

Einstein-Cartan 引力理论中的 广义协变守恒定律

段一士 刘继承 董学耕

(兰州大学物理系)

1986 年 7 月 21 日收到

提 要

本文从广义 Noether 定理出发,对 Einstein-Cartan 引力理论中一般拉氏量所对应的守恒定律作了普遍的讨论,并由广义位移变换 $x^{\mu'} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}_{\alpha} b^{\alpha}$ 得到了包含挠率的一般拉氏密度所对应的广义协变能量动量守恒定律,并论述了超势存在的必然性。它是文献[1]和[2]理论的自然推广。

一、引 言

本文作者之一曾在广义相对论中提出了一种广义协变的能量动量守恒定律^[1-3],它克服了爱因斯坦、朗道等人过去提出的能量动量守恒定律只适用于准伽利略坐标系和其它方面存在的缺点^[4,5],同时成功地克服了 Møller 理论中存在的不能解释 Bondi 平面引力波异于零的能量密度的问题^[6],并得到了正确的引力辐射公式^[2]。本文是上述工作的继续和推广。

众所周知,由爱因斯坦建立起来的引力理论曾取得了多方面的成功。但是它面临着一个基本困难,从爱因斯坦的原始拉氏函数出发,不能构造满意的重整化的引力场量子理论^[7-10]。Stelle^[11]的研究表明,在原始拉氏密度中加入 R^2 项,有可能解决重整化问题。近年来,人们已从更广的角度来探讨这一问题,即将原始引力理论推广到 Einstein-Cartan 理论^[12-18]。并提出了含有挠率的一般的引力拉氏量密度^[14,19]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = e \{ & -\alpha R + c_1 T_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\mu\nu} + c_2 T_{\lambda\mu\nu} T^{\mu\nu\lambda} + c_3 T^{\lambda}_{\mu\lambda} T^{\nu\mu}_{\nu} \\ & + c_4 R_{\lambda\mu\nu\rho} R^{\lambda\mu\nu\rho} + c_5 R_{\lambda\mu\nu\rho} R^{\nu\rho\lambda\mu} + c_6 R_{\lambda\mu\nu\rho} R^{\lambda\nu\mu\rho} \\ & + c_7 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_8 R_{\mu\nu} R^{\nu\mu} \}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ 为曲率张量, $T_{\lambda\mu\nu}$ 为挠率张量, $\alpha, c_1, \dots, c_8$ 为常数。

我们以 Vierbein e^{μ}_{α} 和李西旋度系数 $\omega_{\mu ab}$ 作为 Einstein-Cartan 引力理论中的基本场量。 e^{μ}_{α} 为 e^{α}_{μ} 的逆, e^{α}_{μ} 和度规张量之间有如下关系:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{ab} e^{\mu}_{\alpha} e^{\nu}_{\beta}, \\ e &= \sqrt{-g}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 为 Minkowski 度规, $g = \det(g_{\mu\nu})$, $e = \det(e^{\mu}_{\alpha})$ 。这里

小写拉丁字母用作局域标架指标,以 η_{ab} 和 η^{ab} 来升降;小写希腊字母用作黎曼指标,以 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 来升降。 $\omega_{\mu ab}$ 为局域 Lorentz 群规范理论的规范势,对于 a, b 指标是反对称的,

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}, \quad (3)$$

它对 μ 指标是一个矢量。

挠率张量 $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ 为仿射联络的反对称部分,

$$\begin{aligned} T^\lambda{}_{\mu\nu} &= \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}, \\ \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &= e_a^\lambda D_\mu e_\nu^a = e_a^\lambda (\partial_\mu e_\nu^a - \omega_{\mu b}^a e_\nu^b), \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

D_μ 为局域 Lorentz 规范理论的协变微商。 $T_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\rho} T^\rho{}_{\mu\nu}$ 。

曲率张量

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\rho} &= e_a^\lambda e_b^\mu R_{ab\nu\rho}, \\ R_{ab\lambda\mu} &= \partial_\mu \omega_{\lambda ab} - \partial_\lambda \omega_{\mu ab} - \omega_{\lambda a}^c \omega_{\mu cb} + \omega_{\mu a}^c \omega_{\lambda cb}. \end{aligned} \quad (5)$$

