

一维多通道正常金属结构的透射几率

陈 赓 华 赵 忠 贤

(中国科学院物理研究所)

1986 年 7 月 21 日收到

提 要

本文考虑一个严格一维的正常金属多分支结构,指出把 Büttiker 等人^[1]处理两分支结构的方法加以改进,即可解决这种多分支结构问题。我们给出了多分支结构的透射系数公式。作为一个简单的例子,求出了一个对称三分支结构的具体结果,并表明在这种结构中存在透射几率的共振现象。

一、引 言

具有任意散射体的一维正常金属环(两分支结构)两端的透射系数作为穿过环的外磁通 Φ 的函数,已由 Gefen 和 Imry 等人^[2]计算出来。在足够低的温度下,以至非弹性扩散长度大于结构尺寸时,它的电阻将满足 Landauer 公式^[3]

$$R_c = (\pi\hbar/e^2) \cdot (1 - T)/T, \quad (1)$$

T 为 Fermi 能处的电子穿越这种器件的量子透射几率。

文献[2]的主要结果是,这个电阻 R_c 既是散射体特性的周期函数,又是磁通 Φ 的周期函数,其磁通周期为 $\phi_0 = hc/e$ 。这种穿透环的透射几率的类 Aharonov-Bohm 型振荡的起因是电子波函数在端子和分支的结点上的相互干涉。尔后, Büttiker 等人^[4]进一步计算了全透射分支的完全对称环和强耦合有反射支的完全对称环的透射幅,从而证明了环的透射几率存在一系列共振。这种与磁通有关的共振将给出强烈的电阻振荡行为。

在本文中,我们通过一个改进后的方法,把对两分支环形结构的处理推广到任意分支的情况。我们将给出求 n 个分支结构的透射幅的一般公式,同时用此公式求出对称 3 分支结构透射系数的具体表式,讨论该结构中的透射几率共振,并通过计算一个两分支(环)结构的例子,说明在 $n = 2$ 时的结果与用 Büttiker 等人的公式得出的结果完全一致。

二、 n 分支结构与外界的耦合

我们必须通过两条端线使 n 分支结构与外界进行耦合。更为一般的 Cayley 树形图的量子电导已经由 Shapiro^[4]讨论过。在此,我们求出 $(n + 1)$ 端结点的 S 矩阵的具体形式。

考虑一个 $(n + 1)$ 端结(图 1),其中 $\alpha(\alpha')$ 端与外电路相连,其余 n 端 $\beta_1(\beta'_1), \beta_2(\beta'_2),$

$\cdots, \beta_n(\beta'_n)$ 分别与各分支的散射体相连. 按文献[4]的定义, $(n+1)$ 个出射波幅 α' 与 $(n+1)$ 个入射波幅 α 通过一个 S 矩阵相联系

$$\alpha'_i = S\alpha_i \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

其中 $i = 1, 2$ 分别为入端结和出端结, $(n+1)$ 维矢量为

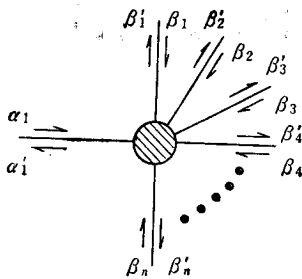


图1 $(n+1)$ 端结点, 其中 $\alpha_i(\alpha'_i), \beta_i(\beta'_i)$ 及箭头表示入射(出射)电子的波幅

$$\alpha'_i = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{pmatrix}; \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha'_2 = \begin{pmatrix} \alpha'_2 \\ \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

由流守恒 $|\alpha'_i|^2 = |\alpha_i|^2$, 可知

$$S^+ S = I, \quad (4)$$

其中 I 为 $(n+1)$ 阶单位矩阵. 所以 S 是 SU_{n+1} 矩阵, 其独立参数共有 $(n+1)^2 - 1$ 个 (与它的无穷小生成元的个数相对应). 由时间反演对称性, 要求

$$S^* S = I, \quad (5)$$

星号为求复共轭, 可知 S 又是对称的, 由此其独立参数的个数减少到 $[(n+1)(n+2)/2 - 1]$ (与它的对称生成元的最大个数对应). 如果我们考虑的 S 矩阵对于 $\beta_1(\beta'_1), \beta_2(\beta'_2), \cdots, \beta_n(\beta'_n)$ 等 n 端是对称的, 则其独立参数仍有 $(n+1)$ 个. 与 $n=2$ 类似我们将进一步作出假设, 认为 S 矩阵是实的, 在这个限制下, 其独立参数的个数减少到 1.

