第 36 卷 第 8 期
1987 年 8 月
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 36, No. 8
Aug., 1987

激光拍频波加速器的参数选择

余 玮 徐至展
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

1986 年 8 月 18 日收到

提 要

本文研究了激光拍频波加速器中的三波相互作用过程. 结果表明: 适当地选择参数 $\sigma = \omega_p/(\omega_1 - \omega_2)$ 以及 $\beta = \omega_2/\omega_1$($\omega_p$, ω_1, ω_2 分别为等离子体频率及两束激光频率), 即可用较弱的激光造成很强的拍频等离子体波,并使注入等离子体的电子获得显著的能量增益.

一、引 言

在实现激光粒子加速的各种方案中, 等离子体拍频波加速器 (beat wave accelerator) 被认为是最有前途、但不确定因素也最多的一种[1]. 这一方案的核心是利用频率为 ω_1 和 ω_2 的两束激光在等离子体内共振激发大振幅的拍频等离子体波. 以此捕获(trap)注入等离子体的速度与拍频波相速度相近的电子,使之在拍频波的强大的纵向场中得到加速. 拍频等离子体波的共振激发是一种相当复杂的三波相互作用过程, 其物理机制与等离子体中的受激 Raman 散射相似. 近年来尽管在这方面已有了不少工作[1-8]. 但有待解决的问题仍很多.

本文在同时计及相对论效应及热效应的基础上,计算了拍频波振幅、相速度对于两束激光的频率、振幅和等离子体的密度、温度的依赖关系, 以及被拍频波捕获的电子可能获得的能量增益. 然后根据计算的结果讨论了色散关系、共振条件、波裂 (wave breaking) 极限以及入射光强对于粒子加速的影响等重要而又有争议的问题, 指出: 拍频波加速器的效率在很大程度上取决于 $\sigma = \omega_p/(\omega_1 - \omega_2)$ 以及 $\beta = \omega_2/\omega_1$, 这两个参数适当地选定后,即可用较弱的激光造成很强的拍频等离子体波,并使注入等离子体的电子获得显著的能量增益.

二、理 论 推 导

计及相对论效应与热效应后, 离子固定的无碰撞等离子体中的波可以由下列方程描述[2]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{p} = -e\boldsymbol{E} - \frac{e}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \frac{3T_e}{n}\nabla n, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n\boldsymbol{v}) = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi e(n_0 - n), \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} en\boldsymbol{v}, \tag{5}$$

其中　　$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2} = m\boldsymbol{v}\gamma$,

$\boldsymbol{v}$ 为等离子体中电子的集体运动速度；n, n_0 分别为电子密度及等离子体密度；e, m 分别为电子电量、质量．在拍频波加速器中，频率为 ω_1 和 ω_2 的两束激光以及它们所激发的频率为 ω_3 的电子等离子体波都沿着同一方向传播． 当热电子捕获及相对论效应等[3,4]抑止了等离子体波的初期增长、使之达到饱和后，等离子体中三个波的电场强度可表示为

$$\boldsymbol{E}_{1,2}(x, t) = E_{1,2}\exp[-i(\omega_{1,2}t - k_{1,2}x)] \cdot \hat{y} + \text{c.c.}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{E}_3(x, t) = E_3\exp[-i(\omega_3 t - k_3 x)] \cdot \hat{x} + \text{c.c.}, \tag{7}$$

它们的频率与波数满足匹配条件

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_3, \qquad k_1 - k_2 = k_3.$$

以此代入方程(1)—(5)，得到关于频率为 ω_1 的激光光波的方程组

$$-i\omega_1 P_1 = -eE_1 - ik_2P_2v_3 + \frac{e}{c}v_3B_2, \tag{8}$$

$$-ick_1B_1 = -i\omega_1E_1 - 4\pi en_0v_1 - 4\pi en_3v_2, \tag{9}$$

$$ck_1E_1 = \omega_1B_1. \tag{10}$$

关于频率为 ω_2 的激光光波的方程组

$$-i\omega_2P_2 = -eE_2 - ik_1P_1v_3^* + \frac{e}{c}v_3^*B_1 \tag{11}$$

$$-ick_2B_2 = -i\omega_2E_2 - 4\pi en_0v_2 - 4\pi en_3^*v_1, \tag{12}$$

$$ck_2E_2 = \omega_2B_2. \tag{13}$$

以及关于拍频等离子体波的方程组

$$-i\omega_3P_3 = -eE_3 - \frac{e}{c}(v_1B_2^* + v_2^*B_1) - 3iT_ek_3n_3/n_0, \tag{14}$$

