv \frac{\omega_{pi}}{\Omega_i}$, $W = \frac{\omega}{\Omega_i}$, $\epsilon' = |\epsilon'| \rho_i$, $\rho_i = \frac{\alpha_{\perp i}}{\Omega_i} \left(\frac{R+1}{R} \right)^{1/2}$, $K = k\rho_i$, $\tau = T_e/T_i$, $W_{*i} = \frac{\omega_{*i}}{\Omega_i} = -\frac{1}{2} K \epsilon' \frac{R}{R+1}$, $A_i = \frac{a_i}{\Omega_i} = -\frac{\beta}{4} K \epsilon' \frac{R}{R+1}$.

在(6)式所表示的色散关系中,如果不考虑磁漂移的共振效应,在 $A_i \rightarrow 0$ 的极限下可以重复 Tang 等人^[3]的结果,在 $\beta_i \rightarrow 0$ 的极限下,可以重复 Post 等人^[2]在低 β 下静电色散关系的结果.

三、解析分析与数值计算

在色散关系(6)式中包含了两种可能的不稳定性机制,一种是流体近似下 $\left(\left| \frac{\omega-l}{\omega_B} \right| \gg 1 \right)$, 正、负能波耦合的机制^[8,9],另一个是离子的 ∇B 磁漂移与负能的离子 Bernstein 波共振产生的波-粒子能量交换机制,也就是动力论效应. 为了对动力论效应的影响有更清楚的认识,我们首先简要地给出流体近似下的结果,然后着重讨论在流体近似下稳定的模,仍有由动力论共振驱动的不稳定性的情形.

1. 流体近似理论

当 $\left| \frac{W-l}{A_i} \right| \gg 1$ 时,可以利用以下关系式将函数 F_{ii} 作大宗量展开^[10]:

$$F_{ii}(W-l, 0, A_i) = \frac{1}{A_i} \frac{1}{\sqrt{\frac{W-l}{-A_i}}} Z_i \left(\sqrt{\frac{W-l}{-A_i}} \right), \quad (9)$$

Z_i 为等离子体色散函数,注意(9)式成立条件为 $\text{Im}W > 0$, 当 $\text{Im}W < 0$ 时,应当利用 Z_i 函数的解析性质,作适当的解析延拓.

保留实部最低阶项,可以得到流体近似下的色散关系^[3]

$$X + \frac{\epsilon'}{KW} c_2 + \frac{\beta_i}{K^2} + \frac{c_1}{K^3} \left(W + \frac{W_{*i}}{\sqrt{R}} \right) \sum_l \frac{1}{W-l} = 0. \quad (10)$$

这里 $X = \frac{1}{W_{pi}^2} + \frac{m_e}{m_i}$, $c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(R+1)^{3/2}}{R + \sqrt{R}}$, $c_2 = 1 + \frac{\beta_i}{2} (1 - \tau)$,

$$\frac{W_{*i}}{\sqrt{R}} = -\frac{1}{2} K \epsilon' d, \quad d \equiv \frac{\sqrt{R}}{R+1}.$$

(10)式中等号左端前三项为真空项和电子的响应,其中第三项表示有限 β 值下的电子电磁效应,后两项为损失锥离子的响应,其中包含 W_{*i} 的项为离子密度梯度的贡献. 为了与动力论理论相比较,我们这里只讨论基频 ($\omega \approx -\Omega_i$) 的情况,故取 $l = 0, -1$, 得到

$$\left(X + \frac{\beta_i}{K^2} + \frac{2c_1}{K^3} \right) (W+1)^2 + \left[\left(\frac{c_2}{K} - \frac{c_1 d'}{K^2} \right) \epsilon' \right]$$

$$-\left(X + \frac{B_1}{K^2} + \frac{2c_1}{K^3}\right)\left[(W+1) + \frac{c_1}{K^3} + \frac{c_1 d}{2K^3}\sigma'\right] = 0. \quad (11)$$

方程(11)的两个根相应两支不同的模,当判别式 $B^2 - 4AC < 0$ 时,(11)式有一对共轭复根,表示出两支模相互耦合产生不稳定性,在远大于不稳定性阈值的条件下,不稳定性的增长率近似为

$$W_1 = \sqrt{\frac{c_1}{K^3} (1 - W_{*1} / \sqrt{R}) / \left(X + \frac{B_1}{K^2} + \frac{2c_1}{K^3}\right)}.$$

当 $B^2 - 4AC > 0$ 时,(11)式有两个实根,表示分别为正、负能的两支模处于解耦状态,是稳定的. 注意到 $K \gg 1$, 相应的稳定条件可以写成 $\sigma' > \sigma'_+(K)$ 或 $\sigma' < \sigma'_-(K)$, 其中

$$\sigma'_\pm(K) = \frac{K}{c_2} \left\{ X + \frac{\beta_1}{K^2} + \frac{3c_1}{K^3} \pm 2 \sqrt{\frac{c_1}{K^3} \left(X + \frac{\beta_1}{K^2} + \frac{2c_1}{K^3} \right)} \right\}. \quad (12)$$