我们暂且把 S 矩阵写成 $(n+1)$ 阶实对称形

$$S = (S_{ij}), \quad (6)$$

其中

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, (n+1). \quad (7)$$

由对称性假设:

1) 入射幅 α 对其余各端出射波的贡献均等, 则

$$S_{1i} = \epsilon^{1/2}, \quad i = 2, 3, \cdots, (n+1). \quad (8)$$

2) β_1 对 $\beta'_2, \beta'_3, \cdots, \beta'_n$; β_2 对 $\beta'_1, \beta'_3, \cdots, \beta'_n$; $\cdots$; β_n 对 $\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_{n-1}$ 的贡献均等, 则

$$S_{ij} = S_{kl} = b \quad i, j, k, l = 2, 3, \cdots, (n+1) \quad i \neq j, k \neq l. \quad (9)$$

3) β_1 对 β'_1 , β_2 对 β'_2 , $\cdots$, β_n 对 β'_n 的贡献均等, 则

$$S_{ii} = S_{jj} = a \quad i, j = 2, 3, \cdots, (n+1). \quad (10)$$

且酉阵 S 为实, $S\tilde{S} = I$, 得到

$$S_{11} = -[a + (n-1)b]. \quad (11)$$

因而可以把 S 矩阵具体写成

$$S = \begin{bmatrix} -[a + (n-1)b] & \varepsilon^{1/2} & \cdots & \varepsilon^{1/2} \\ \varepsilon^{1/2} & a & b & \cdots & b \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ \varepsilon^{1/2} & b & \cdots & b & a \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 a, b 为 ε 的函数, 满足

$$[a + (n-1)b]^2 + n\varepsilon = 1, \quad (13)$$

$$a^2 + (n-1)b^2 + \varepsilon = 1. \quad (14)$$

由(13),(14)式得到

$$(a-b)^2 = 1 \quad (15)$$

即

$$a = \pm \frac{1}{n} [\sqrt{1-n\varepsilon} \pm (n-1)], \quad (16)$$

$$b = \pm \frac{1}{n} [\sqrt{1-n\varepsilon} \mp 1]. \quad (17)$$

ε 可以在 $0 \leq \varepsilon \leq 1/n$ 中取值. $\varepsilon = 0$ 对应于体系与外界弱耦合的极限, $\varepsilon = 1/n$ 为强耦合极限.

取 $\varepsilon = 0$, 及(16),(17)式等号右端括号中上面的符号, 得到 $b = 0$, 因而 S 为对角矩阵, 它代表结的各端都为断裂的情况. 因此我们感兴趣的情况是取

$$a = \pm \frac{1}{n} [\sqrt{1-n\varepsilon} - (n-1)], \quad (18)$$

$$b = \pm \frac{1}{n} [\sqrt{1-n\varepsilon} + 1]. \quad (19)$$

在取正号的参数系统中, 有 $a-b=-1$; 在取负号的系统中, $a-b=1$, 它们对应于两个互相对称的解. (不失一般性, 在以后的计算中, 我们将随意选用 $a-b=1$ 的参数系统.)