李西张量

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu} \quad (6)$$

应注意在 Riemann-Cartan 几何中, $R_{\lambda\mu\nu\rho} \neq R_{\nu\rho\lambda\mu}$, 因而 $R_{\mu\nu} \neq R_{\nu\mu}$ (参阅文献 [21])。故拉氏量(1)式中 c_4 , c_5 和 c_6 项不能合并, c_7 和 c_8 项也不能合并。

设引力场和物质系统的总拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M,$$

$\mathcal{L}_M$ 为物质的拉氏密度, $\mathcal{L}_G$ 为包含挠率的引力场拉氏密度(1)式, 如以 e_μ^a 和 $\omega_{\mu ab}$ 为基本场量, 则由最小作用原理可求得下列两组方程:

$$[\mathcal{L}_G]_{e_\mu^a} = e T_\mu^a, \quad (7)$$

$$[\mathcal{L}_G]_{\omega_{\mu ab}} = e S^{\mu ab}, \quad (8)$$

其中 $[\mathcal{L}_G]_{e_\mu^a}$ 和 $[\mathcal{L}_G]_{\omega_{\mu ab}}$ 分别为 $\mathcal{L}_G$ 对 e_μ^a 和 $\omega_{\mu ab}$ 变分的欧拉式(它的具体形式见第二节)。

$$T_\mu^a \equiv \frac{-1}{e} [\mathcal{L}_M]_{e_\mu^a}$$

为物质的能量动量张量,

$$S^{\mu ab} \equiv -\frac{1}{e} [\mathcal{L}_M]_{\omega_{\mu ab}}$$

为物质的自旋流张量,(7)式为广义 Einstein 方程,(8)式称为 Cartan 方程。

一些学者曾讨论过 Einstein-Cartan 方程(7)和(8)的静态球对称解及有关拉氏量(1)式的一些其它问题^[19,20]。本文则是利用我们在文献[1]和[2]中的理论讨论相应拉氏密度(1)式的能量动量守恒定律,并论述了超势的存在。

二、引力理论中的广义守恒定律

在引力理论中,守恒定律是重要的基本问题之一,为探讨具有挠率和曲率张量的更复

杂的拉氏量,例如(1)式,所对应的能量动量守恒定律,有必要在广义相对论的框架内,利用广义 Noether 定理,先对守恒定律作一般的讨论.设系统的作用量为

$$I = \int_G \mathcal{L}(\phi^A, \phi_{,\mu}^A) d^4x, \quad (9)$$

其中 ϕ^A 为具有广义指标 A 的场函数, $\phi_{,\mu}^A \equiv \partial_\mu \phi^A$. 假设作用量对下列微变换:

$$x \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (10)$$

$$\phi^A(x) \rightarrow \phi'^A(x') = \phi^A(x) + \delta \phi^A(x) \quad (11)$$

不变,并假设 $\delta \phi^A(x)$ 在四维体积 G 的边界上为零,则可证明存在下列广义 Noether 定理^[1]:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^A} \delta_0 \phi^A \right) + [\mathcal{L}]_{\phi^A} \delta_0 \phi^A = 0, \quad (12)$$

其中 $[\mathcal{L}]_{\phi^A}$ 为 $\mathcal{L}$ 对 ϕ^A 变分的欧拉式

$$[\mathcal{L}]_{\phi^A} = (\partial \mathcal{L} / \partial \phi^A) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^A} \right), \quad (13)$$

$\delta_0 \phi^A$ 为 ϕ^A 的李变分

$$\delta_0 \phi^A(x) = \phi'^A(x) - \phi^A(x) = \delta \phi^A(x) - \phi_{,\mu}^A \delta x^\mu. \quad (14)$$

如果 $\mathcal{L}$ 为系统的总拉氏密度,则有 $[\mathcal{L}]_{\phi^A} = 0$, 它对应于最小作用原理 $\delta I = 0$ 所求得的场 ϕ^A 的运动方程,则由(12)式知,存在一个对应于变换(10),(11)式的守恒定律

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^A} \delta_0 \phi^A \right) = 0. \quad (15)$$

这里必须注意,如果 $\mathcal{L}$ 不是系统的总拉氏密度,例如它为引力场拉氏密度时, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_G$, 只要其相应的作用量(9)式对变换(10),(11)式保持不变,这时(12)式仍然成立,但由于 $[\mathcal{L}_G]_{\phi^A} \neq 0$, (15)式不再成立.