稳定条件 $\sigma' < \sigma'_-(K)$ 表示出,对给定波数为 K 的模,当体系的密度梯度减小到下限 $\sigma'_-(K)$ 以下时,模就会稳定. 我们发现 $\sigma'_-(K)$ 对于 K 存在极小值,当

$$K = K_m = K_0 + \delta K = \left(\frac{\beta_1}{X}\right)^{1/2} - \sqrt{2c_1} \left(\frac{1}{X\beta_1}\right)^{1/4}$$

时, $\sigma'_-(K)$ 有极小值 σ'_{cr}

$$\sigma'_{cr} = \frac{2}{c_2} \beta_1^{1/2} X^{1/2} - \frac{2}{c_2} \sqrt{2c_1} X^{3/4} \beta_1^{-1/4}. \quad (13)$$

也就是说,当体系的密度梯度低于阈值 σ'_{cr} 时,对于所有波数 K ,模都处于稳定状态. $\sigma' = \sigma'_{cr}$ 时,对应于 K_m 的频率为

$$W+1 = \sqrt{\frac{c_1}{2}} X^{\frac{1}{4}} \beta_1^{-\frac{3}{4}} + o(X^{3/4}). \quad (14)$$

(13),(14)式中的最低阶项正是 Tang 等人^[3]的结果.

这里我们要指出的是,对另一稳定条件 $\sigma' > \sigma'_+(K)$,只有体系的密度梯度较大,满足 $\sigma' > \frac{2}{c_2} \sqrt{X\beta_1}$ 时,才有可能找到一定范围内的 K ,使体系满足 $\sigma' > \sigma'_+(K)$,从而使这一波数范围内的两支模解耦而稳定. 由于 $\sigma'_+(K)$ 对于 K 没有极大值,因而不可能找到一个 σ'_+ 的上限使对所有的波数模都稳定. 因为密度梯度是不稳定性的自由能源之一,很容易看出这一结果在物理上是完全合理的.

当两支模解耦时,(11)式的两个实根为

$$W_1 + 1 = \frac{c_1}{XK^3 + \beta_1 K + 3c_1 - c_2 \sigma' K^2}, \quad (15)$$

$$W_2 + 1 = \frac{XK^3 + \beta_1 K + 3c_1 - c_2 \sigma' K^2}{XK^3 + \beta_1 K + 2c_1} - \frac{c_1}{XK^3 + \beta_1 K + 3c_1 - c_2 \sigma' K^2}. \quad (16)$$

当 $\sigma' < \sigma'_-(K)$ 时, $0 > W_1$, $W_2 > -1$, 且 $|W_2| < |W_1|$;

当 $\sigma' > \sigma'_+(K)$ 时 $W_1, W_2 < -1$, 且 $|W_2| > |W_1|$.

当 K 足够大时, 由(15)式可以得出 $W_1 \approx -1$, 说明 W_1 正是原于负能的离子 Bernstein 波的一支, 而由(16)式可以得到 $W_2 \approx -\frac{c_2}{K} \epsilon' / \left(X + \frac{\beta_1}{K^2} \right)$, 这正是沿离子逆磁方向传播的正能电子漂移波的一支。

我们在图 1 中画出了相应于各种密度梯度下的色散关系和不稳定性增长率。用 W_r 和 W_i 分别表示频率的实部和虚部。在图 1(a) 中画出了 $\epsilon' < \epsilon'_{cr}$ 的情形, 可以看到相应于(15)和(16)式的两支模 W_1 和 W_2 在全部的波数 K 范围内完全解耦, 因而没有不稳定性增长率。图 1(b) 表示当 $\epsilon' > \epsilon'_{cr}$ 时正、负能两支模在一定的波数范围内相耦合而产生不稳定性。在图 1(c) 中表示了 $\epsilon'_-(K) > \epsilon'$ 和 $\epsilon'_+(K) < \epsilon'$ 的两种解耦波数范围。

