

研究简报

求解流函数方程 Cauchy 问题的一种迭代投影方法

罗正明¹⁾

(四川大学原子核科学技术研究所)

1981年10月30日收到; 1985年12月19日收到修改稿

提 要

本文提出了求解流函数方程 Cauchy 问题的一种优化迭代方法——迭代投影法。此法具有较高的迭代收敛速度且宜于计算带有极向偏滤器等离子体平衡问题的外部解。计算了几种带偏滤器的等离子体平衡位形。此外,还将另一些计算结果与解析解进行了比较,结果是满意的。

一、迭代投影法求等离子体平衡问题外部解

在磁流体近似下等离子体平衡问题的三区提法见文献[1, 2]。其中第二区,即等离子体和成形场线圈之间的真空区,流函数 ψ 满足椭圆型方程的 Cauchy 边值条件,即

$$\Omega_2: r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$\Gamma_1: \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = h. \quad (2)$$

这里 h 是在等离子体区的流函数在边界 Γ_1 上的法向导数。等离子体平衡计算的几何示意图见图1。问题(1)和(2)式是不适定的,它在 Hadamard 意义上是不稳定的^[3]。容易看到,在 Γ_1 附近,流函数 ψ 可以写成

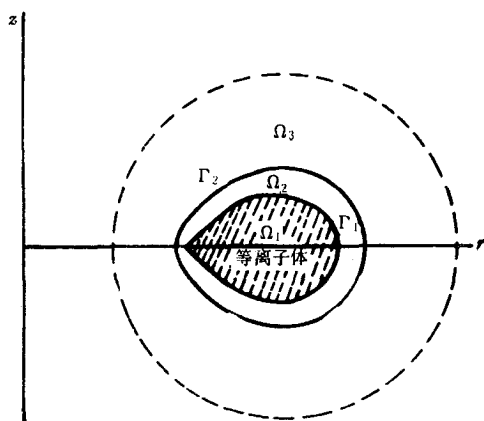
$$\psi(r, z) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} \Delta + \theta(\Delta^2). \quad (3)$$

这里 Δ 是点 (r, z) 到 Γ_1 上的距离。设 (r, z) 为 Γ_2 上的点。如果 Γ_2 上每点到 Γ_1 上距离都是常数,我们就有

$$\psi_{\Gamma_2} = g = \Delta h + \theta(\Delta^2) = g' + \theta(\Delta^2), \quad (4)$$

g' 是 g 的一级近似解。公式(4)表明, Cauchy 数据 h 乘上一个适当的常数就可以构造真解 g 的一级近似解。即使 Γ_2 上各点的 Δ 并不完全相同,只要各点 Δ 相差不很大,这点

1) 此工作完成于西南物理研究所。

图 1 Γ_3 用以代替无限远边界

仍然是成立的. 本文的迭代投影算法就是利用了公式 (4) 的这个性质.

迭代投影法的步骤如下: 首先, 我们将在 Γ_2 上的点与 Γ_1 上的点建立一一对应的关系. 比如, 在 Γ_1 上每一点 A 上作法线, 此法线与 Γ_2 上的交点为 B . 若 Γ_1, Γ_2 都是光滑的凸曲线, 则此交点是唯一的, 于是 A 与 B 就可以看成是一一对应关系. 第一次迭代是将 h 的值赋于 Γ_2 上的对应点上, 构成一个椭圆型方程的第一边值问题

$$\Omega_2: Lf_1 = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0; \quad (5)$$

$$\Gamma_1: f_1 = 0; \quad \Gamma_2: f_1 = h. \quad (6)$$

应用文献 [1, 2] 中叙述的有限元方法可解方程 (5) 和 (6). 算出 f_1 以后, 通过数值微分运算, 我们得到 $\zeta_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial n} \right)_{\Gamma_1}$. 选择一个常数 c_1 , 使 $c_1 \zeta_1$ 最优逼近 h , 即要求

$$\text{Min} = J_1(c_1) = \|h - c_1 \zeta_1\|^2. \quad (7)$$

这里, 符号 $\|f\|^2$ 是函数 f 的范数的平方. 范数的定义为

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_{\Gamma_1} f^2 d\Gamma_1 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

