

赝标介子的唯象模型(II)

电磁形状因子

吴自玉 汪克林 兰慧彬 章正刚 先鼎昌

(中国科学技术大学基础物理中心) (成都地质学院) (中国科学院高能物理研究所)

1986年4月10日收到;1987年4月6日收到修改稿

提 要

本文直接以平底势计算得到的赝标介子波函数,在欧氏空间中计算出物理的 0^- 介子的类空电磁形状因子。数值结果表明,在适当选择参数下,理论计算的结果能和实验相符合。

一、引 言

有关 π 介子的电磁形状因子的实验工作已有不少^[1]。其原因是强子的电磁形状因子不仅反映出强子的电荷分布,而且还能给出强子的半径大小。而在讨论 0^- 介子的唯象模型时,能否给出符合实验结果的 π 介子电磁形状因子,将是对模型的一个很好的检验。

王明中等人^[2]以近平底势算得的赝标介子波函数为例,计算了若干参数下的电磁形状因子。然而,理论计算和实验曲线在动量较大时符合得不好,且尾部出现振荡。正如我们在文献[3]中所指出的,他们所给出的唯象势底部不平,“尾巴”拖得太长,而且积分核在度规张量的误用下有很多项不正确,因此其结果就不十分可靠。我们给出了一个唯象的平底势模型,重新严格地计算了介子波函数的积分核,并得到了欧氏空间中介子结构波函数的数值解。从而使得我们可以进一步地计算能够和实验直接进行比较的电磁形状因子。

为了能够直接把欧氏空间(数值解形式的)波函数应用来求电磁形状因子 $F(k^2)$,根据文献[2]的分析,同样选择一个特殊的坐标系,即 $k_0 = 0$ 的类空坐标系。这样在欧氏空间中计算得到的电磁形状因子就给出了物理的类空电磁形状因子。

本文严格推导出电磁形状因子的解析表达式,从中可以看出,我们与文献[2]中所给出的式子的不同之处。并以平底势下计算得到的赝标介子波函数为例,对几组不同的参数,计算了电磁形状因子,并与实验进行比较。由数值结果可以看出,理论计算与实验曲线符合得较好。

二、 0^- 介子的类空形状因子

我们知道强子的形状因子与电磁流矩阵元的关系为

$$F(k^2)(P_i + P_f)_\mu = \langle P_f | J_\mu(0) | P_i \rangle. \quad (1)$$

而根据 Feynman 图(见图 1), 可以写下在最低级的电磁作用下的电磁流矩阵元为

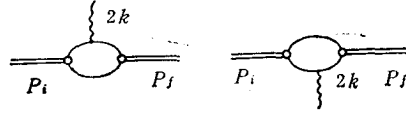


图 1

$$\begin{aligned} \langle \xi | J_\mu(z) | \zeta \rangle &= \int d^4u \text{Tr} \left\{ \bar{\phi}^\xi(u, z) \Delta_\mu \phi^\zeta(z, u) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\hat{\partial}}{\partial u} + M \right) + \phi^\xi(z, u) \left(\frac{\hat{\partial}}{\partial u} + M \right) \phi^\zeta(u, z) \Delta_\mu \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$J_\mu = i\phi(z)\Delta_\mu\phi(z), \quad (3)$$

$$\Delta_\mu = Q\gamma_\mu, \quad (4)$$

$$\phi^\xi(z, u) = \langle 0 | T\{\phi(z)\bar{\phi}(u)\} | \xi \rangle, \quad (5)$$

$$\bar{\phi}^\xi(u, z) = \langle \xi | T\{\phi(u)\bar{\phi}(z)\} | 0 \rangle, \quad (6)$$

而 $\phi(z)$ 为夸克场, Q 为夸克的 $SU(3)$ 电荷矩阵元, M 为夸克质量, $|\xi\rangle, |\zeta\rangle$ 为介子束缚态. 根据文献[2, 4], (2)式可以写为

$$\langle P_f | J_\mu(0) | P_i \rangle = \frac{e}{(2\pi)^4} \int d^4q \text{Tr} \left\{ \bar{\chi}_{P_f}(q - k) i\gamma_\mu \chi_{P_i}(q) (-i) \left[i \left(\hat{q} - \frac{\hat{P}_i}{2} \right) + M \right] \right\}. \quad (7)$$

再令

$$Q_\mu = 2k_\mu = (P_i - P_f)_\mu, \quad (8)$$

于是(1)式化为

$$F(k^2) = -\frac{1}{2(k^2 + m^2)} P_{i\mu} \langle P_f | J_\mu(0) | P_i \rangle, \quad (9)$$

其中 m 为介子的质量.