在以 Vierbein 为基础的引力理论中,我们可以将 ϕ^A 分为 $\phi^A = \{e_a^\mu, \phi^B\}$, 其中 ϕ^B 为广义坐标变换下的任意张量,例如它可以是李西旋度系数 $\omega_{\mu ab}$, 当 ϕ^B 为 $\phi^{v_1 \cdots v_k}$ 时,我们总可以用 Vierbein e_a^μ 使其标量化

$$\phi^{a_1 \cdots a_k} = e_{v_1}^{a_1} \cdots e_{v_k}^{a_k} \phi^{v_1 \cdots v_k}. \quad (16)$$

故实质上可以认为 ϕ^B 是广义坐标变换下的标量,即引力场拉氏密度 $\mathcal{L}_G$ 中除 Vierbein e_a^μ 外,其余的场量 ϕ^B 都可取为坐标变换下的标量,从以后的讨论中可以看到,这样选择 ϕ^B 后可以使问题大大简化.此时,(12)式变为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\mathcal{L}_G \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^v} \delta_0 e_a^v + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \phi_{,\mu}^A} \delta_0 \phi^A \right) \\ & + [\mathcal{L}_G]_{e_a^\mu} \delta_0 e_a^\mu + [\mathcal{L}_G]_{\phi^A} \delta_0 \phi^A = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

在(10),(11)式的变换下,

$$\begin{aligned} \delta_0 e_a^\mu &= e_a^\nu \delta x_{,\nu}^\mu - e_{a,\nu}^\mu \delta x^\nu, \\ \delta_0 \phi^A &= -\phi_{,\mu}^A \delta x^\mu. \end{aligned} \quad (18)$$

将上式代入(17)式,得到

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\left(\mathcal{L}_G \delta x^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^v} e_{a,\sigma}^v - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \phi_{,\mu}^A} \phi_{,\sigma}^A \right) \delta x^\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^v} e_a^\sigma \delta x_{,\sigma}^\mu \right]$$

$$+ [\mathcal{L}_G]_{e_a^\mu} (e_a^\nu \delta x_{,\nu}^\mu - e_{a,\nu}^\mu \delta x^\nu) - [\mathcal{L}_G]_{\psi^A} \psi_{,\mu}^A \delta x^\mu = 0. \quad (19)$$

为了利用引力场的拉氏密度 $\mathcal{L}_G$ 的广义 Noether 定理求得守恒定律,即如何将(19)式化为一个四维散度形式,现在先讨论一个有用的恒等式。由于

$$I_G = \int_G \mathcal{L}_G(e_a^\mu, e_{a,\nu}^\mu; \psi^A, \psi_{,\mu}^A) d^4x$$

对坐标的任意微变换 $x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ 是不变量,则利用广义 Noether 定理(12)式,有恒等式

$$[\mathcal{L}_G]_{e_a^\nu} e_{a,\mu}^\nu + [\mathcal{L}_G]_{\psi^A} \psi_{,\mu}^A + \partial_\nu ([\mathcal{L}_G]_{e_a^\nu} e_a^\nu) = 0. \quad (20)$$

由此式,可将(19)式变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\left(\mathcal{L}_G \delta_\sigma^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^\nu} e_{a,\sigma}^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \psi_{,\mu}^A} \psi_{,\sigma}^A + [\mathcal{L}_G]_{e_a^\sigma} e_a^\mu \right) \delta x^\sigma \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^\nu} e_a^\sigma \delta x_{,\sigma}^\nu \right] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

上式便是引力理论中的广义守恒定律。为了今后讨论问题方便,引入

$$I_\sigma^\mu \equiv \mathcal{L}_G \delta_\sigma^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^\nu} e_{a,\sigma}^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \psi_{,\mu}^A} \psi_{,\sigma}^A + [\mathcal{L}_G]_{e_a^\sigma} e_a^\mu, \quad (22)$$

$$V_\nu^{\mu\sigma} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^\nu} e_a^\sigma, \quad (23)$$

(21)式可简化为

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (I_\sigma^\mu \delta x^\sigma + V_\nu^{\mu\sigma} \delta x_{,\sigma}^\nu) = 0. \quad (24)$$

