

质心坐标系中分数量子 Hall 效应 体系的能量本征值

熊 小 明 周 世 勋

(复旦大学物理系)

1987 年 7 月 10 日收到

提 要

本文在质心坐标系中讨论了分数量子 Hall 效应的少粒子体系。推导了一个适用于任意电子数的对体系电子角动量的可能组合加以限制的关系式。利用这一约束条件,体系哈密顿量的本征方程阶数大大削减,从而减少了数值计算的工作量。进一步,我们在质心坐标系中计算了当前计入正电背景影响用得较多的均匀正电背景模型和局域电中性模型的能量本征值作了数值计算。

分数量子 Hall 效应是近几年来低维电子系统中十分活跃的研究领域。少体问题的精确数值计算是定量研究二维电子气物理性质的一个重要的研究方面。然而随着体系粒子数目的增加,精确计算的工作量增长极快。这主要是因为需要求解哈密顿量的本征方程的阶数随着体系粒子数增加而迅速增大。例如, Lai 等人曾指出^[1], 对一个粒子数目 $N = 7$ 的体系, 当总角动量 $L = 42$ 时, 哈密顿量本征方程的阶数高达 467。这已远远超出了目前一般电子计算机的范围, 因此, 寻求低工作量的计算方法很有必要。

另一方面, 在以往的少体问题计算中, 大部分工作都包含了质心的运动部分。由于质心角动量与哈密顿量对易, 计算出的能谱可能因质心的运动而掩盖体系内部自由度的动力学。因此, 排除质心运动将更有利于讨论二维电子气体系的内部运动性质。

我们曾经在少数电子体系的数值计算中发现体系哈密顿量的本征值有一个嵌套关系^[2]。即, 如果 $\{E_L\}$ 表示具有总角动量 L 的所有能量本征值的集合, 那么, 这个集合一定包含在总角动量为 $L + 1$ 的本征能量集合 $\{E_{L+1}\}$ 之中,

$$\{E_{L+1}\} \supseteq \{E_L\}. \quad (1)$$

这是一个很普遍的关系, 不仅与体系的粒子数 N 无关, 而且还不依赖于相互作用势的形式。

这一普遍的规律体现了不同总角动量 L 的哈密顿矩阵之间有着某种内在的联系。可以想象, 如果这种内在联系被找到, 在求解 $(L + 1)$ 的哈密顿量的本征值之前就可以把那些属于 $\{E_L\}$ 的本征值先提取出来。把哈密顿矩阵约化为只含 $\{E_{L+1}\}$ 中新增加的本征值的低阶矩阵。通过解这个较低阶数的本征方程求出完整的集合 $\{E_{L+1}\}$ 。

Laughlin^[3] 在对三个电子的计算中实际上已作了上述处理。他取质心坐标系, 哈密顿量中只考虑电子的相对运动部分。把一个三电子问题约化为两个电子的哈密顿量形

式. 他指出, 体系的总角动量由下列关系决定:

$$L = 3m + 2n, \quad (2)$$

其中 m 和 n 为约化后体系的量子数. 由于总角动量受(2)式的约束, 哈密顿量本征方程的阶数大为削减. 例如, 对总角动量 $L = 38$ 的情况, 哈密顿矩阵仅为 6 阶. 如果采用通常的包含质心运动的处理方法, 所求解的哈密顿量本征方程为 120 阶. 但是, 对于电子数 $N > 3$ 的体系, 类似于(2)式的关系 Laughlin 并没有给出.

Trugman 和 Kivelson 指出^[4], (1)式的嵌套关系是一种平移不变性的结果. 在 $\{E_{L+i}\}$ 中新增加的那些不属于 $\{E_L\}$ 的能量本征值对应于一个质心角动量 L_c 为零的子空间. 而那些包含在 $\{E_L\}$ 之中的本征值则属于质心角动量不等于零的解.

根据一般的定义, 质心角动量可写为

$$\begin{aligned} L_c &= R_c \times P_c \\ &= \frac{1}{N} L + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} L_{ij}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $R_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i$ 为质心位置, $P_c = \sum_{i=1}^N P_i$ 为质心动量, R_i 和 P_i 分别为第 i 个电子

的位置和动量. $L = \sum_{i=1}^N R_i \times P_i$ 为体系的总角动量, L_{ij} 定义为

$$L_{ij} = R_i \times P_j. \quad (4)$$

考虑 $L_c = 0$ 的约束条件, 得到

$$L = - \sum_{i \neq j} L_{ij}. \quad (5)$$

根据我们以前的工作^[3], 体系的角动量可以用算符表示为

$$L = \hbar \sum_{i=1}^N (a_i^\dagger a_i - b_i^\dagger b_i), \quad L_{ij} = \hbar (a_i^\dagger a_j - b_i^\dagger b_j), \quad (6)$$

其中 $a = \hat{a} + \hat{b}$, $b = \hat{a}^\dagger - \hat{b}^\dagger$, 而 $\hat{a}, \hat{b}$ 由体系的坐标及其微分算符定义为

$$\hat{a} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - iy), \quad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right). \quad (7)$$

因此, 约束关系(5)式化为

$$L = \hbar \sum_{i \neq j} (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j - a_i^\dagger a_j). \quad (8)$$

(8)式就是适用于任意电子数 N 的对体系本征方程维数加以限制的关系. 和通常一样, 我们限于第一 Landau 能级的讨论, 这时约束关系化为

$$L = \hbar \sum_{i \neq j} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j. \quad (9)$$

为了说明(9)式与(2)式的等价, 考虑 $N = 3$ 的体系, 在二次量子化表象中, 基矢可取单电子的 Slater 行列式,

$$|l_1, l_2, l_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_p (-1)^p \phi_{l_1}(\mathbf{r}_1) \phi_{l_2}(\mathbf{r}_2) \phi_{l_3}(\mathbf{r}_3), \quad (10)$$