$$-\omega_3n_3 + k_3n_0v_3 = 0, \tag{15}$$

$$ik_3E_3 = -4\pi en_3, \tag{16}$$

其中 n_3 为拍频波造成的电子密度起伏．由(8),(10),(11),(13)式计算得到

$$(v_{p1}v_{p2} - |v_3|^2)(p_{1,2} - eE_{1,2}/i\omega_{1,2}) = 0. \tag{17}$$

两束激光在等离子体中的相速度 $v_{p1,p2} = \omega_{1,2}/k_{1,2}$ 通常都大于真空中的光速 c，因此在方程(17)中，$v_{p1} \cdot v_{p2} \neq |v_3|^2$,

$$v_{1,2} = eE_{1,2}/i\omega_{1,2}m\gamma. \tag{18}$$

由方程(15)可以得到

$$n_3/n_0 = v_3/v_{p3}, \tag{19}$$

其中 $v_{p3} = \omega_3/k_3$ 为拍频等离子体波的相速度．将(18),(19)式代入(8)—(16)式，导出

等离子体中三个波的波动方程

$$\left(\omega_1^2 - k_1^2c^2 - \frac{\omega_p^2}{\gamma}\right)E_1 = \frac{1}{\gamma}\omega_p^2 \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{n_3}{n_0}E_2, \tag{20}$$

$$\left(\omega_2^2 - k_2^2c^2 - \frac{\omega_p^2}{\gamma}\right)E_2 = \frac{1}{\gamma}\omega_p^2 \frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{n_3^*}{n_0}E_1, \tag{21}$$

$$(\gamma\omega_3^2 - 3k_3^2v_e^2 - \omega_p^2)n_3 = \gamma n_0 k_3^2 v_1 v_2^*, \tag{22}$$

其中 $\omega_p = (4\pi e^2 n_0/m)^{\frac{1}{2}}$ 为等离子体频率，$v_e = (T_e/m)^{\frac{1}{2}}$ 为电子热速度．Mckinstire 和 Simon[5] 在讨论等离子体中的受激 Raman 散射时曾得到过类似的方程组．将(19)式代入方程(20)—(22)，得到以下色散关系：

$$k_1^2c^2 = \omega_1^2 - \omega_p^2(1 + v_3/\alpha v_{p3})/\gamma = \omega_1^2 - \omega_p'^2, \tag{23}$$

$$k_2^2c^2 = \omega_2^2 - \omega_p^2(1 + \alpha v_3^*/v_{p3})/\gamma = \omega_2^2 - \omega_p''^2, \tag{24}$$

$$3k_3^2v_e^2 = \omega_3^2\gamma(1 - \alpha|v_2|^2/v_3v_{p3}) - \omega_p^2 = \omega_3'^2 - \omega_p^2, \tag{25}$$

其中 $\alpha = v_1/v_2 = \beta E_1/E_2$，$\beta = \omega_2/\omega_1$． 由(23)—(25)式求出三个波的波数后代入匹配条件，求得

$$\begin{aligned} cv_{p3}^{-1} = {} & [(1-\beta)^{-2} - \sigma^2(1 + v_3/\alpha v_{p3})/\gamma]^{\frac{1}{2}} \\ & - [\beta^2(1-\beta)^{-2} - \sigma^2(1 + \alpha v_3^*/v_{p3})/\gamma]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{26}$$

$$v_3v_{p3} = \alpha\gamma|v_2|^2/(\gamma - \sigma^2 - 3v_e^2/v_{p3}^2), \tag{27}$$