由于上式对任意微变换都是成立的,如果取

$$\delta x^\sigma = \text{常数},$$

则由(24)式有

$$\partial_\mu I_\sigma^\mu = 0. \quad (25)$$

而对任意坐标变换

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu(x),$$

则利用(25)式,(24)式可化为

$$(I_\mu^\sigma + V_{\mu,\nu}^{\nu\sigma}) \varepsilon_{,\sigma}^\mu + V_\mu^{\nu\sigma} \varepsilon_{,\sigma}^\mu = 0. \quad (26)$$

因为 $\varepsilon_{,\sigma}^\mu, \varepsilon_{,\sigma}^\nu$ 是完全独立的,因此上式左端两项必须分别为零,注意到 $\varepsilon_{,\sigma}^\mu$ 对 σ, ν 是对称的,则由上式可得

$$V_\mu^{\nu\sigma} = -V_\mu^{\sigma\nu} \quad (27)$$

和

$$I_\mu^\sigma = -\partial_\nu V_\mu^{\nu\sigma} = \partial_\nu V_\mu^{\sigma\nu}. \quad (28)$$

说明如果 I_G 对广义坐标变换 $x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ 是不变的,则由(22)式所定义的 I_σ^μ 与由(23)式所定义的 $V_\nu^{\mu\sigma}$ 之间存在(28)式的关系,此式对今后探讨广义相对论中的守恒定律是具有重要意义的。

三、广义相对论中能量动量守恒定律的一般表达式

在文献[1, 2]中曾详细论述了广义相对论中的能量动量守恒定律对应于总作用量对广义位移变换

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \quad \delta x^{\mu} = e_a^{\mu} b^a \quad (29)$$

的不变性。在此变换下, (24)式变为

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} [I_a^{\mu} e_a^{\sigma} + V_a^{\mu\nu} e_{a,\nu}^{\sigma}] = 0. \quad (30)$$

由爱因斯坦方程(7)及(22)知, $I_a^{\mu} e_a^{\sigma}$ 可表示为^[1]

$$I_a^{\mu} e_a^{\sigma} = \left[\mathcal{L}_G \delta_a^{\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\nu}^{\mu}} e_{a,\nu}^{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \phi_{, \mu}^A} \phi_{, \sigma}^A \right] e_a^{\sigma} + e T_a^{\mu}. \quad (31)$$

如进一步定义

$$e t_a^{\mu} = \left[\mathcal{L}_G \delta_a^{\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{b,\mu}^{\nu}} e_{b,\sigma}^{\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \phi_{, \mu}^A} \phi_{, \sigma}^A \right] e_a^{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{b,\mu}^{\nu}} e_b^{\nu} e_{a,\sigma}^{\sigma}, \quad (32)$$

并考虑(23)式, 可得

$$I_a^{\mu} e_a^{\sigma} + V_a^{\mu\nu} e_{a,\nu}^{\sigma} = e(T_a^{\mu} + t_a^{\mu}), \quad (33)$$

并且(30)式可写成

$$\partial_{\mu} [e(T_a^{\mu} + t_a^{\mu})] = 0. \quad (34)$$

此式对应于引力系统的能量动量守恒定律, 由此可知, (32)式所定义 t_a^{μ} 为引力场的能量动量张量。利用(28)式可将(33)式等号左边表达为超势 $V_a^{\mu\nu}$ 的散度

$$e(T_a^{\mu} + t_a^{\mu}) = \partial_{\nu} V_a^{\mu\nu}, \quad (35)$$

其中

$$V_a^{\mu\nu} = V_a^{\mu\nu} e_a^{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{b,\mu}^{\nu}} e_b^{\nu} e_{a,\sigma}^{\sigma}. \quad (36)$$

说明引力体系的总能量动量张量 $e(T_a^{\mu} + t_a^{\mu})$ 总是可以表示为超势 $V_a^{\mu\nu}$ 的散度。到现在为止, 我们尚未给定 $\mathcal{L}_G$ 的具体形式, 因此(34)和(35)式为广义相对论中能量动量守恒定律的一般表达式。