其中 l_i 表示 i 电子的角动量, (10) 式为 L 的本征矢, 其本征值为 $L = -\hbar \sum_{i=1}^3 l_i$. $\delta_i^\dagger$ 和 δ_i 作用于 (10) 式的结果为

$$\begin{aligned}\delta_1 |l_1, l_2, l_3\rangle &= \sqrt{l_1} |l_1 - 1, l_2, l_3\rangle, \\ \delta_1^\dagger |l_1, l_2, l_3\rangle &= \sqrt{l_1 + 1} |l_1 + 1, l_2, l_3\rangle.\end{aligned}\quad (11)$$

其它 $\delta_i, \delta_i^\dagger$ 等类推.

现举 $L = 6$ 为例, 在含有质心运动的情况下, 单电子角动量有 $|0, 1, 5\rangle, |0, 2, 4\rangle$ 和 $|1, 2, 3\rangle$ 三种可能的组合. 设受 (9) 式约束的波函数为这三个态的迭加,

$$\varphi_0 = \lambda_1 |0, 1, 5\rangle + \lambda_2 |0, 2, 4\rangle + \lambda_3 |1, 2, 3\rangle. \quad (12)$$

由 (9) 式作用于上式, 求出 $\lambda_2 = -\sqrt{10}/2\lambda_1$, $\lambda_3 = \sqrt{10}\lambda_1$. 因此, 在 $L_c = 0$ 的子空间, 波函数为

$$\varphi_0 = \lambda_1 \left[|0, 1, 5\rangle - \frac{\sqrt{10}}{2} |0, 2, 4\rangle + \sqrt{10} |1, 2, 3\rangle \right] \quad (13)$$

其中只有一个由归一条件决定的系数 λ_1 , 本征方程是一阶的, 与 Laughlin 结论一致. 如果没有约束条件的限制, 就必须解三阶的本征方程. 我们对无背景三电子体系作了计算, 首次出现简并的是 $L = 9$ 的角动量, 与 Laughlin^[3] 的计算结果完全符合, 为 (9) 式与 (2) 式的等价提供了一个佐证.

进一步我们把约束条件 (9) 式应用于计入正电背景影响的体系. 这不仅是出于简化求解哈密顿量的目的, 更重要的是为了讨论体系的内部运动性质. 图 1 和图 2 分别给出了局域电中性模型中三电子体系的基态能 E_0 与质心角动量 L_c 和相对角动量 L_0 的变化关系. 从图中明显地看到, E_0 随 L_c 的变化是很光滑的曲线. 能量的尖角完全由 L_0 的变化引起.

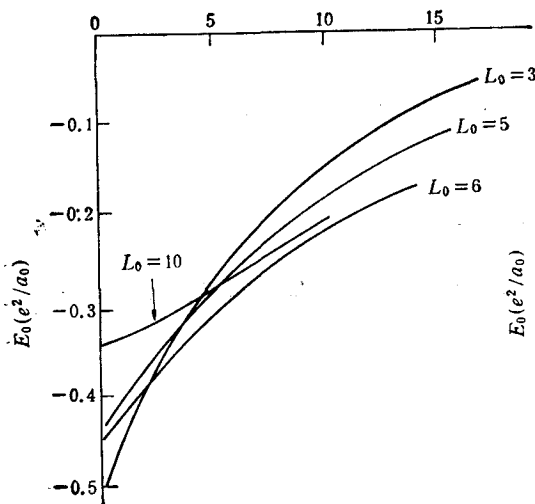


图 1 局域电中性体系基态能与质心角动量的关系

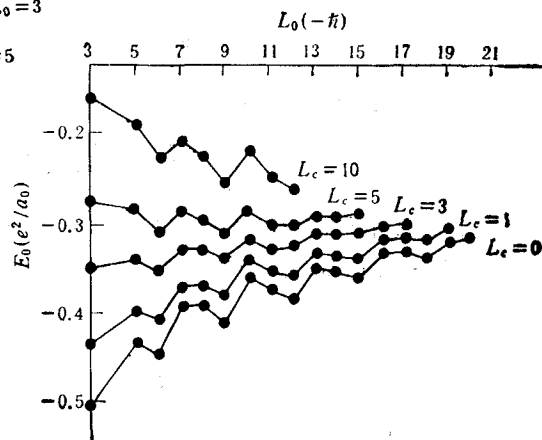


图 2 局域电中性体系基态能与相对角动量的关系

本工作得到高等学校基金委员会的资助。

参 考 文 献

- [1] W. Lai, K. Yu Z. Su & L. Yu, *Solid State Comm.*, **52**(1984), 339.
- [2] 熊小明、周世勋, 物理学报, **36**(1987), 1240.
- [3] R. B. Laughlin, *Phys. Rev.*, **B27** (1983), 3383.
- [4] S. A. Trugman & S. Kivelson, *Phys. Rev.* **B31**(1985), 5280.
- [5] 熊小明、周世勋, 物理学报, **36**(1987), 939.

EIGENENERGIES OF THE FRACTIONAL QUANTUM HALL EFFECT SYSTEM IN THE MASS CENTRE COORDINATE

XIONG XIAO-MING ZHOU SHI-XUN

(Department of Physics, Fudan University)

ABSTRACT

The fractional quantum Hall effect system is analysed in the mass centre coordinate. An equation which restricts the combination of the single electron angular momentum is obtained. By using this restrictive relation, the dimension of the Hamiltonian eigenequations could be reduced. We also calculated the eigenenergies in the mass centre coordinate with the effect of the neutralizing background charges included.