由于(7)式中的各量都是在闵氏空间中写下的, 而我们得到的介子波函数^[3]是从 Wick 旋转后的 B-S 方程组用数值求解得到的. 因此必须对(7)式的积分进行解析延拓, 从闵氏空间延拓到欧氏空间, 从而使被积函数中的波函数都变为欧氏空间的波函数. 这样才能把我们用数值求得的解代入进行计算.

根据文献[2]中的分析, 对于类空的矢量有 $k^2 > 0$. 由 Lorentz 不变性, 总可以选择一个 $k_0 = 0$ 的参考系. 最方便的选择为

$$k = (k, 0, 0, 0) \quad (10)$$

这样 P_i 和 P_f 可以表示为

$$P_i = (k, 0, 0, i\sqrt{m^2 + k^2}), \quad P_f = (-k, 0, 0, i\sqrt{m^2 + k^2}), \quad (11)$$

于是方程(9)变为

$$F(k^2) = -\frac{1}{2(k^2 + m^2)} \{ k \langle P_f | J_1(0) | P_i \rangle + i\sqrt{k^2 + m^2} \langle P_f | J_4(0) | P_i \rangle \}. \quad (12)$$

根据我们的工作, 在欧氏空间中, 在低次分波近似下 0^- 介子波函数写为

$$\chi_{\bar{P}}(\bar{q}) = \chi^{(1)}\gamma_5 + \chi^{(2)}\frac{\hat{P}}{2}\gamma_5 + \chi^{(4)}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}\frac{\bar{P}_\mu}{2}\bar{q}_\nu\sigma_{\lambda\alpha}, \quad (13)$$

其中带“bar”的表示欧氏量。利用代数关系^[9] $\{\sigma_{\mu\nu}, \gamma_5\} = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}\sigma_{\lambda\alpha}$, (14)

则有 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}\sigma_{\lambda\alpha} = -2\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 = 2i\gamma_5(\gamma_\mu\gamma_\nu - \delta_{\mu\nu})$, (15)

于是(13)式改写为 $\chi_{\bar{P}}(\bar{q}) = \chi^{(1)}\gamma_5 + \frac{1}{2}\chi^{(2)}\hat{P}\gamma_5 + i\chi^{(4)}\gamma_5(\hat{\bar{q}} - \bar{P} \cdot \bar{q})$. (13a)

由上式可以推出它的共轭形式

$$\bar{\chi}_{\bar{P}}(\bar{q}) = -\gamma_4\chi_{\bar{P}}^*(\bar{q}q_4^*)\gamma_4 = \gamma_5\left\{\chi^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{P}\chi^{(2)} + i(\hat{\bar{q}}\hat{P} - \bar{P} \cdot \bar{q})\chi^{(4)}\right\}. \quad (16)$$

即有

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{\bar{P}_f}(\bar{q} - \bar{k}) = \gamma_5 \left\{ \chi_{\bar{P}_f}^{(1)}(\bar{q} - \bar{k}) + \frac{1}{2}\hat{P}_f\chi_{\bar{P}_f}^{(2)}(\bar{q} - \bar{k}) \right. \\ \left. + i[(\hat{\bar{q}} - \hat{\bar{k}})\hat{P}_f - (\bar{q} - \bar{k}) \cdot \bar{P}_f]\chi_{\bar{P}_f}^{(4)}(\bar{q} - \bar{k}) \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\bar{P}_i = -iP_i = (-ik, 0, 0, \sqrt{m^2 + k^2}), \quad \bar{P}_f = -iP_f = (ik, 0, 0, \sqrt{m^2 + k^2}). \quad (18)$$

在电磁流矩阵元表达式(7)中,由于已经进行了 Wick 转动和选择类空矢量 k ,使得介子波函数直接变为欧氏空间的波函数。最后要延拓的是

$$\begin{aligned} \left(q - \frac{1}{2}P_i\right)_\mu = \left(q - \frac{i}{2}\bar{P}_i\right)_\mu, \\ \xrightarrow[q_4 \rightarrow iq_4]{\text{Wick 转动}} \left(q_1 - \frac{k}{2}, q_2, q_3, -i\left(\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + k^2} - q_4\right)\right). \end{aligned} \quad (19)$$