三、多分支结构的透射系数

现在我们求如图 2 所示的有两个外端子的一维 n 分支结构的透射系数. 在一维情况下, 散射 t 矩阵应为^[4]

$$\begin{aligned} t^j &= \begin{bmatrix} 1/t^{j*} & -r^{j*}/t^{j*} \\ -r^j/t^j & 1/t^j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t_{11}^j & t_{12}^j \\ t_{21}^j & t_{22}^j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $t^j = T_s^{j1/2} e^{i\phi_s^j}$, $r^j = R_s^{j1/2} e^{i\phi_s^j} e^{-i\pi/2}$, 它们分别为第 j 分支上的散射体的透射与反射系数; T_s^j, R_s^j 分别为相应的透射和反射几率; $T_s^j + R_s^j = 1$, t^j 矩阵把第 j 号分支上的散射体左边和右边的波幅联系起来, 即

$$\begin{pmatrix} \gamma_i \\ \gamma'_i \end{pmatrix} = t^i \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta'_i \end{pmatrix}. \quad (21)$$

定义

$$\begin{aligned} t_{11} &= \begin{bmatrix} t_{11}^1 & 0 \\ & t_{11}^2 & \ddots \\ 0 & & & t_{11}^n \end{bmatrix}, & t_{12} &= \begin{bmatrix} t_{12}^1 & 0 \\ & t_{12}^2 & \ddots \\ 0 & & & t_{12}^n \end{bmatrix}, \\ t_{21} &= \begin{bmatrix} t_{21}^1 & 0 \\ & t_{21}^2 & \ddots \\ 0 & & & t_{21}^n \end{bmatrix}, & t_{22} &= \begin{bmatrix} t_{22}^1 & 0 \\ & t_{22}^2 & \ddots \\ 0 & & & t_{22}^n \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (22)$$

用 n 维矢量

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \beta' = \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} \quad (23)$$

表示散射体的入射与出射波幅(图 2), 得

$$\gamma = t_{11}\beta' + t_{12}\beta, \quad (24)$$

$$\gamma' = t_{21}\beta' + t_{22}\beta. \quad (25)$$

(24), (25) 式具体写出为

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^1 & 0 & t_{12}^1 & 0 \\ & t_{11}^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_{11}^n & 0 & & \\ & & & & 0 & & t_{12}^n \\ t_{21}^1 & 0 & t_{22}^1 & 0 \\ & t_{21}^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_{21}^n & 0 & & t_{22}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \quad (24')$$

(22) 式为无外磁场时 n 分支结构的 t 矩阵。一般认为在 n 个散射中心之间不存在关联, 因而它们是对角的。我们可以通过对 (22) 式作规范变换, 得到有外磁场时的 t' 矩阵

$$t'_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} J_{n,\theta}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \quad (26)$$

其中

$$J_{n,\theta} = e^{i\sigma}, \quad (27)$$

σ 为

$$\sigma = \begin{bmatrix} \Theta_1 & & 0 \\ & \Theta_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \Theta_n \end{bmatrix}, \quad (28)$$

而 Θ_i 为外磁场在第 i 分支上产生的附加相移。如果各分支是对称的, 且穿过每个小环孔

的外磁通均为 Φ , 则有

$$\sigma_s = \begin{bmatrix} (n-1)\theta & & & & 0 \\ & (n-3)\theta & & & \\ & & (n-5)\theta & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -(n-3)\theta \\ 0 & & & & & -(n-1)\theta \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中 $\theta = \pi\Phi/\phi_0$, ϕ_0 为磁通量子.

在外场中, (24), (25) 式中 $t_{n\gamma}$ 应由 (26) 式的 $t'_{n\gamma}$ 代替

$$\gamma = t_{11}J_{n,\theta}\beta + t_{12}J_{n,\theta}\beta, \quad (30)$$

$$\gamma = t_{21}J_{n,\theta}\beta + t_{22}J_{n,\theta}\beta. \quad (31)$$

对于结点 2 (出端), 有

$$\alpha_2 = S\alpha_1, \quad (32)$$

由于在出端上没有入射波, 即 $\alpha_2 = 0$, 得

$$\alpha_2' = \varepsilon^{1/2}\tilde{\Gamma}\gamma, \quad (33)$$

$$\gamma = A_n\gamma, \quad (34)$$

其中 n 阶矩阵

$$A_n = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b & \cdots & b & a & b \end{bmatrix} \quad (35)$$

及 n 维矢量

$$\tilde{\Gamma} = (1, 1, 1, \cdots, 1), \quad (36)$$

A_n 为 n 个分支通过结点的联系矩阵, 它是 S 矩阵去掉第一行和第一列后的块阵.