其中 $\sigma = \omega_p/\omega_3$．(26)，(27)式表明：拍频等离子体波的振幅与相速度取决于两束激光的频率、振幅以及等离子体的密度、温度．因为当这些参数选定后，上述方程中的 $\alpha, \beta, \sigma, v_e, |v_2|$ 均为已知，v_3 与 v_{p3} 即不难解出．在计算中，可令两束激光的初位相相等，这样，拍频波的初位相为零，$v_3 = |v_3|$．

以与 v_{p3} 相近的速度注入等离子体的电子在(7)式所示的电子等离子体波作用下，可能获得的能量增益在文献[4，6]中已有所研究． 设电子在实验室坐标系中的动量 $p = \gamma mu$，能量 $W = \gamma mc^2$，$\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$；而在以 v_{p3} 运动的波坐标系中 $p' = \gamma' mu'$，$W = \gamma' mc^2$、$\gamma' = (1 - u'^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$．由洛仑兹变换得到

$$\begin{pmatrix} cp \\ iW \end{pmatrix} = \gamma_\varphi \begin{pmatrix} 1 & -iv_{p3}/c \\ iv_{p3}/c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cp' \\ iW \end{pmatrix}, \tag{28}$$

其中 $\gamma_\varphi = (1 - v_{p3}^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$． 对等离子体波的势函数 $\phi = iE_3/k_3$ 作洛仑兹变换，得到在波坐标系中

$$\phi' = \gamma_\varphi\phi. \tag{29}$$

注入等离子体的电子在波坐标系中是相对静止的，当它们由 $\phi' = 0$ 落到势阱的底部所得到的动能为 $e|\phi'| = \gamma_\varphi e|\phi|$，其总能量变为

$$W' = \gamma' mc^2 = mc^2 + \gamma_\varphi e|\phi|. \tag{30}$$

由(30)式导出

$$\gamma' = 1 + \gamma_\varphi e|\phi|/mc^2. \tag{31}$$

令 $\varepsilon = \gamma_\varphi e|\phi|/mc^2 = \gamma_\varphi v_3 v_{p3}\sigma^2/c^2$，由(28)，(31)式求得在实验室坐标系中，电子总能量

$$W = \gamma_\varphi\gamma'(1 + v_{p3}u'/c^2)mc^2$$

$$= \gamma_\varphi mc^2\left[1 + \varepsilon + \frac{v_{p3}}{c}(2\varepsilon + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{32}$$

考虑到注入等离子体时的电子能量 $W_0 = \gamma_\varphi mc^2$，由(32)式求得实验室坐标系中的电子能量增益

$$\Delta W = W - W_0 = \left[\varepsilon + \frac{v_{p3}}{c}\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}\right]\cdot W_0, \tag{33}$$

其中当 $v_{p3} \to c$ 时，$\Delta W \sim 2\varepsilon W_0$[4,6]. 由于 $\varepsilon \propto v_3$, v_{p3}，以上计算表明，为了获得较大的能量增益，必须在等离子体内造成一个相速度接近光速的大振幅电子等离子体波[3].

三、讨 论

现有讨论受激 Raman 散射以及激光拍频波加速器的文献往往以熟悉的色散关系[1,4,5]

$$k_{1,2}^2c^2 = \omega_{1,2}^2 - \omega_p^2, \tag{34}$$

$$3k_3^2v_e^2 = \omega_3^2 - \omega_p^2 \tag{35}$$

为出发点. 然而这些关系实际仅适用于非相对论极限下、等离子体内单独存在的波. 在方程(20)—(22)中，令 $\gamma = 1$ 并略去方程等号右边的耦合项，即可导出(34),(35)式. 在激光拍频波加速器中，要利用拍频共振造成一个大振幅的电子等离子体波，相对论效应以及波与波之间的耦合效应都是不可忽略的，尤其是当拍频共振条件接近于满足时. 正确的色散关系应由(23)—(25)式给出. 计算表明：当 $\alpha = 1$, $\beta = 0.8$, $\sigma = 1.6$, $|v_2| = 0.01c$, $v_e = 0.005c$ 时

$$\omega_p' = \omega_p'' = [(1 + v_3/v_{p3})/\gamma]^{\frac{1}{2}}\omega_p \sim 0.88\omega_p,$$

$$\omega_3' = [\gamma(1 - |v_2|^2/v_3v_{p3})]^{\frac{1}{2}}\omega_3 \sim 1.6\omega_3.$$

(23)—(25)式与(34),(35)式之间的差别已相当明显.