值得一提的是,这里的 q_4 是虚数,它可以写为 $q_4 = iq_0$ 。为了下面书写的方便,我们略去所有的符号“bar”。然后再令

$$(q_f)_\mu = (q - k)_\mu \xrightarrow{q_4 \rightarrow iq_4} (q_1 - k, q_2, q_3, iq_4), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q} = i\gamma_\mu \left(q - \frac{1}{2}P_i\right)_\mu \xrightarrow{q_4 \rightarrow iq_4} \\ \gamma_\mu \left[i\left(q_1 - \frac{k}{2}\right), iq_2, iq_3, \left(\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + k^2} - q_4\right)\right]. \end{aligned} \quad (21)$$

这时(7)式便化为

$$\langle P_f | J_\mu(0) | P_i \rangle = \frac{e}{(2\pi)^4} \int d^4q \text{Tr} \{ \bar{\chi}_{P_f}(q_f) i\gamma_\mu \chi_{P_i}(q) (\hat{Q} + M) \}. \quad (22)$$

为了计算上式,仍然要引用几个求迹公式^[6]

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4\delta_{\alpha\beta}, \quad (23)$$

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu) = 4(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}), \quad (24)$$

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5) = 4\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\lambda) = & 4[\delta_{\alpha\lambda}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) - \delta_{\nu\lambda}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\sigma} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\sigma} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}) \\ & + \delta_{\nu\sigma}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\lambda} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}) - (\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\mu\lambda} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\mu\nu} \\ & + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\nu}\delta_{\mu\sigma} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\mu\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu}\delta_{\mu\lambda} - \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (26)$$

这样(22)式中求迹结果为

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\{\bar{\chi}_i \gamma_\mu \chi_i (\hat{Q} + M)\} \\ = & Q_\mu \chi_i^{(1)} \chi_i^{(1)} - \frac{M}{2} P_{i\mu} \chi_i^{(1)} \chi_i^{(2)} + i[P_{i\mu}(q \cdot Q) - q_\mu(P_i \cdot Q)] \chi_i^{(1)} \chi_i^{(4)} - \frac{M}{2} P_{i\mu} \chi_i^{(2)} \chi_i^{(1)} \\ & + \frac{1}{4} [P_{j\mu}(P_i \cdot Q) - Q_\mu(P_i \cdot P_j) + P_{i\mu}(P_j \cdot Q)] \chi_i^{(2)} \chi_i^{(2)} + \frac{i}{2} M [q_\mu(P_i \cdot P_j) \\ & - P_{i\mu}(P_j \cdot q)] \chi_i^{(2)} \chi_i^{(4)} - i[q_{j\mu}(P_i \cdot Q) - P_{j\mu}(q_j \cdot Q)] \chi_i^{(4)} \chi_i^{(1)} + \frac{i}{2} M [q_{j\mu}(P_j \cdot P_i) \\ & - P_{j\mu}(P_i \cdot q_j)] \chi_i^{(4)} \chi_i^{(2)} - \{P_{i\mu}[(q_j \cdot Q)(P_i \cdot q) - (q_j \cdot q)(P_i \cdot Q)] + P_{j\mu}[(q_j \cdot P_i)(Q \cdot q) \\ & - (q_j \cdot q)(Q \cdot P_i)] + q_{j\mu}[(P_i \cdot Q)(q \cdot P_j) - (P_i \cdot P_j)(q \cdot Q)] + q_\mu[(q_j \cdot P_i)(P_j \cdot Q) \\ & - (q_j \cdot Q)(P_j \cdot P_i)] + Q_\mu[(q_j \cdot q)(P_j \cdot P_i) - (q_j \cdot P_i)(P_j \cdot q)]\} \chi_i^{(1)} \chi_i^{(4)}. \end{aligned} \quad (27)$$