下面我们取 $\mathcal{L}_G$ 为爱因斯坦引力理论中的原始拉氏密度(挠率 $T_{\lambda\mu\nu} = 0$)

$$\mathcal{L}_G = - \frac{c^4}{16\pi G} R \sqrt{-g}, \quad (37)$$

说明文献[1]中的广义协变能量动量守恒定律是本文守恒定律形式的一个特例。在(37)式中如果略去四维散度项有^[1]

$$\mathcal{L}_G = \frac{c^4}{16\pi G} e [\bar{\omega}_a \bar{\omega}^a - \bar{\omega}_{abc} \bar{\omega}^{cba}], \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_a &= \eta^{bc} \bar{\omega}_{bac}, \quad \bar{\omega}_{abc} = e_a^{\mu} \omega_{\mu bc}, \\ \bar{\omega}_{abc} &= \frac{1}{2} (\omega_{abc} - \omega_{bca} + \omega_{cab}), \end{aligned}$$

$$Q_{abc} = e_a^\mu e_b^\nu (\partial_\mu e_{\nu c} - \partial_\nu e_{\mu c}), \quad (39)$$

$\bar{\omega}_{\mu ab}$ 为无挠时的李西旋度系数。

对此原始的拉氏密度(38)式,由(32)式可求得引力场的能量动量张量

$$\begin{aligned} \bar{t}_a^\mu = \frac{c^4}{16\pi G} \{ & e_a^\mu (\bar{\omega}_b \bar{\omega}^b - \bar{\omega}_{cbd} \bar{\omega}^{dbc}) - 2e_b^\mu (\bar{\omega}^b \bar{\omega}_a - \bar{\omega}^{dbc} \bar{\omega}_{cad}) \\ & - 2e_c^\mu (\bar{\omega}_b \bar{\omega}_a^{bc} + \bar{\omega}_b \bar{\omega}_a^{tc}) + 2e_d^\mu \bar{\omega}_{abc} \bar{\omega}^{cbd} \}. \end{aligned} \quad (40)$$

并可由(36)式求出此引力系统的超势的表达式

$$\bar{V}_a^{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} e [e_b^\mu e_c^\nu \bar{\omega}_a^{bc} + (e_a^\mu e_b^\nu - e_a^\nu e_b^\mu) \bar{\omega}^b]. \quad (41)$$

由(40)和(41)式表示的 $\bar{t}_a^\mu$ 和 $\bar{V}_a^{\mu\nu}$ 正是文献[1]中的结果。

四、有挠情况一般引力拉氏密度对应的广义协变能量 动量守恒定律

本节将研究 Einstein-Cartan 理论中一般引力拉氏密度(1)式所对应的能量动量守恒定律,从讨论的结果可以看出该守恒定律是广义协变的。为讨论问题方便起见,我们以 e_a^μ , ω_{abc} 为独立变量来表示曲率张量和挠率张量。定义

$$R_{abcd} = e_c^\lambda e_d^\mu R_{ab\lambda\mu}. \quad (42)$$

由 $R_{ab\lambda\mu}$ 的定义(5)式,用 ω_{abc} 表示上式,则有

$$R_{abcd} = \partial_d \omega_{cab} - \partial_c \omega_{dab} + \omega_{dac} \omega_{cb}^e - \omega_{cae} \omega_{db}^e + \omega_{cab} D_{cb}^e, \quad (43)$$

其中

$$\partial_d \equiv e_d^\mu \partial_\mu, \quad D_{bc}^a \equiv e_b^\mu (e_c^\nu e_{\mu,\nu}^a - e_c^\nu e_{b,\nu}^\mu). \quad (44)$$

李西张量可用 R_{ab} 表示

$$R_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}, \quad (45)$$

$$R_{ab} = \partial_c \omega_{ba}^c - \partial_b \omega_a^c + \omega_b^{cd} \omega_{da}^e - \omega_{bad} \omega^d + \omega_{dca} D^{dc} b. \quad (46)$$

并定义

$$T_{abc} = e_a^\lambda e_b^\mu e_c^\nu T_{\lambda\mu\nu}. \quad (47)$$

利用(4)式,上式还可进一步表示为

$$T_{abc} = e_{\mu a} (e_{c,\nu}^\mu e_b^\nu - e_{b,\nu}^\mu e_c^\nu) + (\omega_{cab} - \omega_{bac}). \quad (48)$$