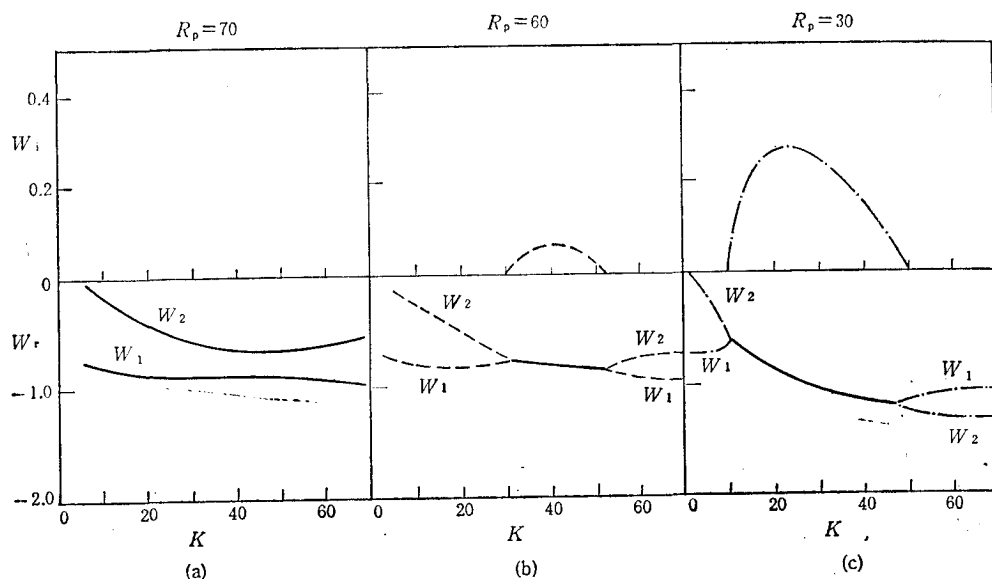


图 1 不同密度梯度下的流体模色散关系 $W_r(K)$ 和不稳定性的增长率 W_i , 相应的两支波 W_1 , W_2 分别表示在图中 (a) $R_p = \frac{1}{\epsilon'} = 70$, $\epsilon' < \epsilon'_{cr}$; (b) $R_p = 60$, $\epsilon' > \epsilon'_{cr}$, 但 $\epsilon' < \frac{2}{c_2} \sqrt{X\beta_1}$, 图中两边解耦的部分相应于 $\epsilon' < \epsilon'_-(K)$; (c) $R_p = 30$, $\epsilon' > \epsilon'_{cr}$, 且 $\epsilon' > \frac{2}{c_2} \sqrt{X\beta_1}$, 右边的解耦区为 $\epsilon' > \epsilon'_+(K)$, 左边为 $\epsilon' < \epsilon'_-(K)$; 所有三个图中其余参数为 $\beta_1 = 0.71$, $T_i = 10 \text{ keV}$, $\tau = 0.2$, $\epsilon'_{cr} = \frac{1}{62}$

以上的结果都是由正、负能波耦合的机制出发讨论 DCLC 不稳定性的, 没有考虑磁漂移共振的动力论效应。我们以后称之为流体模。

2. 动力论理论

现在我们讨论在流体模稳定的情况下动力论共振效应的作用。离子 ∇B 漂移共振条件为

$$W - l + A_i \frac{v_{1r}^2}{\alpha_i^2} = 0. \quad (17)$$

对于基频共振, 当 $\frac{v_{1r}^2}{\alpha_i^2} = \frac{W+1}{-A_i} > 0$ 时才能满足波-粒子能量交换的物理要求, 考虑到

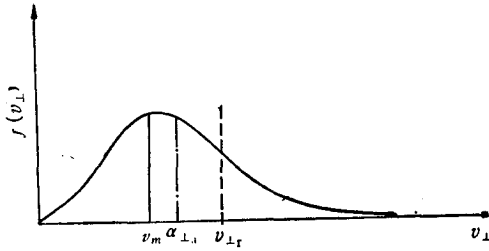


图2 损失锥分布函数 $f(v_{\perp})$ 的示意图. v_m 为对应于 f 最大值的速度; v_r 表示满足共振条件的速度值

对于负能波的共振激发应该是能量耗散效应, 因而 $\frac{v_{1r}^2}{\alpha_{1i}^2}$ 应该位于损失锥分布函数的

负斜率区域 (见图2), 所以我们假设

$$\left| \frac{W+1}{-A_i} \right| > 1,$$

且 $(W_r + 1) \gg W_i$, 由后面的结果可以看到这些假设是自洽的. 利用(9)式可以得到

$$D_i = \text{Im}D = \frac{c_1}{K^3} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{R-1}} \sqrt{\frac{-A_i}{W_r+1}} \left\{ \frac{W_{*i}}{A_i} \left(e^{\frac{W_r+1}{A_i}} - e^{\frac{R(W_r+1)}{A_i}} \right) + \frac{W_r}{A_i} \left(R e^{\frac{R(W_r+1)}{A_i}} - e^{\frac{W_r+1}{A_i}} \right) \right\}. \quad (18)$$

上式等号右端中第一项为离子密度梯度的贡献, 它总是正值; 第二项为离子损失锥分布函数的效应, 当 $W \gg W_{*i}$ 时 ($\epsilon'K < 1$), 第二项起主要作用, 可以看出, 当

$$\frac{W+1}{|A_i|} \leq \frac{\ln R}{R-1}$$

时该项贡献为正, 意味着波粒共振使得能量由离子转移到波, 而当 $\frac{W+1}{|A_i|} \geq \frac{\ln R}{R-1}$ 时, 该项为负, 意味着粒子对波的耗散效应.