显然

$$c_1 = (h, \zeta_1) / (\zeta_1, \zeta_1). \quad (9)$$

这里

$$(h, \zeta_1) = \int_{\Gamma_1} h \zeta_1 d\Gamma_1. \quad (10)$$

于是, 我们得到一次迭代投影近似解为

$$\phi_{F_1}^{(1)} = g_1 = c_1 h, \quad \phi^{(1)} = c_1 f_1(r, z). \quad (11)$$

令 $h_1 = h - c_1 \zeta_1$. 第二次迭代步骤是将 h_1 的值由 Γ_1 重新赋在 Γ_2 上的对应点上, 再解如下第一边值问题:

$$\Omega_2: Lf_2 = 0; \quad (12)$$

$$\Gamma_1: f_2 = 0; \quad \Gamma_2: f_2 = h_1. \quad (13)$$

算出 f_2 及 $\left(\frac{\partial f_2}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} = \zeta_2$, 重复 (7)–(10) 式的步骤, 我们得到

$$c_2 = (h_1, \zeta_2) / (\zeta_2, \zeta_2), \quad (14)$$

$$g_2 = \phi_{\Gamma_1}^{(2)} = g_1 + c_2 h_1, \quad (15)$$

$$\phi^{(2)} = \phi^{(1)} + c_2 f_2(r, z). \quad (16)$$

经过 $n-1$ 次迭代投影后, 我们得到 f_{n-1} , ζ_{n-1} , $\phi_{\Gamma_1}^{(n-1)}$, $\phi^{(n-1)}$ 及 $h_{n-1} = h_{n-2} - c_{n-1} \zeta_{n-1}$. 第 n 次迭代投影的步骤就是求解下面的边值问题:

$$\Omega_2: \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_n}{\partial n} \right) + \frac{\partial^2 f_n}{\partial z^2} = 0; \quad (17)$$

$$\Gamma_1: \quad f_n = 0; \quad \Gamma_2: \quad f_n = h_{n-1}. \quad (18)$$

算出 f_n 及 $\zeta_n = \left(\frac{\partial f_n}{\partial n} \right)_{\Gamma_1}$, 求出最优系数 c_n ,

$$c_n = (h_{n-1}, \zeta_n) / (\zeta_n, \zeta_n) \quad (19)$$

$$\text{及} \quad \phi_{\Gamma_1}^{(n)} = g_n = g_{n-1} + c_n h_{n-1} = c_1 h + c_2 h_1 + \cdots + c_n h_{n-1}, \quad (20)$$

$$\phi^{(n)} = \phi^{(n-1)} + c_n f_n = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n, \quad (21)$$

$$h_n = h_{n-1} - c_n \zeta_n. \quad (22)$$

解 $\phi^{(n)}$ 对应的 Γ_1 上的法向导数为

$$\left(\frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} = c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \cdots + c_n \zeta_n. \quad (23)$$

它与给定的 Cauchy 数据 h 之差为 h_n . 所以, 对于一个适当给定的精度指标 ε , 只要第 n 次迭代投影后 $\|h_n\| \approx \varepsilon$, 则迭代终止. 通常 ε 就是 Cauchy 数据 h 本身的误差. 这种迭代方式我们称为投影迭代. 实际上, 如果我们称 h_{n-1} 为原象, 则 ζ_n 就是通过计算 (17)–(18) 式及数值微分运算所定义的 h_{n-1} 的一个映象, 而 $c_n \zeta_n$ 正好是原象 h_{n-1} 在映象 ζ_n 上的投影. 它是一切 $k f_n$ 解中使 $J_n(k) = \|h_{n-1} - k \zeta_n\|$ 最小的解. 这里 k 是任意常数.