我们注意到以上各式中 ω_{abc} 对广义坐标变换是标量,在以下的讨论中 ω_{abc} 起 ϕ^B 的作用。由(43)(46)和(48)式,可将一般拉氏密度(1)式表示为如下的形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = \alpha e [& \bar{\omega}_a \bar{\omega}^a - \bar{\omega}_{abc} \bar{\omega}^{cba}] + \left[\left(c_1 - \frac{1}{4} \alpha \right) T_{abc} T^{abc} + \left(c_2 - \frac{1}{2} \alpha \right) T_{abc} T^{bca} \right. \\ & + (c_3 - \alpha) T_{ba}^a T_c^{cb} + c_4 R_{abcd} R^{abcd} + c_5 R_{abcd} R^{cdab} \\ & \left. + c_6 R_{abcd} R^{acbd} + c_7 R_{ab} R^{ab} + c_8 R_{ab} R^{ba} \right] \cdot e. \end{aligned} \quad (49)$$

这里应注意,上式是拉氏密度(1)式中的 eR 项抛掉四维散度项后的结果, $\bar{\omega}_{abc}$ 的定义是(39)式。在计算的过程中我们用到了 R 的具体表达式

$$eR = -e[\bar{\omega}^a \bar{\omega}_a - \bar{\omega}_{abc} \bar{\omega}^{cba}] + 2\partial_\mu (e\eta^{bc} e_b^\mu \bar{\omega}_c) + 2(eT_a^{ba} e_b^\lambda)_{,\lambda} - e\left(T_{ab}^a T_c^{bc} + \frac{1}{2} T_{abc} T^{bca} - \frac{1}{4} T_{abc} T^{abc}\right). \quad (50)$$

利用(43)和(48)式及引力场能量动量张量 t_a^μ 的定义(32)式和超势 $V_a^{\mu\nu}$ 的定义(36)式, 经过冗长的计算后, 可以得到(49)式 $\mathcal{L}_G$ 所对应的 t_a^μ 和 $V_a^{\mu\nu}$,

$$t_a^\mu = \frac{16\pi G}{c^4} \alpha \bar{t}_a^\mu + e_a^\mu \left[\left(c_1 - \frac{\alpha}{4} \right) T_{dbc} T^{dbc} + \left(c_2 - \frac{\alpha}{2} \right) T_{dbc} T^{bcd} + (c_3 - \alpha) T_{bd}^d T_c^{cb} + c_4 R_{jbcd} R^{jbcd} + c_5 R_{jbcd} R^{cdjb} + c_6 R_{jbcd} R^{icbd} + c_7 R_{db} R^{db} + c_8 R_{bd} R^{db} \right] + 2(e_b^\sigma e_{a,\sigma}^\mu - e_a^\sigma e_{b,\sigma}^\mu) A_\nu^{\mu b} - 2\omega_{dbc,\sigma} e_a^\sigma B^{\mu dbc}, \quad (51)$$

其中 $\bar{t}_a^\mu$ 的表达式是(40)式, $A_\nu^{\mu b}$ 和 $B^{\mu dbc}$ 的定义如下:

$$A_\nu^{\mu b} \equiv 2 \left(c_1 - \frac{\alpha}{4} \right) e_{\nu a} e_c^\mu T^{acb} + \left(c_2 - \frac{\alpha}{2} \right) e_{\nu a} e_c^\mu (T^{cba} - T^{bca}) + (c_3 - \alpha) (e_b^\mu e_a^\nu T_c^{ac} - \delta_\nu^\mu T_c^{bc}) + e_a^\mu e_\nu^f \omega_{fae} [2c_4 R^{acbd} + 2c_5 R^{bdac} + 2c_6 R^{abdc}] + c_7 e_a^\mu e_\nu^f (R^{ab} \omega_{fa}^d - R^{ad} \omega_{fa}^b) + c_8 e_a^\mu e_\nu^f (R^{ba} \omega_{fa}^d - R^{da} \omega_{fa}^b), \quad (52)$$

$$B^{\mu dbc} \equiv [2c_4 R^{bcdj} + 2c_5 R^{djbc} + c_6 (R^{bdcj} - R^{bjcd}) + c_7 (R^{cj} \eta^{db} - R^{cd} \eta^{bf}) + c_8 (R^{jc} \eta^{db} - R^{dc} \eta^{bf})] e_f^\mu. \quad (53)$$