当流体模稳定时, 动力论共振仍可能驱动不稳定性, 由上述共振条件可以看出, 当 $\epsilon' \leq \epsilon'_c$ 时, $W_i + 1 > 0$ 的离子回旋波的一支(15)式可以满足共振条件, 又由于

$$\frac{\partial D_i}{\partial W} = \frac{\partial \chi_c}{\partial W} + \frac{\partial \chi_i^{LS}}{\partial W}, \quad (19)$$

其中 $\frac{\partial \chi_c}{\partial W} = -\frac{\epsilon' c^2}{K W_i^2} < 0$, $\frac{\partial \chi_i^{LS}}{\partial W} = \frac{c_1}{K^3} \frac{\left(1 + \frac{K}{2} \epsilon' d\right)}{(W_i + 1)^2} > 0$.

因而可以求得不稳定性的增长率为

$$W_i = - \frac{D_i}{\frac{\partial D_i}{\partial W}} \bigg|_{W=W_i} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{R-1}} \frac{c_1}{K^3} \frac{A_i}{\sqrt{\frac{W_i+1}{-A_i}}} \cdot \left\{ W_{*i} \left(e^{\frac{W_i+1}{A_i}} - e^{\frac{R(W_i+1)}{A_i}} \right) + W_i \left(R e^{\frac{R(W_i+1)}{A_i}} - e^{\frac{W_i+1}{A_i}} \right) \right\} / \left[\frac{c_1}{K^3} \frac{A_i^2}{(W_i+1)^2} \left(1 + \frac{K \epsilon' d}{2} \right) - \frac{\epsilon' c_2}{K W_i^2} A_i^2 \right]. \quad (20)$$

这里需要提出的是 $W = W_i$ 时 $\frac{\partial D_i}{\partial W}$ 是正值, 这可以由以下的分析得出:

由(12), (15)式可知: 当 $\epsilon' \leq \epsilon'_c$ 时, $\frac{c_2}{K} \epsilon' < X + \frac{\beta_i}{K^2} + \frac{3c_1}{K^3}$, 从而

$$W_1 + 1 \leq \sqrt{c_1/K^3} / \sqrt{X + \frac{\beta_1}{K^2} + \frac{2c_1}{K^3}};$$

再比较 $\frac{\partial \chi_i^{LS}}{\partial W}$ 与 $\frac{\partial \chi_e}{\partial W}$ 两项的大小: $\left| \frac{\partial \chi_i^{LS}}{\partial W} \right| / \left| \frac{\partial \chi_e}{\partial W} \right| \simeq \left(X + \frac{\beta_1}{K^2} + \frac{2c_1}{K^3} \right) / \frac{\epsilon'}{K} c_1 > 1$, 即

$$\frac{\partial D_r}{\partial W} > 0,$$

如果我们注意到波能为 $\epsilon_R = \frac{\partial(WD_r)}{\partial W} + o\left(\frac{\omega^2}{k^2 c^2}\right)$, 那末 $\frac{\partial D_r}{\partial W} \Big|_{W=W_1} > 0$ 就意味着 $W = W_1$ 这一支模为负能波。由上面的讨论可以得出:

$$\text{当 } \left| \frac{W_1 + 1}{A_i} \right| > \frac{\ln R}{R-1} \text{ 时,} \quad (21)$$

可以有 $W_1 > 0$ 。也就是说, 动力论共振对负能波的耗散效应驱动了不稳定性。上述不稳定性条件(21)式决定了不稳定的波数范围的上限 K_1 , 即

$$K_1^2(K_1^2 X + \beta_1 - K_1 c_2 \epsilon') = \frac{4c_1(R^2 - 1)}{\epsilon' \beta_1 (1 + \tau) R \ln R} \equiv Q. \quad (22)$$

对于给定的 $\epsilon' \lesssim \epsilon'_{crit}$, 当 $K > K_1$ 时, 则 $\left| \frac{W_1 + 1}{A_i} \right| < \frac{\ln R}{R-1}$, 共振线的位置移到损失锥分布函数的正斜率处, 波将受到阻尼(见图 2)。只有 $K < K_1$ 时才有动力论不稳定性。然而, 当 $K \ll K_1$ 时, 共振线的位置已移到 $v_\perp/\alpha_i \gg 1$ 处, 分布函数的斜率很小, 实际上模的增长率已趋于零。由(22)式可以近似估算出 K_1 的大小, 当 $\epsilon \lesssim \epsilon_{cr}$ 时, 用(22)式等号左端第一项去平衡右边项, 得 $K_1 \simeq \left(\frac{Q}{X}\right)^{1/4}$ 。当 $\epsilon \ll \epsilon_{cr}$ 时得

$$K_1^2 \simeq \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\beta_1^2/X^2 + 4 \frac{Q}{X}} - \frac{\beta_1}{X} \right\}.$$