计算实践表明, 投影迭代方法具有较高收敛速度. 这并不是偶然的. 容易看出, 每经过一次迭代精度有可能提高一级. 我们仍假定 Γ_2 上每一点距离 Γ_1 都具有相同的长度 Δ . 经过 n 次迭代后近似解 $\phi^{(n)}$ 与真实解 ϕ 相差 $\delta \phi^{(n)}$, $\delta \phi^{(n)}$ 满足如下的 Cauchy 问题:

$$\Omega_2: \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \delta \phi^{(n)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \delta \phi^{(n)}}{\partial z^2} = 0; \quad (24)$$

$$\Gamma_1: \quad \delta \phi^{(n)} = 0, \quad \frac{\partial \delta \phi^{(n)}}{\partial n} = h_n. \quad (25)$$

如果 h_n 仍然相当光滑, 则以下估计成立:

$$\delta \phi_{\Gamma_1}^{(n)} = \Delta h_n + \theta(\Delta^2). \quad (26)$$

令 $\delta g'_n = \Delta h_n$. 由 (26) 式可以看出 $\delta g'_n$ 是 $\delta \phi_{\Gamma_1}^{(n)}$ 的一级近似. 因而由下列第一边值问题:

$$\Omega_2: \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \delta \tilde{\phi}^{(n)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \delta \tilde{\phi}^{(n)}}{\partial z^2} = 0; \quad (27)$$

$$\Gamma_1: \quad \delta \tilde{\phi}^{(n)} = 0; \quad \Gamma_2: \quad \delta \tilde{\phi}^{(n)} = \delta g'_n = h_n \Delta \quad (28)$$

的解 $\delta \tilde{\phi}^{(n)}$ 亦可视为 $\delta \phi^{(n)}$ 的一级近似, 因此应有

$$\left\| h_n - \left(\frac{\partial \delta \tilde{\phi}^{(n)}}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} \right\| \ll \| h_n \|. \quad (29)$$

但 $\delta \tilde{\phi}^{(n)} = f_{n+1} \Delta$, (29) 式变成

$$\| h_n - \zeta_{n+1} \Delta \| \ll \| h_n \|. \quad (30)$$

这就是说, 在 h_n 比较光滑且 Δ 较小的条件下, 每迭代投影一次计算结果的精度可以增加一级. 这个结论将通过某些算例来检验其适用范围.

二、计算结果

利用本文叙述之方法, 我们已经计算了一些常见的重要平衡位形并得到相应的成形场线圈电流分布. 以下我们从三个方面介绍和评价本方法的效能.

1. 方法的精度

为了说明本方法的精度, 我们计算了椭圆直柱等离子体外部解并将其与 Gajewsky 的解析解进行了比较^[4]. 我们还应用本法计算了圆截面等离子体外部解并与 Greene 等的解析解进行了比较^[9]. 前者 Γ_1, Γ_2 分别是 $\mu_1 = \ln 2, \mu_2 = \ln 3$ 的两条共焦椭圆坐标线. 其 Cauchy 条件为

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} = \frac{15}{128} \left(1 - \frac{8}{17} \cos 2\theta \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_{\Gamma_1}. \quad (31)$$

相应的流函数 ψ 的解析解为

$$\psi = \frac{15}{128} \left[(\mu - \mu_1) - \frac{4}{17} \cos 2\theta \operatorname{sh} 2(\mu - \mu_1) \right]. \quad (32)$$

这里 μ, θ 是共焦椭圆坐标. 后者 Ω_2 为 $\operatorname{ch} \mu_1 = 5, \operatorname{ch} \mu_2 = 3$ 的两条坐标线所界定. 设 $\zeta_0 = \operatorname{ch} \mu_1, \zeta_1 = \operatorname{ch} \mu_2$. Γ_1 上的 Cauchy 条件我们选成

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{\zeta_0} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)_{\zeta_0} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)_{\zeta_0} \left(\frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0 - \cos \theta} \right)^{1/2} (1 + 0.1 \cos \theta), \quad (33)$$