在上式中已略去一个共同的因子 4, 它可以归并到归一化因子中。

由于 $\bar{\chi}_{p_j} \cdot \chi_{p_i}$ 为 q_i 的偶函数, 因此在(27)式中凡含 q_i 的奇次幂的项均无贡献。另一方面, 可以利用 χ_i 只是其宗量的模的函数性质, 可以将 $\bar{\chi}_{p_j} \chi_{p_i}$ 和 $\bar{\chi}_{p_i} \chi_{p_j}$ 项合并。然后再利用两个积分等式

$$\int d^4 q \left(q_1 - \frac{k}{2} \right) \chi^i(q - k) \chi^i(q) = 0 \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}), \quad (28)$$

$$\int d^4 q q_1 (q_1 - k) \left(q_1 - \frac{k}{2} \right) \chi^i(q - k) \chi^i(q) = 0 \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}). \quad (29)$$

这样便得到形状因子的表达式

$$\begin{aligned} F(k^2) = & -\frac{e}{2(2\pi)^4} \int d^4 q \left\{ -\frac{1}{2} \chi_i^{(1)} \chi_i^{(1)} + M \chi_i^{(1)} \chi_i^{(2)} + (2q^2 - 2q_0^2 \right. \\ & + \frac{k^2}{2} - 2kq_1) \chi_i^{(1)} \chi_i^{(4)} - \frac{1}{8} m^2 \chi_i^{(2)} \chi_i^{(2)} - M k q_1 \chi_i^{(2)} \chi_i^{(4)} \\ & \left. - \frac{1}{2} [(2k^2 + m^2)q^2 + (k^2 - m^2)q_0^2 - k^2 q_1^2 - \frac{k^2}{2} (k^2 + m^2)] \chi_i^{(4)} \chi_i^{(4)} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{在上式中, 积分变量 } q \text{ 的模为 } q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2. \quad (31)$$

为了便于数值计算, 将(30)式中的各量进行无量纲化处理

$$F_1(q) = \chi^{(1)}(q), \quad F_2(q) = M \chi^{(2)}(q), \quad F_4(q) = M^2 \chi^{(4)}(q), \quad (32)$$

$$q \rightarrow q/M, \quad k \rightarrow k/M, \quad B = \frac{m}{2M}, \quad (33)$$

这样(30)式化为

$$F(k^2) = \frac{eM^4}{4(2\pi)^4} \int d^4 q \{ F_1(q - k) F_1(q) - 2F_1(q - k) F_2(q) - 2(2q^2 - 2q_0^2 + \frac{k^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
& -2kq_1) F_1(q-k)F_4(q) + B^2 F_2(q-k)F_2(q) + 2kq_1 F_2(q-k)F_4(q) \\
& + [4B^2(q^2 - q_0^2) + k^2(2q^2 + q_0^2 - q_1^2 - \frac{k^2}{2} - 2B^2)] F_4(q-k)F_4(q) \}. \quad (34)
\end{aligned}$$

对上式进行归一化处理,最后得到了类空的 0^- 介子电磁形状因子的如下表达式:

$$\begin{aligned}
F(k^2) = \frac{1}{N} \int d^4q \{ & F_1(q-k)F_1(q) - 2F_1(q-k)F_2(q) - 2(2q^2 - 2q_0^2 \\
& + \frac{k^2}{2} - 2kq_1) F_1(q-k)F_4(q) + B^2 F_2(q-k)F_2(q) + 2kq_1 F_2(q-k)F_4(q) \\
& + [4B^2(q^2 - q_0^2) + k^2(2q^2 + q_0^2 - q_1^2 - \frac{k^2}{2} - 2B^2)] F_4(q-k)F_4(q) \}, \quad (35)
\end{aligned}$$

其中 N 为归一化因子,

$$\begin{aligned}
N = \int d^4q \{ & F_1(q)F_1(q) - 2F_1(q)F_2(q) - 4(q^2 - q_0^2)F_1(q)F_4(q) \\
& + B^2 F_2(q)F_2(q) + 4B^2(q^2 - q_0^2)F_4(q)F_4(q) \}, \quad (36)
\end{aligned}$$

它保证了

$$F(0) = 1. \quad (37)$$

在(35)式中,各个 F_i 是由 Wick 转动后的 B-S 方程组中解出的介子波函数的各个分量,可以直接利用所得到的欧氏空间中介子波函数的数值解来计算出 0^- 介子的类空电磁形状因子。

三、数值求解

由于有(10)式这样的选择,可以看出,在(35)式中,除掉 q_1 分量外,其它三个分量 q_2, q_3, q_0 皆是对称的。因此可以令

$$\begin{aligned}
Q^2 &= q_2^2 + q_3^2 + q_0^2, \quad F_i(q-k) \equiv F_i^*(\sqrt{(q_1-k)^2 + Q^2}), \\
F_i(q) &\equiv F_i(\sqrt{q_1^2 + Q^2}). \quad (38)
\end{aligned}$$