由于在(20)式中离子损失锥分布贡献的项起决定性作用, 我们可以近似地求出最大增长率为

$$W_{imax} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{R-1}} \frac{c_1}{K^3} \frac{A_i}{\sqrt{\eta}} \frac{\{W_{*i}(e^{-\eta} - e^{-R\eta}) + W(Re^{-R\eta} - e^{-\eta})\}}{\frac{c_1}{K^3} \frac{1}{\eta^2} \left(1 + \frac{K\epsilon'}{2} d\right) - \frac{\epsilon' c_2}{K} A_i^2}, \quad (23)$$

其中 $\eta = \frac{2 \ln R}{R-1}$, 相应的 K_{max} 应该满足

$$K_m^2(K_m^2 X + \beta_1 - c_2 \epsilon' K_m) = \frac{2c_1(R^2 - 1)}{\epsilon' \beta_1 (1 + \tau) R \ln R}. \quad (24)$$

与(22)式相同, 在 $0.1 < \beta_i < 1$ 范围内这里也可以估算出, $\epsilon \lesssim \epsilon_{cr}$ 时 $K_m \simeq \left(\frac{Q}{2X}\right)^{1/4}$ 。

在图 3 中画出由(13), (23), (24)式计算得到的结果, 用实线表示流体模临界稳定时, 不同 β_i 值下动力论模的最大增长率以及相应的波数 k_m 。为了比较, 我们用虚线画出直接用数值计算求解色散关系(6)式所得到的结果。(其中取 $l = 0, -1$) 图中显示出动力论模的增长率随 β_i 值的增高而增加。解析分析与数值计算的结果也符合得比较好。

由以上分析可以知道, 由于 DCLC 模的负能性质, 离子的磁漂移共振产生耗散效应

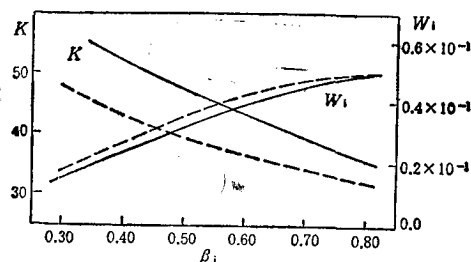


图3 当 $e' = e'_{cr}$ 时, 动力论效应驱动的最大增长率 W_i 以及相应的波数 K_m 与 β_i 值的关系 实线表示解析结果; 虚线为数值求解色散关系的结果

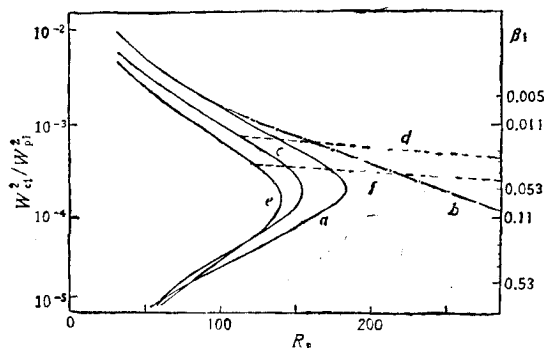


图4 比较流体模和动力论模的密度梯度阈值与 β_i 值的关系 实线表示流体模的阈值; 虚线表示动力论模的阈值; 点划线表示低 β 理论 (Post 和 Rosenbluth) 的结果; 等离子的物理参数为 $T_i = 10\text{keV}$; $\tau = 0.2$; $\frac{m_i}{m_e} = 3676$

的左侧为流体不稳定区 (计算中取谐数 $l = 0, \pm 1$), 曲线 d 表示同样参数下动力论理论的阈值 (谐数 $l = 0, \pm 1$), 曲线的左、下侧表示动力论不稳定的区域。