相应的 Ω_2 上的流函数 ψ 的解析解为

$$\psi = \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta - \cos \theta} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^1 \frac{P_{n-1/2}^1(\zeta_0) Q_{n-1/2}^1(\zeta) - P_{n-1/2}^1(\zeta) Q_{n-1/2}^1(\zeta_0)}{P_{n-1/2}^1(\zeta_0) \frac{d}{d\zeta_0} (Q_{n-1/2}^1) - \frac{d}{d\zeta_0} (P_{n-1/2}^1) Q_{n-1/2}^1(\zeta_0)} c_n \cos n\theta, \quad (34)$$

$c_0 = 1, c_1 = 0.1$. ζ, θ 是环坐标. $P_{n-1/2}^1(\zeta), Q_{n-1/2}^1(\zeta)$ 是环函数. 表 1 中比较了上述两种典型情况下数值方法和解析计算的结果, 其符合程度是相当好的.

2. 逼近真解的速度

表 2 记录了计算精度随迭代次数增加的改善情况. 显著的特点是在头几次迭代时精度改善较明显, 然而精度达到一定程度以后, 其改善速度明显下降. 头几次迭代时精度迅速改善这一事实可以认为是对 (4) 式的正确性的一种支持. 可是随着迭代次数的增加, h_n 的光滑性越来越差, 这种情况使作出结论的前提失去依据, 即 (4) 式已不能用来估计

表 1 数值解与精确解的差 h_n 与迭代次数的关系(左边 6 组数据是椭圆柱外部解, 右边数据属圆环)

θ	h	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
3.1416	.1655	.0658	.0115	.0013	.0010	.0002	.5288	.1165	.0319	.0060	.0015	.0007
2.7053	.1899	.0363	.0030	.0025	.0014	.0001	.5301	.1039	.0261	.0050	.0015	.0005
2.2189	.2366	.0124	.0031	.0012	.0023	.0001	.5332	.0687	.0130	.0036	.0011	.0003
1.8326	.2695	.0505	.0121	.0024	.0006	.0001	.5359	.0170	.0024	.0037	.0004	.0002
1.3963	.2727	.0539	.0132	.0028	.0008	.0001	.5363	.0412	.0025	.0023	.0005	.0002
.9599	.2451	.0247	.0048	.0005	.0002	.0001	.5339	.0944	.0135	.0015	.0008	.0002
.5236	.1989	.0260	.0017	.0026	.0006	.0002	.5303	.1324	.0278	.0071	.0015	.0003
.0873	.1666	.0645	.0111	.0015	.0009	.0001	.5276	.1488	.0357	.0011	.0027	.0007

表 2 计算 $\delta_n = (\|h_n\|/\|h\|)$ 随迭代次数改善情况

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
椭圆柱外部解	1.91×10^{-1}	3.47×10^{-2}	8.46×10^{-3}	2.26×10^{-3}	6.64×10^{-4}
圆环位形	1.69×10^{-1}	3.56×10^{-2}	7.04×10^{-3}	2.36×10^{-3}	7.62×10^{-4}
双流器	9.67×10^{-2}	1.29×10^{-2}	2.95×10^{-3}	1.42×10^{-3}	8.59×10^{-4}
带偏滤器泪滴形	1.48×10^{-1}	4.72×10^{-2}	4.05×10^{-2}	2.74×10^{-2}	7.68×10^{-3}
带偏滤器戒指环	5.75×10^{-2}	2.31×10^{-2}	7.27×10^{-3}	5.25×10^{-3}	4.04×10^{-3}

迭代收敛速度。对于普通的等离子体位形来说, 在不多的两三次迭代以后, 计算精度已经完全满足实际需要, 虽后面的迭代有效性下降, 并不影响取得的结果。如果计算精度达不到所需程度, 只要改善边界 T_1 , T_2 的光滑度就可以改善计算精度。