同样由结点 1, 有

$$\alpha_1' = S\alpha_1, \quad (37)$$

考虑到单位入射条件 $\alpha_1 = 1$, 得

$$\beta' = \varepsilon^{1/2}\tilde{\Gamma} + A_n\beta, \quad (38)$$

其中 n 维矢量

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

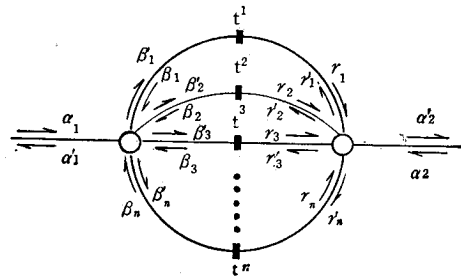


图2 具有入射 α_1 (α_1') 与出射 α_2 (α_2') 端的 n 个通道结构 t_i 是处在第 i 个支的某个位置上的散射体

由 (30), (38) 式消去 β' ,

$$\gamma = t_{11}J_{n,\theta}\varepsilon^{1/2}\tilde{\Gamma} + (t_{11}J_{n,\theta}A_n + t_{12}J_{n,\theta})\beta. \quad (40)$$

由 (31), (34), (38) 式消去 β' , γ ,

$$A_n\gamma = t_{21}J_{n,\theta}\varepsilon^{1/2}\tilde{\Gamma} + (t_{21}J_{n,\theta}A_n + t_{22}J_{n,\theta})\beta. \quad (41)$$

由上面两式,并考虑到 $J_{n,\theta}$, t_{μ} 是对角的,得

$$\gamma = [(t_{21}A_n + t_{22})(t_{11}A_n + t_{12})^{-1}J_{n,\theta}^{-1} - J_{n,\theta}^{-1}A_n]^{-1}[(t_{21}A_n + t_{22})(t_{11}A_n + t_{12})^{-1}t_{11} - t_{21}]\varepsilon^{1/2}\tilde{1}. \quad (42)$$

代入(33)式,即得所求的结果

$$\alpha'_2 = \tilde{1}M\tilde{1}, \quad (43)$$

其中 M 为 n 阶矩阵

$$M = \varepsilon[(t_{21}A_n + t_{22})(t_{11}A_n + t_{12})^{-1}J_{n,\theta}^{-1} - J_{n,\theta}^{-1}A_n]^{-1}[(t_{21}A_n + t_{22})(t_{11}A_n + t_{12})^{-1}t_{11} - t_{21}]. \quad (44)$$

因此透射系数 α'_2 是矩阵 M 的各元素之和. 透射几率为

$$T = |\alpha'_2|^2. \quad (45)$$

显然,这种方法可以推广到各分支上的散射体之间有关联的情况(例如金属结构是以半导体或另一种金属材料为背底),此时矩阵 t_{μ} 的非对角元素一般不为零.

四、两个特例

应用上节给出的一般表式(43)及(44),我们来计算一个对称两分支结构的透射系数. 设两个支上散射体为全透射 ($R'_j = 0$, $j = 1, 2$), 则

$$t^j = \begin{bmatrix} e^{i\phi_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_j} \end{bmatrix} \quad (46)$$

即

$$t_{11} = l e^{i\phi_s}, \quad t_{22} = l e^{-i\phi_s}, \quad (47)$$

$$t_{12} = t_{21} = 0. \quad (48)$$

代入(43),(44)式,得透射系数

$$\alpha'_2 = \tilde{1} \frac{\varepsilon}{e^{-i\phi_s} J_{2,-\theta} - A_2 J_{2,-\theta} A_2 e^{i\phi_s}} \tilde{1}. \quad (49)$$

按本问题,其中

$$J_{2,-\theta} = J_{2,\theta}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$\theta = \pi\Phi/\phi_0, \quad (51)$$

Φ 为穿过环孔的外磁通量,而

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (52)$$

其中

$$a = -\frac{1}{2}(\sqrt{1-2\varepsilon}-1), \quad (53)$$

$$b = -\frac{1}{2}(\sqrt{1-2\varepsilon}+1). \quad (54)$$

由 (49), (50), (52) 至 (54) 式, 得到透射系数

$$\alpha'_2 = \frac{i 2 \varepsilon \cos \theta \cdot \sin \phi_s}{a^2 + b^2 \cos 2\theta - (1 - \varepsilon) \cos 2\phi_s + i \varepsilon \sin 2\phi_s}. \quad (55)$$

(55) 式与应用 Büttiker 等人的两分支公式得到的结果完全一致^[9], 在此求解过程也较为简便.