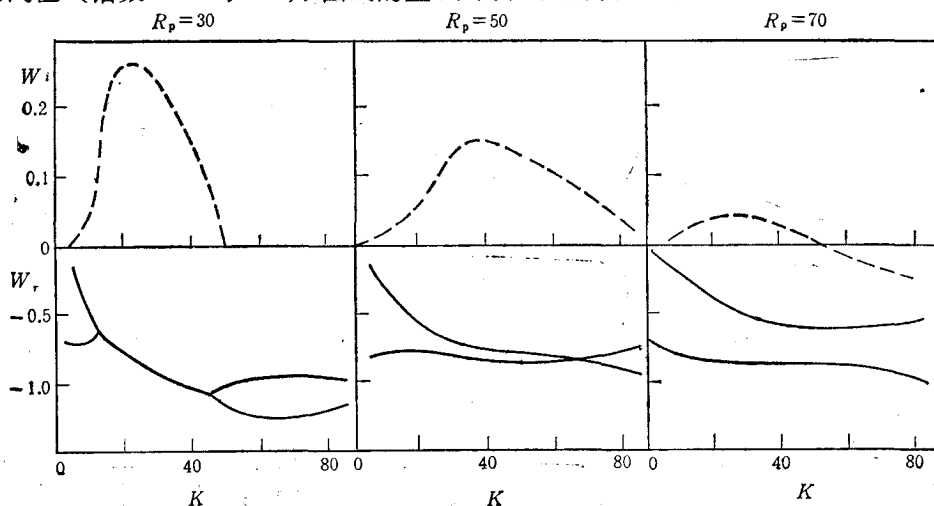


图5 在不同密度梯度下动力论模的频率 W_i 和增长率 W_r 与波数 K 的关系 $R = 2, \beta_i = 0.8, T_i = 10\text{keV}$; $\tau = 0.2, \frac{m_i}{m_e} = 3676$

时可以驱动动力论的不稳定性, 这种不稳定性的机制不再依赖于正、负能波的耦合, 特别是在 $e' \leq e'_{cr}$ 的参数区域中, 流体模已完全稳定, 两支波已完全解耦的情况下, 动力论效应仍在很大的参数范围内提供不稳定性的增长率。

以上的解析工作只是比较粗略的估算, 尽管如此, 它对模的不稳定性机制给出了非常明确的物理图象。事实上, (20), (22) 式的结果只适用于镜比较小 ($1 < R \leq 2$) 的情况, 而且已经推到大宗量展开适用的极限。更精确的计算结果将由数值计算给出。

3. 数值计算结果

我们把数值计算求解色散关系 (6) 式的结果用图 4—6 表示。在图 4 中我们把流体近似下给出的密度梯度特征长度的阈值 $R_{pc} = \frac{1}{e'_{cr}}$, 与动力论理论的结果相比较。图 4 中曲线 c 表示镜比 $R = 2$ 时流体模不稳定性的阈值 R_{pc} 与 β_i 的关系, 曲线

为了与已有的工作相比较,还画出了曲线 a, b , 曲线 b 为求解流体近似下色散关系(10)式的结果(谐数 $l = -\infty \rightarrow +\infty$). 与 Tang 等人曾得到过的结果完全相同. 曲线 a 为 Post 等人在低 β 近似下给出的阈值曲线. 可以看出,动力论理论使得不稳定区域大大扩展了. β 值增大使得不稳定性增加. 曲线 e, f 分别为在大镜比 ($R = 10$) 情形下,流体与动力论理论的阈值,很明显,在两种理论中,增大镜比都使不稳定的参数区域缩小. 图 4 中我们取 $W_i = 10^{-3}$ 作为判定动力论模的阈值的标准.

图 5 表示不同密度梯度条件下, DCLC 模的频率和增长率. 可以清楚地看出, $R_p = 30$ 时,密度梯度较大, $\epsilon' \gg \epsilon'_{\text{cri}}$, 正能的漂移波与负能的离子迴旋波具有相近的相速度从而相耦合,流体模有很强的增长率,波耦合的不稳定性机制起主导作用. 当 $R_p = 70$ 时, $\epsilon' < \epsilon'_{\text{cr}}$ 两支模完全解耦,这正是(15), (16)式所表示的情形,这时源于离子迴旋波的一

支,由于受磁漂移共振的驱动而有动力论不稳定性增长率. 注意在波数 K 较大的一边由于超过了上限 K_1 ,而受到阻尼作用,而在 K 小的一边由于共振处分布函数斜率太小,增长率趋于零. 当 $R = 50$ 时, $\epsilon' \gtrsim \epsilon'_{\text{cri}}$, 这种情形比较复杂,两种不稳定性驱动机制都比较重要.

图 6 给出在各种密度梯度下,流体近似理论与动力论理论分别得出的线性增长率,可以看出,在一般情况下,动力论模的波谱有较大的宽度,这是由于在两支模解耦的区域中仍可能有动力论模的激发,此外,在一般情况中,这两种机制激发的不稳定性有各自的极大值,分别对应于不同的波数 K_{max} , 当流体模稳定时,动力论模仍存在不稳定性.