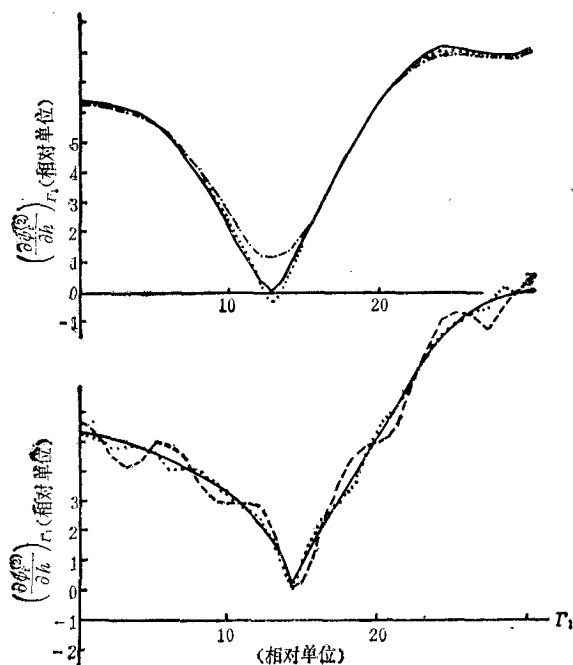


图 2 两种计算方法逼近真解速度的比较

上图为本文结果 —— 为 Cauchy 数据 h ; - - - 为一次迭代解 h_1 ; 为二次迭代解 h_2 ;
 下图为基映射方法的结果 —— 为 Cauchy 数据 h ; - - - 为 11 个 Fourier 基的结果;
 为 16 个 Fourier 基的计算结果