作为另一个特例, 我们求一个完全对称三分支 (指各分支上的磁通相移按 (29) 式, 其他参数均为一致) 结构的透射幅. 为简单起见, 仍考虑分支散射体是全透射 ($R'_j = 0, j = 1, 2, 3$) 的情况, 外磁场在两个小环中的通量均为 Φ . 与 $n = 2$ 的例子类似

$$t_{11} = I e^{i\phi_s}, \quad t_{22} = I e^{-i\phi_s}, \quad (56)$$

$$t_{12} = t_{21} = 0, \quad (57)$$

故

$$\alpha'_2 = \tilde{I} \frac{\varepsilon}{e^{-i\phi_s} J_{3,-\theta} - A_3 J_{3,-\theta} A_3 e^{i\phi_s}} \tilde{I}. \quad (58)$$

按本问题

$$J_{3,-\theta} = J_{3,\theta}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}, \quad (59)$$

$$\Theta = 2\theta = 2\pi\Phi/\phi_0. \quad (60)$$

在 (58) 式中代入 (59) 式及

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$$a = -\frac{1}{3} (\sqrt{1-3\varepsilon} - 2), \quad (62)$$

$$b = -\frac{1}{3} (\sqrt{1-3\varepsilon} + 1), \quad (63)$$

得透射系数

$$\alpha'_2 = \frac{i 2 \varepsilon (2 \cos \Theta + 1) \sin \phi_s}{2 b^2 (\cos 2\Theta + 2 \cos \Theta) + 3 a^2 - 1 + (3\varepsilon - 2) \cos 2\phi_s + i 3 \varepsilon \sin 2\phi_s}. \quad (64)$$

(64) 式的一些计算结果在图 3 至图 6 中给出. 图 3 是在强耦合极限下 ($\varepsilon = 1/3$), 透射几率 $T = |\alpha'_2|^2$ 与散射相移 ϕ_s 的关系. 可见 T 为 ϕ_s 的周期函数, 其周期为 π (当分支为强散射时, 其周期一般为 2π). 在图 3 中也可见到 T 随外磁通 Φ 调制的情况. 与 $n = 2$ 相比, 这种磁通调制在趋势上大体相同, 周期都为 ϕ_0 . 但 $n = 3$ 时在一个周期内有两个零点 $\Phi = \frac{1}{3} \phi_0, \frac{2}{3} \phi_0$, 而在 $n = 2$ 时只有一个零点 $\Phi = \frac{1}{2} \phi_0$, 图 4 给出了这种差别.

图 5 显示 $n = 3$ 结构的透射几率 T 随耦合常数 ε 的变化. 在 ϕ_s 的一个周期中, 从强耦合 $\varepsilon \sim 1/3$ 过渡到弱耦合 $\varepsilon \sim 0$ 时, 出现 4 个峰. 由于散射相移 ϕ_s 是能量的函数, 峰的位置对应于孤立结构的能量本征态, 峰的宽度与处于这种态的准粒子寿命有关. 在弱耦合情况下, 这种与“谐振腔”类似的金属微结构起着“滤波器”的作用. 当耦合增加, 准粒

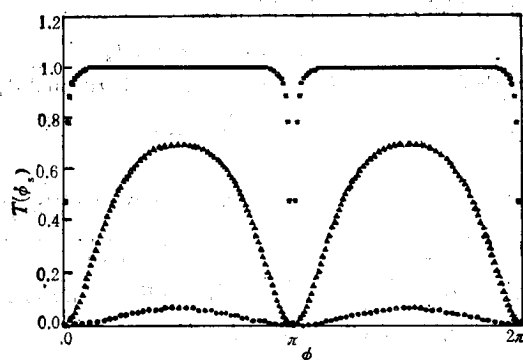


图3 强耦合极限 ($\varepsilon = 1/3$) 下,透射几率 T 随散射相移 ϕ_s 的改变 ϕ_s 的周期为 π ;
■ 为外磁通 $\Phi = 0.05 \phi_0$; ▲ 为外磁通为 $\Phi = 0.2 \phi_0$; ● 为 $\Phi = 0.3 \phi_0$