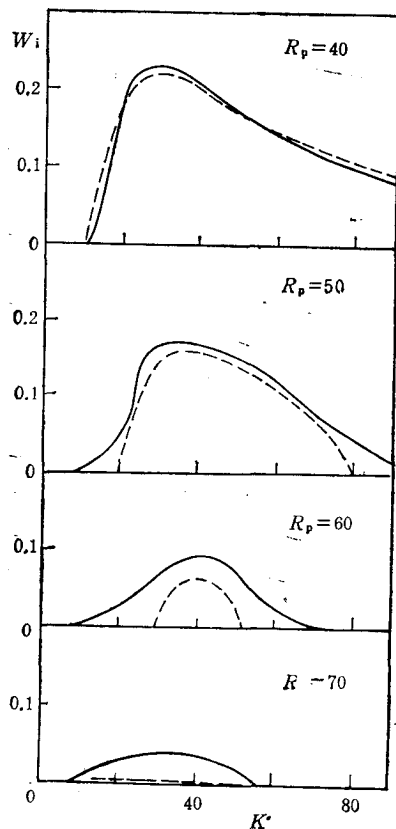


图 6 比较流体模和动力论模的线性增长率与密度梯度的关系 实线表示动力论理论的结果;虚线表示流体近似理论的结果; $\beta = 0.71$; 其余物理参数同图 5

四、总结与讨论

本文给出了包含磁场梯度效应和电子的电磁效应的动力论色散关系,并由此讨论了漂移迴旋损失锥 (DCLC) 不稳定性的动力论性质,把它与流体近似理论进行了比较.

在流体近似下, DCLC 模的不稳定性是由于正能的电子密度梯度漂移波与负能的离子 Bernstein 波相耦合的结果. 当密度梯度减小时, 漂移波的相速度也随之降低, 降到一定程度时就会与负能波解耦, 解耦的条件决定了流体模的阈值, 在 β 值增高时, 由于电子的电磁效应, 流体模的阈值 σ_{cr}' 增高, 因而有限 β 值对流体模起稳定作用^[3].

在动力论理论中, DCLC 模的驱动机制还包含了新的波和粒子间的能量交换的渠道, 即离子的磁漂移共振效应, 共振产生耗散效应时, 可以使负能波激发不稳定性, 这一过程并不依赖于正负能波的耦合机制, 因而在流体模稳定的条件下, 磁场非均匀性产生的动力论效应仍然激发 DCLC 不稳定性. 从而使流体理论所给出的不稳定的参数区域大大扩展了. 在动力论理论中, 不稳定性的阈值是由离子磁漂移共振效应所决定. 当 β 值逐渐增高时, 磁场梯度效应越来越重要. 动力论模的增长率是随 β 值增高而增加的. 不稳定的参数区域也随 β 增加而扩大. 因而在动力论理论中有限 β 值, 并没有使 DCLC 模稳定.

本文中通过解析计算, 分析了 DCLC 的物理机制, 并给出了流体模稳定条件下动力论模的不稳定性增长率 W_i 及满足不稳定性条件的波数范围. 用数值计算方法仔细研究了 DCLC 模在两种不稳定性驱动机制下的行为, 而且给出了大小不同镜比情形下两种理论所决定的不稳定性阈值, 解析分析与数值计算取得了一致的结果.

由于在高 β 下动力论模的不稳定性阈值已向密度梯度很小的区域大大延伸了, 因而减缓密度梯度并不是稳定 DCLC 模最有效的办法; 另一方面, 人们知道, 注入温离子流可以填充损失锥的分布, 以稳定 DCLC 的流体模, 那末, 温离子流对于动力论模的作用如何, 需要进一步研究. 这一工作我们正在进行.

附 录

$\chi_{lin}(\alpha_{\perp})$ 的计算

在普遍色散关系中^[11], 我们将 $\chi_{lin}(\alpha_{\perp})$ 表示为

$$\chi_{lin}(\alpha_{\perp}) = \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_{\perp i}^2} - i \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_{\perp i}^2} \sum_i \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - iQ_i)\tau} I_i(\lambda) e^{-\lambda} \cdot \left\{ (\omega_{*ni} - \tilde{\omega}_i) P_i Q_1 + \omega_{*Bi} \left(\frac{\alpha_{\perp i}^2}{\alpha_{\perp i}^2} - 1 \right) P_i Q_2 \right\}, \quad (A.1)$$

其中 $\tilde{\omega}_i = \omega - (IQ_i - \omega) \left(\frac{\alpha_{\perp i}^2}{\alpha_{\perp i}^2} - 1 \right)$; $\omega_{*Bi} = -a_i$; $P_i Q_1 = \frac{1}{1 - ia_i \tau}$;

$$P_i Q_2 = \frac{1}{(1 - ia_i \tau)^2} \left[(1 - \lambda) + \lambda \frac{I_i'}{I_i} \right]; \quad \lambda = \frac{k_{\perp}^2 \alpha_{\perp i}^2}{2Q_i^2 (1 - ia_i \tau)}.$$