超势可表示为

$$V_a^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \alpha \bar{V}_a^{\mu\nu} + e \left\{ (4c_1 - \alpha) T_{abc} e_b^\mu e_c^\nu + 2(c_3 - \alpha) T_{ic}^\nu (e_a^\nu e_b^\mu - e_a^\mu e_b^\nu) + 2(e_b^\mu e_c^\nu - e_b^\nu e_c^\mu) \left[\left(c_2 - \frac{\alpha}{2} \right) T_a^{bc} + (c_4 R^{ibcd} + c_5 R^{cdjb} + c_6 R^{icbd}) \omega_{ajd} - (c_7 R^{db} + c_8 R^{bd}) \omega_{ad}^c \right] \right\} \quad (54)$$

式中 $\bar{V}_a^{\mu\nu}$ 为原始引力拉氏密度(38)式所对应的超势, 其表达式为(41)式. 由(54)式的具体形式知, $e^{-1} V_a^{\mu\nu}$ 对 μ, ν 是二阶反对称张量.

我们注意到当挠率为零 ($T_{abc} = 0$) 时, 相应的超势可简化为

$$V_a^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \alpha \bar{V}_a^{\mu\nu} + 2e(e_b^\mu e_c^\nu - e_b^\nu e_c^\mu) [(c_4 + c_5 - c_6) \cdot R^{fbcd} \omega_{ajd} - (c_7 + c_8) R^{bd} \omega_{ad}^c]. \quad (55)$$

对于 $\mathcal{L}_G$ 为原始引力拉氏密度(38)式, $\alpha = c^4/16\pi G$, $T_{abc} = 0$, 并且 $c_1 = \dots = c_8 = 0$, 这时 t_a^μ 和 $V_a^{\mu\nu}$ 分别还原为(40)和(41)式, 即 $t_a^\mu = \bar{t}_a^\mu$, $V_a^{\mu\nu} = \bar{V}_a^{\mu\nu}$. 由文献[1]知, 系统的四维动量

$$P_a = \frac{1}{c} \int_\sigma (T_a^\mu + t_a^\mu) e d\sigma_\mu = \frac{1}{c} \int_\sigma V_a^{\mu\nu} dS_{\mu\nu}. \quad (56)$$

由于 $V_a^{\mu\nu} dS_{\mu\nu}$ 在坐标变换下是不变的, 由此得到的守恒定律便是广义协变的.

为了从能量动量守恒定律的角度说明 Einstein-Cartan 理论是允许存在的, 我们考虑 Einstein 方程和 Cartan 方程在物质分布为球对称有挠情况的一种解^[19,20], 其线元形式为

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (57)$$

当 r 较大时, 解的具体形式如下:

$$e^\nu = 1 - \frac{2M}{c^2 r} (1 + \beta e^{-r/a}), \quad (58)$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{2M}{c^2 r} \left[1 - \frac{f - \alpha}{f} \beta r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-r/a}}{r} \right) \right], \quad (59)$$

$$\beta = \frac{f}{f - \alpha} \left(\frac{k}{a} \right)^3 \left(\frac{k}{a} \cosh \frac{k}{a} - \sinh \frac{k}{a} \right), \quad (60)$$

$$a^2 = \frac{3(c_7 + c_8)(f - \alpha)}{2f\alpha}, \quad (61)$$

$$f = \frac{1}{2} (2c_1 - c_2 + 2c_3 + 3\alpha), \quad (62)$$

$$\alpha = \frac{c^4}{16\pi G}, \quad (63)$$

其中 k 为物质分布的半径, M 为物质的总质量, 并且不为零的挠率张量为

$$T_{10}^0 = T_{12}^2 = -\beta \frac{\alpha}{f} M \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-r/a}}{r} \right). \quad (64)$$

当 $r \gg a$ 时, 度规(58)和(59)式具有 Schwarzschild 度规一样的性质, 并且挠率趋于零, 以后我们将看到在用超势计算系统的总能量时, 仅依赖于超势在无穷远处的行为. 由度规 $g_{\mu\nu}$ 确定 Vierbein e_a^μ 时, 由于 e_a^μ 有 16 个独立分量, 因此按过去的作法要考虑 6 个附加条件^[2,3]

$$(\bar{\omega}_{ab}^\mu)_{;\mu} = \frac{1}{e} \partial_\mu (e \bar{\omega}_{ab}^\mu) = 0, \quad (65)$$

其中“ $;$ ”表示对 μ 指标的协变微商, 利用(58), (59)式和附加条件(65)式, 可以求出相应的 Vierbein e_a^μ

$$(e_a^\mu) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \sin \theta \cos \varphi & e^{\lambda/2} \sin \theta \sin \varphi & e^{\lambda/2} \cos \theta & 0 \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{v/2} \end{pmatrix}.$$