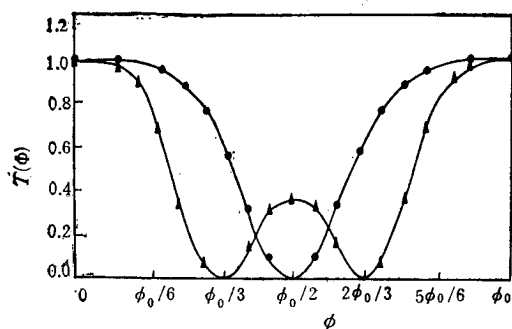


图4 透射几率 T 随磁通 Φ 的振荡 取 $\phi_s = \pi/2$;
▲ 为 $n=3$ 时, $\varepsilon=1/3$ 的数据;
● 为 $n=2$ 时, $\varepsilon=1/2$ 的数据

子图象随之消失。在强耦合极限 ($\varepsilon = 1/3$) 下,当 $\Phi = 0$ 时, $T = 1$, 微结构又相当于一个“波导”。

图6表明体系的准粒子能谱受外磁通量连续调制的情况。显然这种调制是周期性的。与图3比较可知,磁通调制在强耦合与弱耦合两种情况下是不同的。在入射粒子的能量有一定分布的随机散射条件下,透射几率应是对能量(或 ϕ_s) 求系综平均的结果,因此只有在强耦合和弱散射体 ($R_s \sim 0$) 条件下才会得到最大的磁通调制幅度(见图3)。

前面从数值计算中得到了 $\varepsilon \sim 0$ 时的准粒子图像。事实上,把 ϕ_s 写成复数形式

$$\phi_s = \phi_r + i\phi_i, \quad (65)$$

ϕ_r , ϕ_i 分别为它的实部和虚部。代入(64)式,并令分母为零,应用

$$\cos 2\phi_s = \cos 2\phi_r \cosh 2\phi_i - i \sin 2\phi_r \sinh 2\phi_i, \quad (66)$$

$$\sin 2\phi_s = \sin 2\phi_r \cosh 2\phi_i + i \cos 2\phi_r \sinh 2\phi_i, \quad (67)$$

得到极点位置

$$\phi_i = \frac{1}{4} \ln(1 - 3\varepsilon), \quad (68)$$

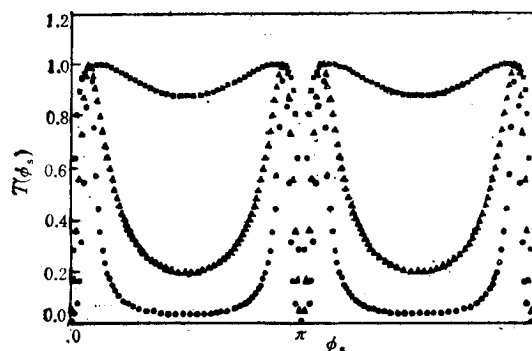


图5 透射几率 T 随耦合参数 ε 变小出现尖峰 $\Phi = 0.05 \phi_0$;
 ■取 $\varepsilon = 0.32$; ▲取 $\varepsilon = 0.2$; ●取 $\varepsilon = 0.1$