拍频波加速器中激光拍频与等离子体频率之间的关系是一个重要而又有争议的问题. 一种相当普遍的观点将两者的匹配，即 $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2 = \omega_p$ 或 $\sigma = 1$ 视为完全共振条件 (perfect resonance condition)[3,7]，Tang 等人[8]则指出，由于相对论效应，ω_3 与 ω_p 之间的失配将更为有利. (30)式表明：对于一定强度的入射激光，为了得到较大的电子等离子体波振幅与相速度，应适当地选择激光拍频与等离子体频率的比值使得共振因子

$$\delta = 1 - (\sigma^2 + 3v_e^2/v_{p3}^2)/\gamma$$

趋于零，而所谓完全共振条件应为 $\delta = 0$ 或

$$\sigma_R = (\gamma - 3v_e^2/v_{p3}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

图 1 的实线画出了 $\alpha = 1$, $\beta = 0.8$, $|v_2| = 0.01c$, $v_e = 0.005c$ 时的 v_{p3}, v_3, δ 及 $\Delta W/W_0$. 可以看出：随着 δ 的减小，拍频等离子体波的振幅将显著增长，而其相速度则基本不变，其结果是，电子可能获得的能量增益也大为增长；然而当 v_3 增长到一定程度，相对论效应使得 δ 随 σ 的减小逐步放慢，v_3 及 $\Delta W/W_0$ 的增长也将相应变慢.

拍频等离子体波的最大振幅由波裂 (wave breaking) 所决定. 因为等离子体波的密度起伏 n_3 不能超过等离子体本底密度 n_0，达到这一极限，波就破裂了. 由(19)式可知，破

裂发生时

$$v_3 = v_{p3} = v_b.$$

以此代入(26),(27)式后得知,当 $\alpha = 1$ 时, v_b 可以由方程

$$cv_b^{-1} = [(1-\beta)^{-2} - 2\sigma_b^2/\gamma_b]^{\frac{1}{2}} - [\beta^2(1-\beta)^{-2} - 2\sigma_b^2/\gamma_b]^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

解出,其中

$$\gamma_b = [1 - (v_b^2/c^2) - 2|v_2|^2/c^2]^{-\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

$$\sigma_b = \gamma_b - (3v_e^2 + \gamma_b|v_2|^2)/v_b^2. \tag{38}$$

计算表明,波裂条件主要取决于参数 β. 由于在(36),(37)式中,必须满足

$$\beta^2(1-\beta)^{-2} - 2\sigma_b^2/\gamma_b > 0, \tag{39}$$

$$1 - (v_b^2/c^2) - 2|v_2|^2/c^2 > 0. \tag{40}$$

β 的取值将局限于由(39),(40)式所规定的范围内. $\alpha = 1$, $|v_2| = 0.01c$, $v_e = 0.005c$ 时, v_b, σ_b 对 β 的依赖关系如图 2 中实线所示. 显然,在规定的取值范围内,两束激光的频率比越大就越有利.