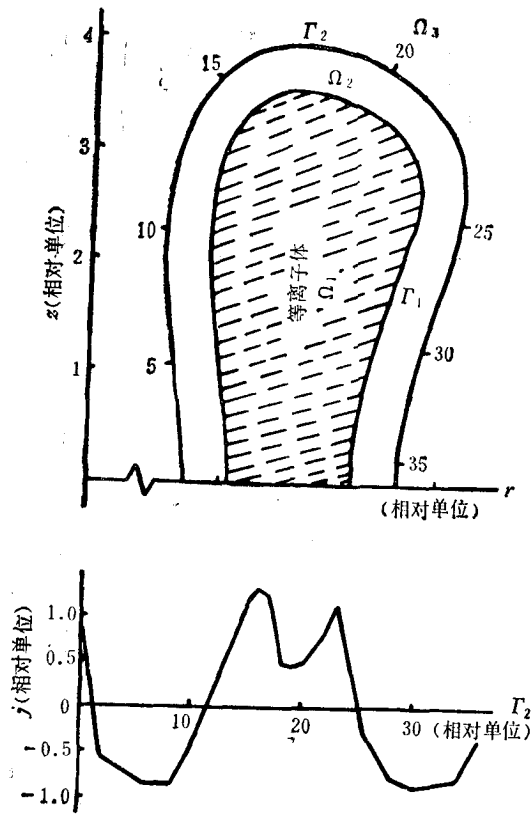


图 3 双流器位形及其相应的成形电流计算结果

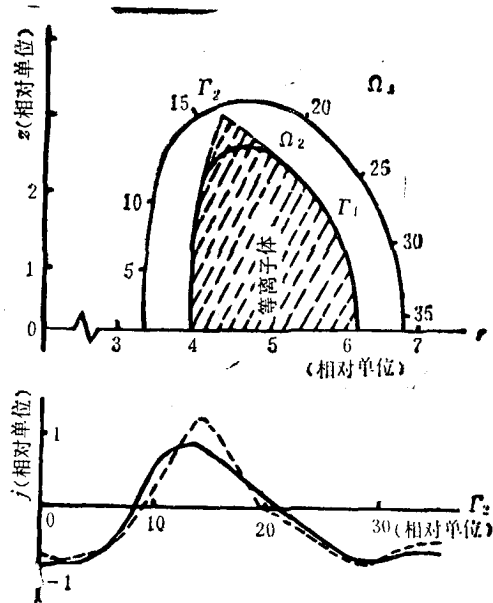
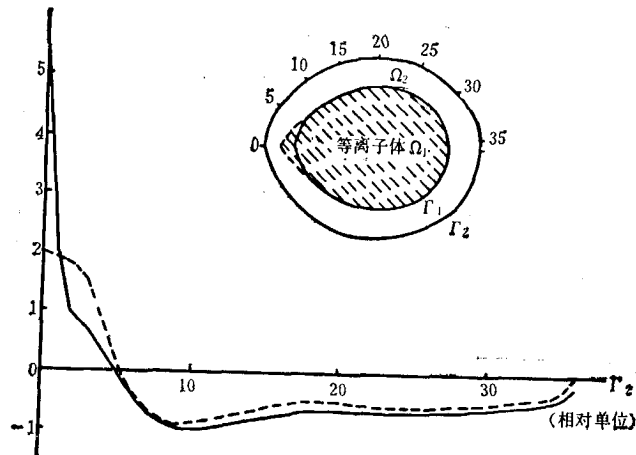
图 4 戒指环位形及其成形场电流的计算结果
虚线为带偏滤器位形的计算结果图 5 滴形等离子体位形及其成形场线圈电流分布
虚线电流分布是带偏滤器的滴形位形的计算结果

图 2 比较了用 Fourier 基映射方法与本文迭代投影算法在求解流函数方程 Cauchy 问题上逼近真解的速度。计算的位形是带偏滤器的戒指环位形。可以看出用 16 个 Fourier

基构造出来的近似解的精度还不如本方法两次迭代的结果。

3. 计算工作量

我们给出一个典型的计算工作量的数据: 计算一个完整的三区平衡问题, 在全空间区域的 1147 个节点上(等离子体区为 397 个节点, 中区为 259 个节点, 外区为 491 个节点)给出不同近似程度的 6 组数值解及相应的面电流分布, 在 108-1 机上用 10—15 分钟时间。这个工作量与其它方法相比要少很多^[6,7]。

图 3—5 画出了双流器位形以及带偏滤器的滴形和戒指环位形的成形场线圈面电流分布。作为对照, 在图 4, 5 中也画出了不带偏滤器的滴形和戒指环位形的成形场线圈面电流分布。可以看出带偏滤器的滴形的成形场线圈电流功率比不带偏滤器的滴形的成形场线圈电流大很多。相反, 带偏滤器的戒指环与不带偏滤器的戒指环位形其相应的成形场线圈电流相差不很大。这暗示偏滤器选在上侧比选在位形的内侧似更有利。这对于设计带偏滤器的大托卡马克装置来说是应该注意的。

参 考 文 献

- [1] 罗正明, 力学学报, (3)(1983), 233.
- [2] Luo Zhengming (罗正明), *Plasma Physics*, 24(1982), 487.
- [3] J. Hadamard, The lecture on the Cauchy Problem in linear Partial Differential Equation, Yale University Press, New Haven, (1923).
- [4] R. Gajewsky, *Physics Fluids*, 15(1972), 70.
- [5] J. Greene *et al.*, *Physics Fluids*, 14(1972), 671.
- [6] L. E. Zakharov., *Nucl. Fusion*, 13(1973), 595.
- [7] Y. Suzuki., *Nucl. Fusion*, 14 (1974), 345.

A PROJECTION-ITERATION METHOD FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM OF THE FLUX FUNCTION EQUATIONS

LUO ZHENG-MING

(The institute of nuclear science and technology of Sichuan University, Chengdu)

ABSTRACT

In this paper, an optimal iteration procedure, the projection-iteration method, is developed to solve the Cauchy problems of the flux function equation. This method exhibits higher convergent speed and is suitable for calculating the plasma configurations with divertors. Several important plasma configurations have been calculated. The numerical solutions are found to be in good agreement with the analytical solutions.