不为零的曲率张量为

$$R_{101}^0 = -\frac{2M}{c^2 r^3} - \frac{f - \alpha}{f} \beta M \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{e^{-r/a}}{r} \right), \quad (66)$$

$$R_{02}^0 = R_{303}^0 = \frac{M}{c^2 r^3} \left[1 - \frac{f - \alpha}{f} \beta r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-r/a}}{r} \right) \right], \quad (67)$$

$$R_{212}^1 = R_{313}^1 = \frac{M}{c^2 r^3} \left\{ 1 - \beta r^2 \frac{f - \alpha}{f} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-r/a}}{r} \right) \right] \right\}, \quad (68)$$

$$R_{323}^2 = -\frac{2M}{c^2 r^3} \left\{ 1 + \frac{f - \alpha}{f} \beta r^2 \frac{d^2}{dr^2} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-r/a}}{r} \right) \right] \right\}. \quad (69)$$

由于 $r^2 R_{abcd}|_{r \rightarrow \infty} = 0$, $r^2 T_{abc}|_{r \rightarrow \infty} = 0$, 故当 $r \rightarrow \infty$ 时, $V_a^{\mu\nu} \rightarrow \bar{V}_a^{\mu\nu}$, 利用文献[11]中的结果,

$$E = \iint V_0^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = \iint \bar{V}_0^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = Mc^2, \quad (70)$$

即 Einstein-Cartan 引力理论中系统的总静能是与爱因斯坦原始引力理论的结果一致, 这

说明从能量动量守恒定律的观点看, Einstein-Cartan 引力理论是允许存在的。

有关引力辐射以及与其相关的其它问题将在另文中讨论。

参 考 文 献

- [1] 段一士、张敬业, 物理学报, **9**(1963), 689.
- [2] 段一士、王友棠, 中国科学(A辑), (4)(1983), 343.
- [3] 段一士、王友棠, Proceedings of the Third M. Grossmann Meeting on GR, North-Holland Publishing Company, (1983).
- [4] H. Bauer, *Physik. Z.*, **19**(1918), 163.
- [5] E. Schrödinger, Space-Time-Structure, Cambridge, (1956).
- [6] K. Kuchař & J. Langer, *Czech. J. Phys.*, **B13**(1963), 235.
- [7] G. 'tHooft & M. Veltman, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **20**(1974), 69.
- [8] S. Deser & P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 401; *ibid.*, **D10**(1974), 411.
- [9] S. Deser, P. van Nieuwenhuizen & H. S. Tsao, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3337.
- [10] R. Utiyama & B. Dewitt, *J. Math. Phys.*, **3**(1962), 406.
- [11] K. S. Stelle, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 953.
- [12] F. W. Hehl, *Phys. Lett.*, **78B**(1978), 102.
- [13] D. E. Neville, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2770; *ibid.*, **D21**(1980), 867.
- [14] E. Sezgin, & P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 3269.
- [15] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 445.
- [16] E. E. Fairchild, Jr., *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 2438.
- [17] F. Mansouri, & L. N. Chang, *Phys. Rev.*, **D13**(1974), 3192.
- [18] G. Debney, E. E. Fairchild, Jr., & S. T. C. Siklos, *Gen. Rel. Grav.*, **9**(1978), 879.
- [19] R. Rauch & H. T. Nieh *Phys. Rev.*, **D24**(1981), 2029.
- [20] 张元仲, *Commun. in Theor. Phys.*, **13**(1984), 551; *Phys. Rev.*, **D28**(1983), 1866.
- [21] F. W. Hehl, *Rep. Math. Phys.*, **9**(1976), 55.

GENERAL CONVERSATION LAWS IN EINSTEIN-CARTAN THEORY

DUAN YI-SHI LIU JI-CHENG DONG XUE-GENG

(Department of Physics, Lanzhou University)

ABSTRACT

Using Noether's theorem, the conversation laws for general Lagrangian in Einstein-Cartan theory are derived. The general covariant energy-momentum conversation law for general Lagrangian including torsion is obtained from general displacement transformation $x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon_a^{\mu} b^a$. It is shown that in our general case the superpotential must be existed. This result is the natural extension of the theory in references [1], [2].