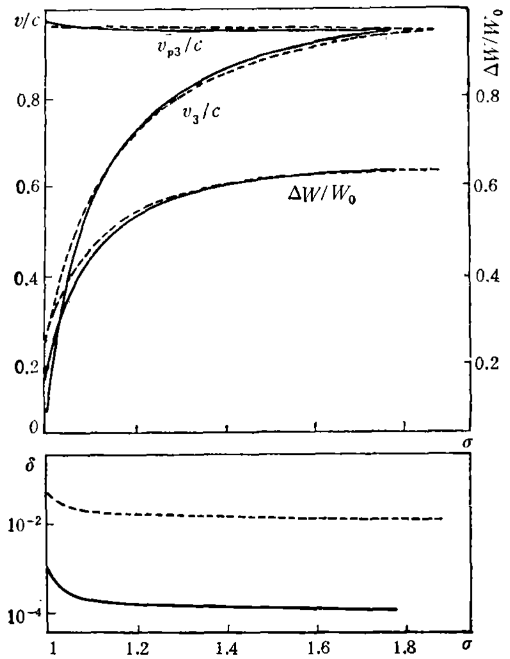

图 1 v_{p3}, v_3, δ 及 $\Delta W/W_0$ 对于 $\sigma = \omega_p/(\omega_1 - \omega_2)$ 的依赖关系 $\alpha = 1$; $\beta = 0.8$; $v_e = 0.005c$; $|v_2| = 0.01c$ (实线); $|v_2| = 0.1c$ (虚线)

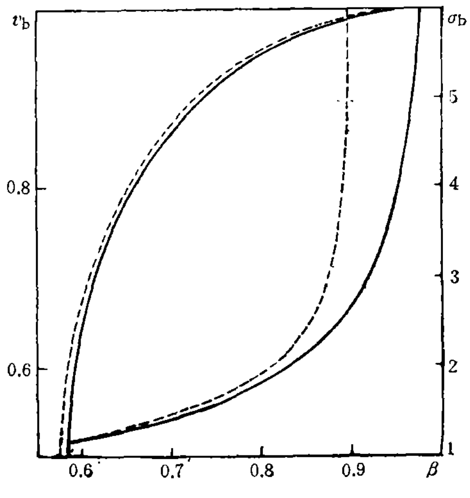

图 2 v_b, σ_b 对于 $\beta = \omega_2/\omega_1$ 的依赖关系 $\alpha = 1$; $v_e = 0.005c$; $|v_2| = 0.01c$ (实线); $|v_2| = 0.1c$ (虚线)

通常认为: 为了获得较大的电子能量增益,应尽可能地增加入射激光的强度. 然而 Noble[2] 指出,由于拍频波产生于等离子体的共振激发,故较弱的激光也能造成大振幅的拍频等离子体波. 图 1,图 2 中的虚线画出了其它参数不变,$|v_2|$ 由 $0.01c$ 增至 $0.1c$ 时的情况. 可以看出当 σ 足够大时,入射激光的增强对 v_3, v_{p3}, v_b 以及 $\Delta W/W_0$ 均无显著影响; $|v_2|$ 增大 10 倍后的唯一结果似乎是: 当 δ 接近于 10^{-2} (而不是 10^{-4})时,拍频波即已达到

相当的规模，相对论效应及波裂随即逐步延缓并最终截止了 δ 的继续减小及拍频波振幅的进一步增强。

参　考　文　献

[1] A. M. Sesser, in Laser Acceleration of Particles, edited by Paul. J. Channell, AIP, New York, (1982), AIP Conf. Proc. No. 91.

[2] R. J. Noble, *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 460.

[3] T. Tajima, *Laser and Particle Beams*, **3**(1985), 351.

[4] F. F. Chen, Invited Paper Presented at the 12th SPIG (Yugoslav Symposium on Physics of Ionized Gases), Sibenik, Yugoslavia, Sep. 3—7, (1984).

[5] C. J. Mckinstire and A. Simon, *Phys. Fluids*, 28(1985), 2602.

[6] T. Tajima and J. M. Dawson, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 267.

[7] W. Horton and T. Tajima, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 3937.

[8] C. M. Tang, P. Sprangle and R. N. Sudan, *Appl. Phys. Lett.*, **45**(1984), 375.

PARAMETER CHOICE FOR A LASER BEAT-WAVE ACCELERATOR

Yu Wei　　Xu Zhi-zhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

The three-wave interaction in a laser beat-wave accelerator are studied. We find that with the parameters of $\sigma=\omega_p/(\omega_1-\omega_2)$ and $\beta=\omega_2/\omega_1$properly chosen (where ω_p, ω_1, ω_2 are the plasma frequency and frequencies of the two laser beams respectively), the required large-amplitude plasma wave will be excited even though the incident laser beams are relatively weak. As a result, the injected electrons will get a sighificant energy gain.