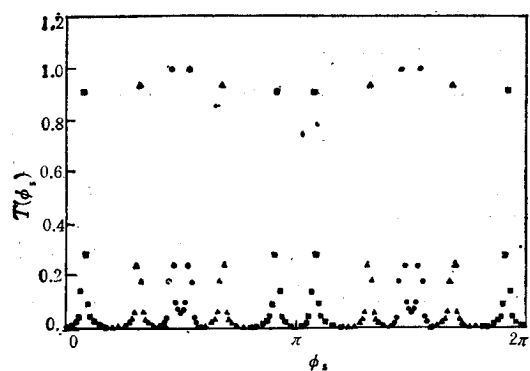


图6 弱耦合 $\varepsilon \sim 0$ 时,透射几率 T 的峰值位置受外磁通 Φ 的调制
 $\varepsilon = 0.02$; ■取 $\Phi = 0.05 \phi_0$; ▲取 $\Phi = 0.2 \phi_0$; ●取 $\Phi = 0.3 \phi_0$;
 峰点高度不到 1.0 是由计算机采样的离散性所致

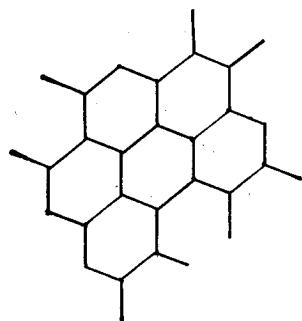


图7 与3分支封闭结构拓扑等价的一维无穷网络

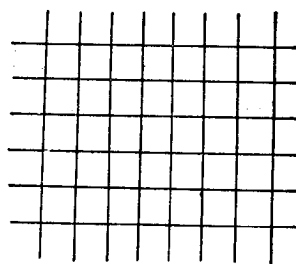


图8 与4分支封闭结构等价的一维无穷网络

$$\cos 2 \phi_r = \frac{2 b^2 (\cos 2 \Theta + 2 \cos \Theta) + 3 a^2 - 1}{2 \sqrt{1 - 3 \varepsilon}}. \quad (69)$$

将上面两式在 $\varepsilon = 0$ 点作幂级数展开,得

$$\phi_i = -\frac{3}{4} \left(\varepsilon + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \right) + o(\varepsilon^3), \quad (70)$$

$$\cos 2\phi_r = \left[\frac{4}{9} (\cos 2\Theta + 2 \cos \Theta) - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{4} (\cos 2\Theta + 2 \cos \Theta) + \frac{3}{8} \right] \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3). \quad (71)$$

$2\phi_r$ 在 $[0, \pi]$ 内, 即 ϕ_r 在 $[0, \pi/2]$ 内有一个解,

$$\phi_r = \phi_\theta - \frac{\frac{1}{8} (\cos 2\Theta + 2 \cos \Theta) + \frac{3}{16}}{\sqrt{1 - \left[\frac{4}{9} (\cos 2\Theta + 2 \cos \Theta) - \frac{1}{3} \right]^2}} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad (72)$$

其中

$$\phi_\theta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[\frac{4}{9} (\cos 2\Theta + 2 \cos \Theta) - \frac{1}{3} \right]. \quad (73)$$

当 $\varepsilon = 0$, $\phi_r = 0$, 故极点在实轴上, $\phi_r = \phi_\theta$, 它是封闭的三支结构中电子能量的久期方程, 也是表征电子在图 7 所示的一维无穷网络上运动的能量方程. 在 $(0, \pi/2)$ 区间有一个解. 在一个周期内 $(0, 2\pi)$, 当不存在简并时, 有四个解, 对应图 6 中的四个峰. 在 $n = 4$, $\varepsilon = 0$ 时, (43) 式分母为零, 同样得到在一维方形无穷网络上 (图 8) 电子能量的方程.

从 (70), (72) 式可知, 当 ε 从零增加时, 极点以 ε 一次幂的速度由实轴向下半平面移动, 在实轴方向偏离 ϕ_θ 值的速度正比于 ε^2 . 因此, 在弱耦合 ($\varepsilon \ll 1/3$) 时, ε 的改变只引起共振峰宽度的变化. 又因为极点的虚部与 Θ 无关, 所以外场只改变极点的实部, 即调制峰的位置.

在弱耦合极限 ($\varepsilon \sim 0$), 体系在本征态附近 ($\phi_s \sim \phi_\theta$) 存在透射几率共振. 事实上, 此时可以把透射几率 $T = |\alpha'_2|^2$ 表示成 Breit-Wigner 共振形式

$$T = T_r \frac{\Gamma_n^2}{(E - E_n - \Delta E_n)^2 + \Gamma_n^2}. \quad (74)$$

为此, 我们把 (64) 式的分子和分母分别在 $\varepsilon = 0$, $\phi_s = \phi_\theta$ 附近作幂级数展开.