把包含 $(IQ_i - \omega) \left(\frac{\alpha_{\perp i}^2}{\alpha_{\perp i}^2} - 1 \right)$ 的项写出来为

$$\begin{aligned} \chi_{lin}(\alpha_{\perp}) &= \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_{\perp i}^2} - i \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_{\perp i}^2} \sum_i \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - iQ_i)\tau} I_i(\lambda) e^{-\lambda} (IQ_i - \omega) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\alpha_{\perp i}^2}{\alpha_{\perp i}^2} - 1 \right) P_i Q_1 \\ &\quad - i \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_{\perp i}^2} \sum_i \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - iQ_i)\tau} I_i(\lambda) e^{-\lambda} \left[(\omega_{*ni} - \omega) P_i Q_1 \right. \\ &\quad \left. + \omega_{*Bi} \left(\frac{\alpha_{\perp i}^2}{\alpha_{\perp i}^2} - 1 \right) P_i Q_2 \right]. \end{aligned} \quad (A.2)$$

利用
$$\frac{1}{1 - ia_i \tau} I_i(\lambda) e^{-\lambda} = \int_0^\infty J_i^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{Q_i} \right) e^{-v_\perp^2 (1 - ia_i \tau)} dv_\perp^2, \quad (\text{A.3})$$

可以将 (A.2) 式中的等号右端第二项化为

$$\begin{aligned} I_2 = & -i \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 \alpha_{1i}^2} \sum_i \int_0^\infty dv_\perp^2 (iQ_i - \omega - a_i v_\perp^2) \left(\frac{\alpha_{1i}^2}{\alpha_{2i}^2} - 1 \right) e^{-v_\perp^2 J_i^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{Q_i} \right)} \int_0^\infty d\tau \\ & \cdot e^{i(\omega - iQ_i + a_i v_\perp^2)\tau} \\ & - i \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 \alpha_{1i}^2} \sum_i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - iQ_i)\tau} \int_0^\infty dv_\perp^2 e^{-v_\perp^2 (1 - ia_i \tau)} J_i^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{Q_i} \right) a_i v_\perp^2 \left(\frac{\alpha_{1i}^2}{\alpha_{2i}^2} - 1 \right) \\ = & -\frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 \alpha_{1i}^2} \left(\frac{\alpha_{1i}^2}{\alpha_{2i}^2} - 1 \right) + i \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 \alpha_{1i}^2} \sum_i \int_0^\infty e^{i(\omega - iQ_i)\tau} d\tau \omega_{*B} I_i(\lambda) e^{-\lambda} \left(\frac{\alpha_{1i}^2}{\alpha_{2i}^2} - 1 \right) P_i Q_i \\ = & -\frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 \alpha_{1i}^2} \left(\frac{\alpha_{1i}^2}{\alpha_{2i}^2} - 1 \right) - (\text{A.2}) \text{式等号右端第四项}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

将 (A.2) 式中各项相加得

$$\chi_{ii}(\alpha_\perp) = \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 \alpha_{1i}^2} - i \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 \alpha_{1i}^2} \sum_i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - iQ_i)\tau} I_i(\lambda) e^{-\lambda} (\omega_{*B} - \omega) P_i Q_i. \quad (\text{A.5})$$

本工作在等离子体研究会指导下进行, 谨此谢忱。

参 考 文 献

- [1] B. I. Chohe, UCAR-10049-80-Rev. 1, (1980), 2—68.
- [2] R. F. Post and M. N. Rosenbluth, *Phys. Fluids*, 9(1966), 730.
- [3] W. M. Tang *et al.*, *Phys. Fluids*, 15(1972), 1153.
- [4] M. J. Gerver, *Phys. Fluids*, 19(1976), 1581; *Phys. Fluids*, 21(1978), 443.
- [5] H. L. Berk and M. J. Gerver, *Phys. Fluids*, 19(1976), 1646.
- [6] D. E. Baldwin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 36(1976), 1051.
- [7] N. E. Lindgren *et al.*, *Phys. Fluids*, 19(1976), 1026.
- [8] D. E. Baldwin, *Rev. Mod. Phys.*, 49(1977), 317.
- [9] P. H. Ng *et al.*, *Phys. Fluids*, 22(1979), 1141.
- [10] J. R. Ferron and A. Y. Wong, *Phys. Fluids*, 27(1984), 1287.
- [11] 郭世宠, 蔡诗东, 物理学报, 36(1987), 870.
- [12] S. T. Tsai and S. C. Guo, Proc. of Sino-Japan Bilateral Workshop on Statistical Physics and Condensed Matter Theory (1986) edited by Xie Xide, p. 240.

THE KINETIC DRIFT CYCLOTRON LOSS CONE INSTABILITIES IN AN INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

GUO SHI-CHONG SHEN JIE-WU CAI SHI-DONG (S. T. TSAI)

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The kinetic effects of magnetic drift resonance on the drift cyclotron loss cone instability (DCLC) are studied in detail both analytically and numerically. It is found that the effects of inhomogeneous magnetic field in high β plasmas are important, the kinetic resonance act as a dissipative effect, which can enhance the instability and broaden the unstable region of negative energy DCLC mode. Finite β effects do not play the stabilization role predicted by the theories under the fluid approximation.