同时,对含有因子 q_2^2, q_3^2, q_0^2 的各项,均可作代换

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_0^{\infty} Q^2 dQ q_i^2 F_i^* F_k = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_0^{\infty} Q^2 dQ Q^2 F_i^* F_k \quad (i=0,2,3). \quad (39)$$

于是电磁形状因子(35)式化为

$$\begin{aligned}
F(k^2) = \frac{4\pi}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_0^{\infty} Q^2 dQ \{ & F_1^* F_1 - 2F_1^* F_2 + B^2 F_2^* F_2 - k^2 F_1^* F_4 \\
& - \frac{8}{3} Q^2 F_1^* F_4 + \left[\left(\frac{8}{3} B^2 + \frac{7}{3} k^2 \right) Q^2 - k^2 \left(\frac{k^2}{2} + 2B^2 \right) \right] F_4^* F_4 \} \\
& + \frac{4\pi}{N} \left\{ 2k \int_{-\infty}^{\infty} q_1 dq_1 \int_0^{\infty} Q^2 dQ (2F_1^* + F_1^*) F_4 \right. \\
& \left. + 4 \int_{-\infty}^{\infty} q_1^2 dq_1 \int_0^{\infty} Q^2 dQ \left(B^2 F_2^* + \frac{k^2}{4} F_4^* - F_1^* \right) F_4 \right\}, \quad (40)
\end{aligned}$$

其中归一化因子写为

$$N = 2\pi^2 \int_0^\infty \bar{Q}^3 d\bar{Q} \{ F_1^2 - 2F_1 F_2 + B F_2^2 - 3\bar{Q}^2 F_1 F_2 + 3B^2 \bar{Q}^2 F_2^2 \}. \quad (41)$$

上式是四维球对称积分, $\bar{Q}$ 的定义为

$$\bar{Q} = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_0^2)^{1/2}. \quad (42)$$

现在便可以利用 (40) 式计算 0^- 介子的类空电磁形状因子。

数值计算仍在 GC 058 电子计算机上完成。通过适当地选择参数, 得到了几组形状因子理论曲线。其结果如图 2 所示。图 2 中的参数值表示 B/E_0 。

从所得到的结果来看, 在适当选择参数下, 形状因子理论曲线能够与实验曲线^[4]较好的符合。这将为我们的进一步研究介子行为提供了理论数据(波函数), 而且给我们提供了一种研究强子结构的可行方法。

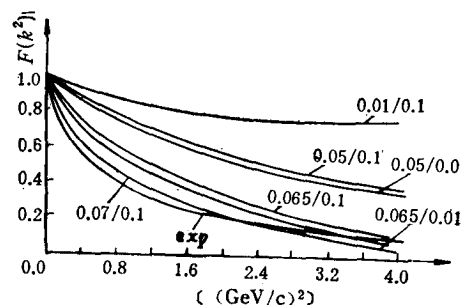


图 2

感谢与刘耀阳教授的一些有益的讨论。

参 考 文 献

- [1] E. B. Dally *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **39**(1977), 1176.
- [2] 王明中、郑希特、汪克林、洗鼎昌、章正刚, 高能物理与核物理, **3**(1979), 572.
- [3] 吴自玉、汪克林、兰慧彬、章正刚、洗鼎昌, 物理学报, **36**(1987), 1048.
- [4] C. L. Hammer *et al.*, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 696.
- [5] 吴自玉、汪克林, 物理学报, **34**(1985), 588.
- [6] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integral, Series and Products*, Academic, New York, (1965) p. 1029.

A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR 0^- MESON (II)

THE ELECTROMAGNETIC FORM FACTOR

WU ZI-YU WANG KE-LIN LAN HUI-BIN

(Center for Fundamental Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ZHANG ZHENG-GANG

(Chengtu Institute of Geology)

XIAN DING-CHANG

(Institute of High Energy Physics, Academic Sinica)

ABSTRACT

The physical space-like electromagnetic form factor has been calculated directly from the Euclidean 0^- meson wave functions solved for the flat bottom potential in the Euclidean space. Numerical results show that the theoretical calculation may be in accordance with experiment by appropriately choosing the parameters.