在 $\varepsilon \sim 0$

$$2b^2(\cos 2\Theta + 2\cos \Theta) + 3a^2 - 1 = 2\cos 2\phi_\theta - 3\varepsilon \cos 2\phi_\theta + o(\varepsilon^2). \quad (75)$$

假设在 ϕ_θ 附近由 ΔE 引起一个小变化 $\Delta\phi$, 即 $\phi_s = \phi_\theta + \Delta\phi$, 则有

$$(3\varepsilon - 2)\cos 2\phi_s = -2\cos 2\phi_\theta + 3\varepsilon \cos 2\phi_\theta + 2\sin 2\phi_\theta \cdot (2\Delta\phi) + o[(\Delta\phi)^2]. \quad (76)$$

由 (73) 式可知

$$2\cos \Theta + 1 = \pm 3\cos \phi_\theta. \quad (77)$$

由 (75)–(77) 式, 并在 (64) 式的分子和分母中略去 ε , $\Delta\phi$ 的高阶项, 由 $T = |\alpha'_2|^2$ 得

$$T = \frac{(3\varepsilon)^2}{(4\Delta\phi)^2 + (3\varepsilon)^2}. \quad (78)$$

可见在 $\varepsilon \sim 0$, $\phi_s \sim \phi_\theta$ 时确实存在 B-W 型共振, 其峰值 $T_r = 1$, 宽度 Γ_n 与 ε 有关. 这与直接计算的结果完全一致.

五、讨 论

上面的结果(43),(44)及(45)式适用于任意多个分支及散射体之间有关联的一般非对称结构,用这些表式在原则上可以对这样的结构求解,得到类似于(55),(64)式那样的解析结果。但是随着 n 增加,特别当引入非对称参数后,求解过程将变得十分冗繁。在不要求得到解析式时,可借助大型计算机对(43),(44)及(45)式作直接的数值计算。

值得注意,本文的结果是在严格一维和绝对零度下得到的。在有限温度,对于纯金属,要求结构尺寸 L 远小于电子的弹性散射平均自由程 l ;对于无序材料,则要求样品尺寸小于非弹性散射扩散长度 l_{in} ^[6]。在1 K温度下, l_{in} 在 10^3 Å量级或大一些。在10 mK时, l_{in} 大于 $1 \mu m$ ^[2]。因此为使这类 Aharonov-Bohm 效应能够在实验上被观察到,一般说须借助于极低温技术和现代的 nm 量级样品制备技术^[7,8]。

参 考 文 献

- [1] M. Büttiker, Y. Imry and M. Ya. Azbel, *Phys. Rev.*, **A30** (1984), 1982.
- [2] Y. Gefen, Y. Imry and M. Ya. Azbel, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 129.
- [3] R. Landauer, *Phil. Mag.*, **21**(1970), 863.
- [4] B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 747.
- [5] 陈赓华、赵忠贤, 本刊本期.
- [6] Qiming Li and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev.*, **B33**(1986), to be published.
- [7] A. N. Broers, W. W. Molzen, J. J. Cuomo and N. D. Wittels, *Appl. Phys. Lett.*, **29**(1976), 596.
- [8] H. G. Craighead, R. E. Howard, L. P. Jackel and P. M. Mankiewich, *Appl. Phys. Lett.*, **42**(1983), 38.

TRANSMISSION PROBABILITY IN ONE-DIMENSIONAL NORMAL-METAL MULTICHANNEL STRUCTURE

CHEN GENG-HUA ZHAO ZHONG-XIAN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the strictly one-dimensional normal metal multichannel structures are considered. We point out that the structures in multichannel cases can also be treated with an improved form of Büttiker's method, which was originally used for two channel cases. A formula for multichannel transmission coefficient is presented. As a simple example, the numerical results for three branches are given, which show the application of the formula and illustrate the transmission probability resonances in such structures.